

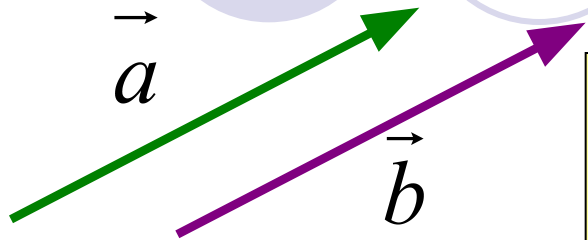
Vai, meach BERGMANN, CHRISTOPHER MONZBRECHT BERGMAN

Цели урока:

- *Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.*
- *Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.*
- *Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.*

Повторение:

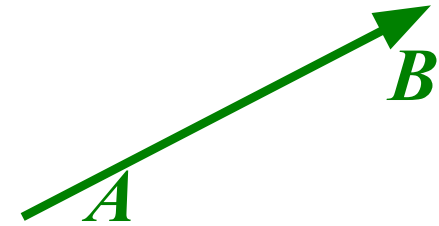
- *Какие векторы называются равными?*



$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } |\vec{a}| = |\vec{b}|; \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

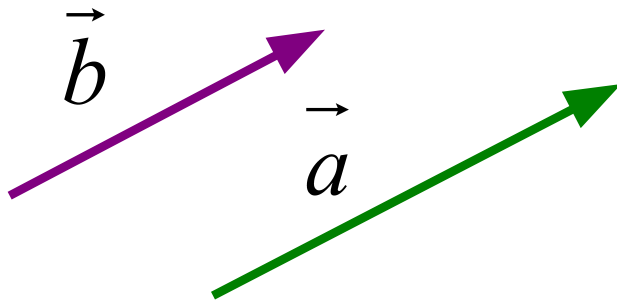
- *Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?*

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- *Какие векторы называются коллинеарными?*

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$



$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \quad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

Повторение:

(Векторы в пространстве)

1) Дано: $A(-3; -2; 4)$ $B(-4; 3; 2)$

$\sqrt{30}$

Найти: $|\vec{AB}|$

2) Дано: $A(2; -3; 1)$ $B(4; -5; 0)$ $C(5; 0; -4)$ $D(7; -2; -3)$

Равны ли векторы \vec{AB} и \vec{CD} ?

$\vec{AB}\{2; -2; -1\}$

$\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

3) Дано: Коллинеарны ли векторы \vec{AB} и \vec{CD} ?
 $A(1; -3; 4)$ $B(5; 1; -2)$ $C(2; 0; 1)$ $D(4; -2; 2)$

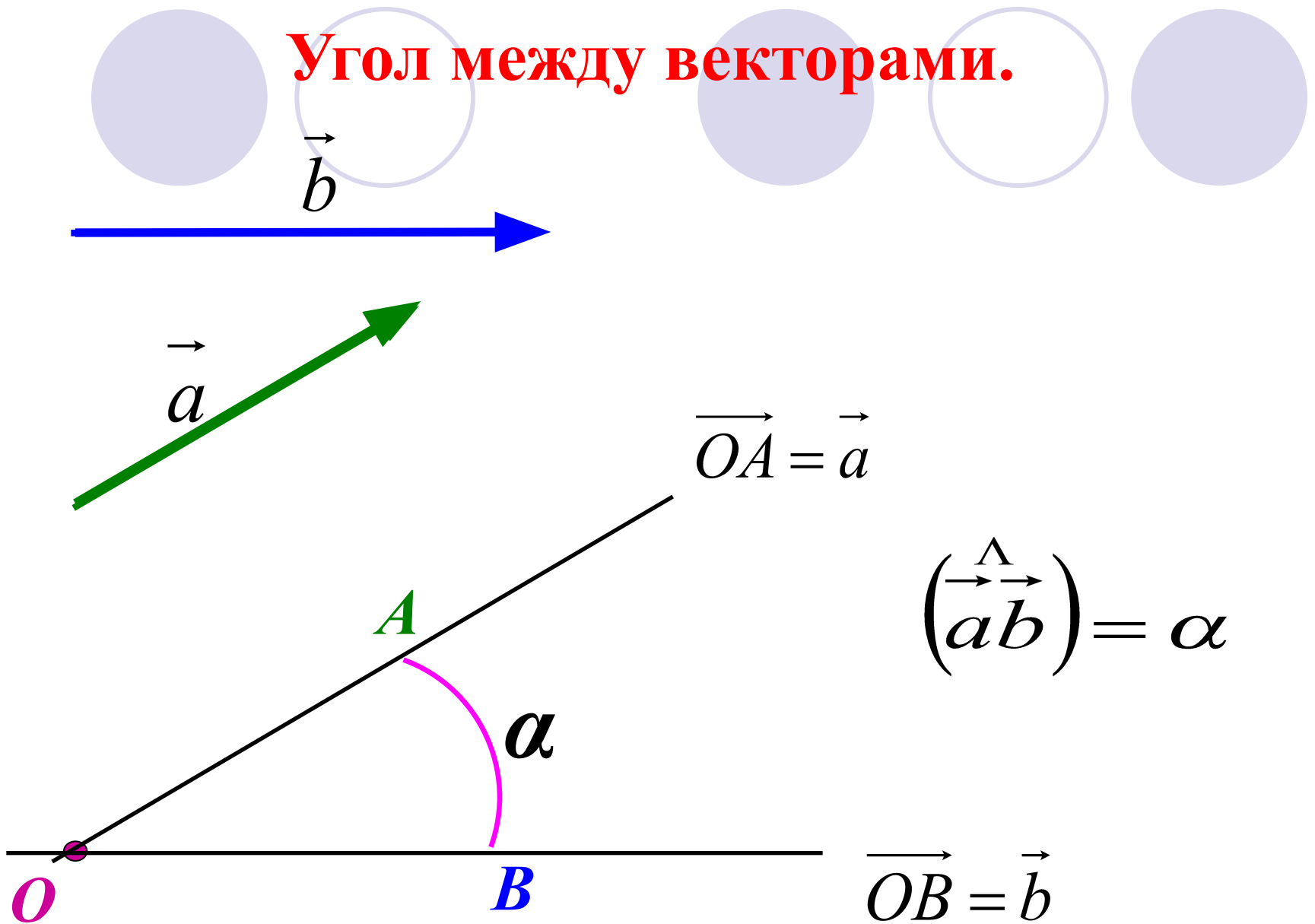
$\vec{AB}\{8; 4; -6\}$

$\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

Нет

р
в
н
ы
в
е
к
т
о
р
ы
и
м
е
ю
т
р
а
в
н
ы

Угол между векторами.





Примеры:

- $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \alpha = 60^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(60^\circ) = 3$
- $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 1, \alpha = 30^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot \cos(30^\circ) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$
- $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 4, \alpha = 45^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot \cos(45^\circ) = 14 \cdot \sqrt{2}$
- $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \alpha = 120^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(120^\circ) = \frac{-1}{2}$
- $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 5, \alpha = 90^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot \cos(90^\circ) = 0$

Свойства скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

1. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
2. Если $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, то $\cos 180^\circ = -1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
3. Если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, то $\cos 0^\circ = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
4. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = a^2$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется

скалярным квадратом вектора

*Скаляр – лат. **scale** – шкала.*



Ввёл в 1845 г.

***У. ГАМИЛЬТОН,**
английский
математик.*

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Вычислить скалярное произведение векторов

$$\vec{a} = (4; -6; 3), \vec{b} = (-5; 2; -5), \vec{c} = (0; -3; -4).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} =$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} =$$

Формула для вычисления угла между векторами, заданными своими координатами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Формула для вычисления угла между векторами, заданными своими координатами

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Решение задач

1. В треугольнике ABC найти величину угла B, если $A(0; 5; 0)$, $B(4; 3; -8)$, $C(-1; -3; -6)$.
2. Определить угол между векторами AB и CD, если $A(1; -3; -4)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(2; -4; -6)$, $D(1; 1; 1)$.

1

Скалярное произведение координатных векторов



равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1

1

ПОДУМАЙ!

2

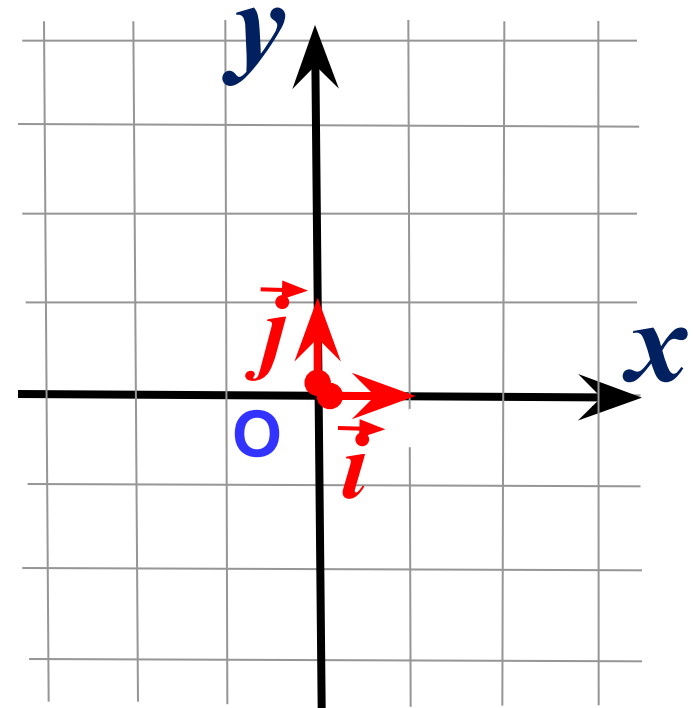
-1

ПОДУМАЙ!

3

0

ВЕРНО!



Проверка

2

Скалярный квадрат вектора \vec{i} равен:

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

ВЕРНО!

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$$

1

1

2

-1

ПОДУМАЙ!

3

0

ПОДУМАЙ!

Проверка

3 Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$,
 то векторы \vec{a} и \vec{b} : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle \vec{a} \vec{b}$

ВЕРНО!

$$12 = 3 \cdot 4 \cos \angle \vec{a} \vec{b}$$

$$\cos \angle \vec{a} \vec{b} = 1$$

$$\angle \vec{a} \vec{b} = 0^\circ$$

1 сонаправлены;

2 перпендикулярны; **ПОДУМАЙ!**

3 противоположно направлены. **ПОДУМАЙ!**

Проверка

4 Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = -20$,
то векторы \vec{x} и \vec{y}

$|\vec{x}| = 4$, $|\vec{y}| = 5$,
 $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos \angle x y$

ПОДУМАЙ!

$$-20 = 4 \cdot 5 \cos \angle x y$$

1

сонаправлены;

ПОДУМАЙ!

$$\cos \angle x y = -1$$

2

перпендикулярны;

ВЕРНО!

$$\angle x y = 180^\circ$$

3

противоположно направлены.

$$\angle x y = 0^\circ$$

Проверка

5 Найдите угол между векторами \vec{m} и \vec{n} , если $\vec{m} \cdot \vec{n} = -15$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 6$.

ПОДУМАЙ!

1 50°

ПОДУМАЙ!

2 60°

ВЕРНО!

3 120°

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка