# ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

**ЛЕКЦИЯ 5**

**2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА**

# 2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

**2.2. Аффинные множества.**

**2.3. Размерность множества.**

**2.4. Операции над выпуклыми множествами.**

## 2.2. Аффинные множества.

**Определение 2.** ***Множество*** $M \subset R^n$ ***называется аффинным, если для всех*** $u_1, u_2 \in M$, $\lambda \in R^1$ ***справедливо включение*** $\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in M$.

Геометрический смысл данного определения состоит в том, что аффинное множество вместе с любыми своими точками содержит и всю прямую, проходящую через эти точки.

Очевидно, что аффинные множества выпуклы. Пустые и одноточечные множества принимаются аффинными по определению.

**Теорема 2.** ***Любой сдвиг аффинного множества является аффинным множеством.***

**Доказательство.** Пусть $A \in R^n$ – аффинное множество и $u_0 \in R^n$. Полагаем $M = A + \{u_0\}$. Требуется доказать, что множество $M$ является аффинным.

Действительно, для всех $u_1, u_2 \in M$ и $\lambda \in R^1$ имеем

$$u_1 = \overset{\in A}{a_1} + u_0,\ u_2 = \overset{\in A}{a_2} + u_0, \quad a_1, a_2 \in A$$

$$u_\lambda = \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 = \lambda(a_1 + u_0) + (1-\lambda)(a_2 + u_0) =$$

$$= \underbrace{\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2}_{\in \text{аффинное}} + u_0 \in A + \{u_0\} = M.$$

Теорема доказана.

**Определение 3.** ***Множество*** $L \subset R^n$ ***называется подпространством пространства*** $R^n$, ***если для всех*** $\alpha, \beta \in R^1$ ***и*** $u, v \in L$ ***следует*** $\alpha u + \beta v \in L.$

**Упражнение.** Доказать, что множество $L \subset R^n$ будет подпространством тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in R^1$ и $u, v \in L$ следует $u + v \in L$ и $\alpha u \in L.$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть $L \subset R^n -$ подпространство. Тогда $\alpha u + \beta v \in L.$ Для $\alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow \underbrace{u + v \in L}_{\in L}$ и для $\beta = 0 \Rightarrow \alpha u \in L.$

**Достаточность.** $\overset{\in L}{(\alpha u)} + \overset{\in L}{(\beta v)} \Rightarrow (\alpha u) + (\beta v) \in L$

Все пространство $R^n$ и любое его подпространство являются аффинными множествами.

**Теорема 3.** ***Пусть*** $A \subset R^n$ ***- аффинное множество, и*** $0 \in A.$ ***Тогда*** $A -$ ***подпространство.***

**Доказательство.** Для всех $u, v \in A, \ \alpha \in R^1$ имеем

$$\alpha u = \overbrace{\alpha u + (1-\alpha)\cdot 0 \in A}^{\text{определение афинного множества}}, \qquad (1)$$

$$u + v = 2\cdot\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) = \underbrace{2\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{2}u + \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot v\right]}_{\in A}}_{\in A\ \text{в силу}\ (1)} \in A.$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** ***Всякое аффинное множество*** $A \subset R^n$ ***представимо в виде***

$$A = L + \{u_0\}, \qquad (2)$$

***где*** $L$ ***подпространство, однозначно определяемое множеством*** $A$, ***а*** $u_0$ ***– произвольная точка множества*** $A$.

**Доказательство.** Пусть $u_0 \in A$. Положим $L = A - \{u_0\}$. В силу **теоремы 2** множество $L$ – аффинное, причем $u_0 \in A \Rightarrow 0 \in L$. Тогда по **теореме 3** $L$ – подпространство. Убедимся, что оно не зависит от выбора точки $u_0$. В самом деле, пусть

$$L_1 = A - \{u_1\},\ u_1 \in A. \qquad (3)$$

Из (2) следует $A - \{u_0\} = L$. Тогда имеет место включение $\overset{\in A}{u_1} - u_0 \in L$.

Пусть $u \in L$. Докажем, что $u \in L_1$. По свойству подпространств

$$\overset{\in L}{u} + \overset{\in L}{(u_1 - u_0)} \in L \Rightarrow u \in L - \{u_1 - u_0\} =$$

$$= \overbrace{L + \{u_0\}}^{\overset{(2)}{=}A} - \{u_1\} = A - \{u_1\} \Rightarrow u \in \overbrace{A - \{u_1\}}^{\overset{(3)}{=}L_1} = L_1.$$

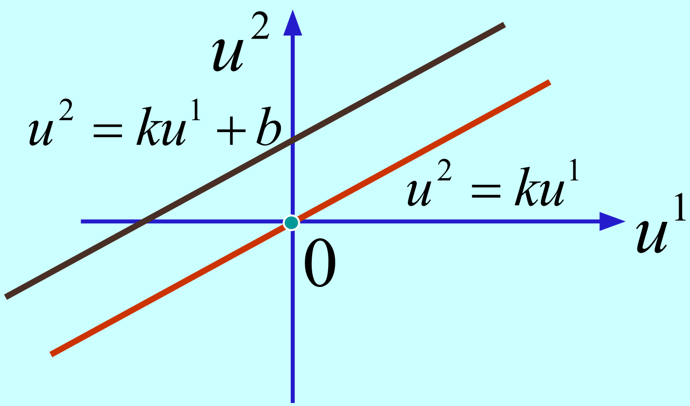
Таким образом, доказано, что $L \subset L_1$. Аналогично доказывается обратное вложение $L_1 \subset L$. Тогда $L = L_1$ и теорема доказана.

**Определение 4.** ***Подпространство*** $L$ ***из представления (1)*** $A = L + \{u_0\}$ $\quad (1)$

***называется подпространством, параллельным множеству*** $A$.

Дадим геометрическую иллюстрацию полученных результатов. При $n = 2$

подпространство представляет собой прямую, проходящую через начало координат, а аффинное множество – произвольную прямую на плоскости. **Теорема 3** утверждает, что для любой прямой на плоскости существует единственная прямая, проходящая через начало координат, ей параллельная.




**Теорема 5.** ***Пересечение любого числа аффинных множеств является аффинным множеством***. Доказательство аналогично доказательству **теоремы 1.**

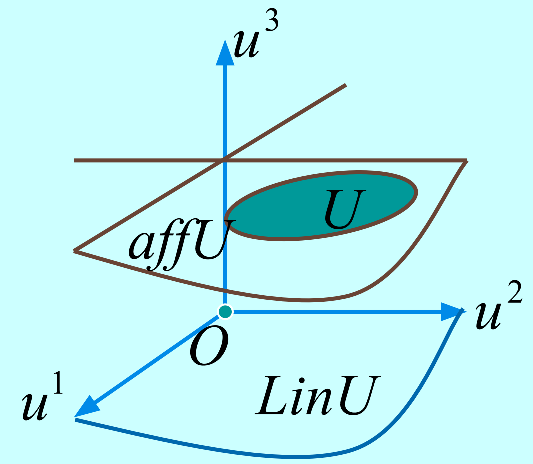
## 2.3. Размерность множества.

**Определение 5.** ***Пусть*** $U \subset R^n$. ***Пересечение всех аффинных множеств, содержащих множество*** $U$, ***называется аффинной оболочкой множества*** $U$ ***и обозначается через*** $affU$.

Из определения множества $affU$ следует, что оно аффинное, содержит множество $U$ и вложено в любое другое аффинное множество, содержащее $U$.

Таким образом, аффинная оболочка множества $U$ представляет собой минимальное аффинное множество, содержащее $U$.

**Определение 6.** ***Подпространство параллельное*** $affU$, ***называется несущим подпространством множества*** $U$ ***и обозначается через*** $LinU$.



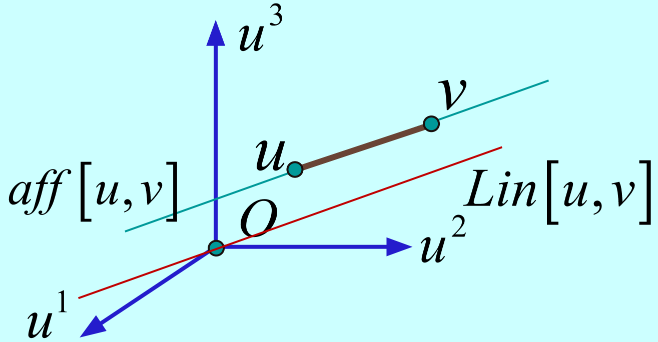
**Определение 7.** ***Размерностью множества*** $U \subset R^n$ ***называется размерность несущего пространства его аффинной оболочки.***

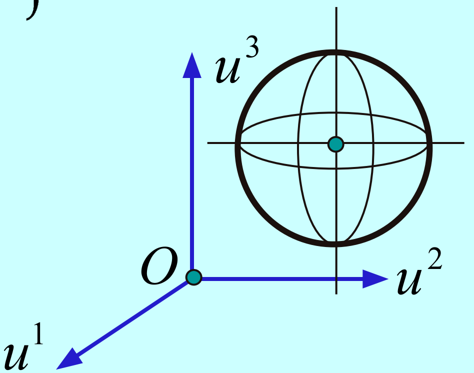
Согласно принятому определению отрезок

$$\left[u, v\right] = \left\{u_\alpha = \alpha u + \left(1 - \alpha\right) v \,\middle|\, \alpha \in \left[0, 1\right]\right\}$$

соединяющий две точки $u, v \in R^n, u \neq v,$ имеет размерность 1, так как его аффинной оболочкой является прямая

$$aff\left[u, v\right] = \left\{u_\alpha = \alpha u + \left(1 - \alpha\right) \,\middle|\, \alpha \in R^1\right\}.$$




Размерность шара $O\left(u_0, R\right) \subset R^n$ равна $n.$

**2.4. Операции над выпуклыми множествами.** К числу операций над выпуклыми множествами, сохраняющих их выпуклость относятся: операции пересечения, взятия линейной алгебраической комбинации и линейного преобразования.

**Теорема 6.** ***Любая линейная комбинация конечного числа выпуклых множеств выпукла.***

**Доказательство**. Пусть $U_1,\dots,U_m \subset R^n -$ выпуклые множества и $U=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i U_i$. Для всех $u,v\in U$ справедливо представление

$$u=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \overset{\in U_i}{a_i^{(u)}},\ v=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \overset{\in U_i}{a_i^{(v)}},\qquad a_i^{(u)},\ a_i^{(v)}\in U_i,\ \ i=1,\dots,m.$$

Тогда при всех $\alpha\in[0,1]$ имеем

$$\alpha u+(1-\alpha)v=\alpha\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i^{(u)}+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i^{(v)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha a_i^{(u)}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(1-\alpha)a_i^{(v)}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overbrace{\left[\alpha \overset{\in U_i}{a_i^{(u)}}+(1-\alpha)\overset{\in U_i}{a_i^{(v)}}\right]}^{\in U_i\ \text{выпуклость}}.$$

$$\alpha u+(1-\alpha)v=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overbrace{\left[\overbrace{\alpha\, a_i^{(u)}}^{\in U_i}+\overbrace{(1-\alpha)\,a_i^{(v)}}^{\in U_i}\right]}^{\in U_i\ \text{выпуклость}}.$$

Из выпуклости множества $U_i$ следует

$$\alpha a_i^{(u)}+(1-\alpha)a_i^{(v)}\in U_i,\quad i=1,\ldots,m,$$

Тогда

$$\alpha u+(1-\alpha)v=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overbrace{\left[\alpha a_i^{(u)}+(1-\alpha)a_i^{(v)}\right]}^{\in U_i}.\in\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i U_i=\ U.$$

Теорема доказана.

**Теорема 7.** ***Пусть*** $U\subset R^n$ ***выпуклое множество и*** $\alpha\geq 0,\ \beta\geq 0.$ ***Тогда***

$$(\alpha+\beta)\cdot U=\alpha U+\beta U. \qquad (1)$$

**Доказательство.** Вложение $(\alpha+\beta)\cdot U\subset\alpha U+\beta U$ было доказано в предыдущей лекции в общем случае без предположения о выпуклости множества $U$ и положительности чисел $\alpha$ и $\beta.$ В условиях теоремы докажем обратное вложение

$$(\alpha+\beta)\cdot U\supset\alpha U+\beta U.$$

Будем предполагать, что $\alpha+\beta>0$. В противном случае $\alpha=\beta=0$ и формула (1)

$(\alpha+\beta)\cdot U=\overset{0}{\alpha}\,U+\overset{0}{\beta}\,U.$ (1) очевидна. Пусть $u\in\alpha U+\beta U$. Тогда

$$u=\alpha\overset{\in U}{u_1}+\beta\overset{\in U}{u_2},\quad u_1,u_2\in U\Rightarrow u=(\alpha+\beta)\left(\overset{\geq 0}{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}u_1+\overset{\geq 0}{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}u_2\right),$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\geq 0,\ \frac{\beta}{\alpha+\beta}\geq 0,\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1\Rightarrow\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}u_1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}u_2\right)\overset{\text{выпуклость } U}{\in}U.$$

Таким образом,

$$u\in(\alpha+\beta)U\Rightarrow(\alpha+\beta)\cdot U\supset\alpha U+\beta U\Rightarrow(\alpha+\beta)\cdot U=\alpha U+\beta U.$$

и теорема доказана.

Пусть $U\subset R^n$ и $A-$ квадратная матрица $n-$ го порядка.

**Определение 8.** ***Образом множества*** $U$ ***при линейном преобразовании*** $A$ ***называется множество***

$$A(U)=\{v=Au\,|\,u\in U\}.$$

**Теорема 8.** ***При линейном преобразовании образ непустого компактного выпуклого множества является непустым компактным выпуклым множеством.***

**Доказательство.** Ограничимся доказательством выпуклости образа линейного преобразования. Пусть

$$v_1, v_2 \in A(U) \Rightarrow v_i = Au_i,\ u_i \in U,\ i = 1, 2.$$

Для всех $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2 = \alpha A u_1 + (1-\alpha) A u_2 = A\left(\overbrace{\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2}^{\in U\ \text{выпуклость}}\right).$$

В силу выпуклости множества $U$ имеет место включение $\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \in U$.

Тогда

$$\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2 = A\left(\overbrace{\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2}^{\in U}\right) \in A(U)$$

и выпуклость множества $A(U)$ доказана.

**Пример 5.** Пусть

$$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad U = \bar{O}(0,1) = \left\{ \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \middle| \left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 \le 1 \right\}.$$

$$A\left(\bar{O}(0,1)\right)= \left\{\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \middle| \left(u^1\right)^2+\left(u^2\right)^2 \le 1\right\}=$$

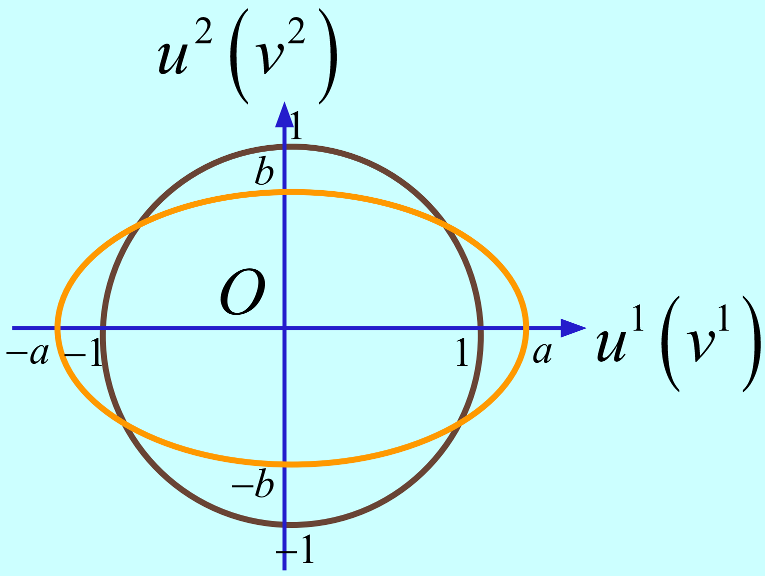
$$=\left\{\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} au^1 \\ bu^2 \end{pmatrix} \middle| \left(u^1\right)^2+\left(u^2\right)^2 \le 1\right\},$$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$u^1=\frac{v^1}{a},\, u^2=\frac{v^2}{b} \Rightarrow$$

$$A\left(\bar{O}(0,1)\right)=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| \left(\frac{v^1}{a}\right)^2+\left(\frac{v^2}{b}\right)^2 \le 1\right\}.$$



**Упражнение 1.** Пусть

$$U=\left\{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}-7u_1-2u_2\le -14,\\5u_1+6u_2\le 30,\\-3u_1-8u_2\le -24,\end{array}\right\}$$

Построить множество $A(U)$, где $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$. Убедиться в его выпуклости

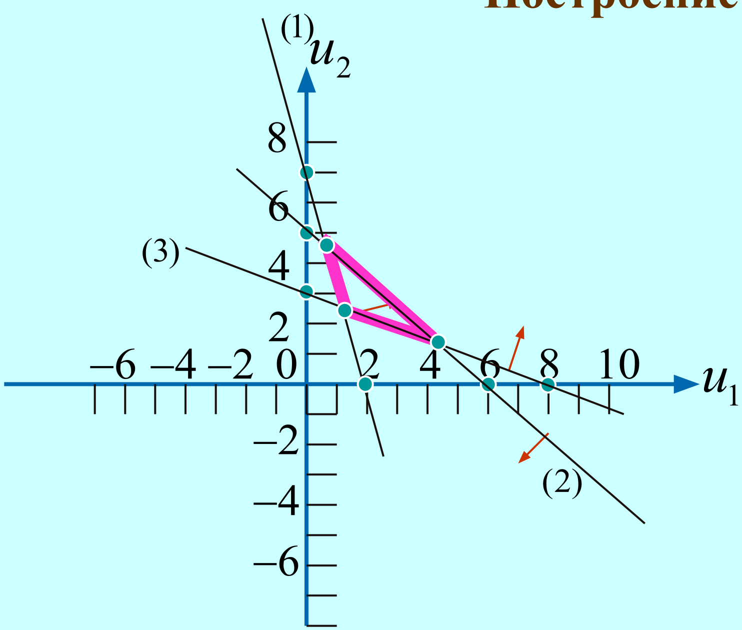
**Решение.**

$$-7u_1-2u_2\le -14, \quad (1)$$

$$5u_1+6u_2\le 30, \quad (2)$$

$$-3u_1-8u_2\le -24, \quad (3)$$

**Построение множества** $U$.




$$(1)\quad u_1=0\Rightarrow\ u_2=7,$$

$$u_1=2\Leftarrow u_2=0.$$

$$(2)\quad u_1=0\Rightarrow\ u_2=5,$$

$$u_1=6\Leftarrow u_2=0.$$

$$(3)\quad u_1=0\Rightarrow\ u_2=3,$$

$$u_1=8\Leftarrow u_2=0.$$

**Построение множества** $A(U)$.

$$A(U) = \left\{ \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} -7u_1 - 2u_2 \le -14, \\ 5u_1 + 6u_2 \le 30, \\ -3u_1 - 8u_2 \le -24, \end{array} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} v_1 \\ \frac{1}{3} v_2 \end{pmatrix}$$

$$A(U) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} -7\left(\frac{1}{2} v_1\right) - 2\left(\frac{1}{3} v_2\right) \le -14, \\ 5\left(\frac{1}{2} v_1\right) + 6\left(\frac{1}{3} v_2\right) \le 30, \\ -3\left(\frac{1}{2} v_1\right) - 8\left(\frac{1}{3} v_2\right) \le -24, \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{lr} -\dfrac{7}{2} v_1 - \dfrac{2}{3} v_2 \le -14, & (1) \\ \dfrac{5}{2} v_1 + 2 v_2 \le 30, & (2) \\ -\dfrac{3}{2} v_1 - \dfrac{8}{3} v_2 \le -24 & (3) \end{array} \Rightarrow$$

$$-\frac{7}{2}v_1-\frac{2}{3}v_2\le -14, \quad (1)$$
$$\frac{5}{2}v_1+2v_2\le 30, \quad (2) \quad \Rightarrow$$
$$-\frac{3}{2}v_1-\frac{8}{3}v_2\le -24 \quad (3)$$

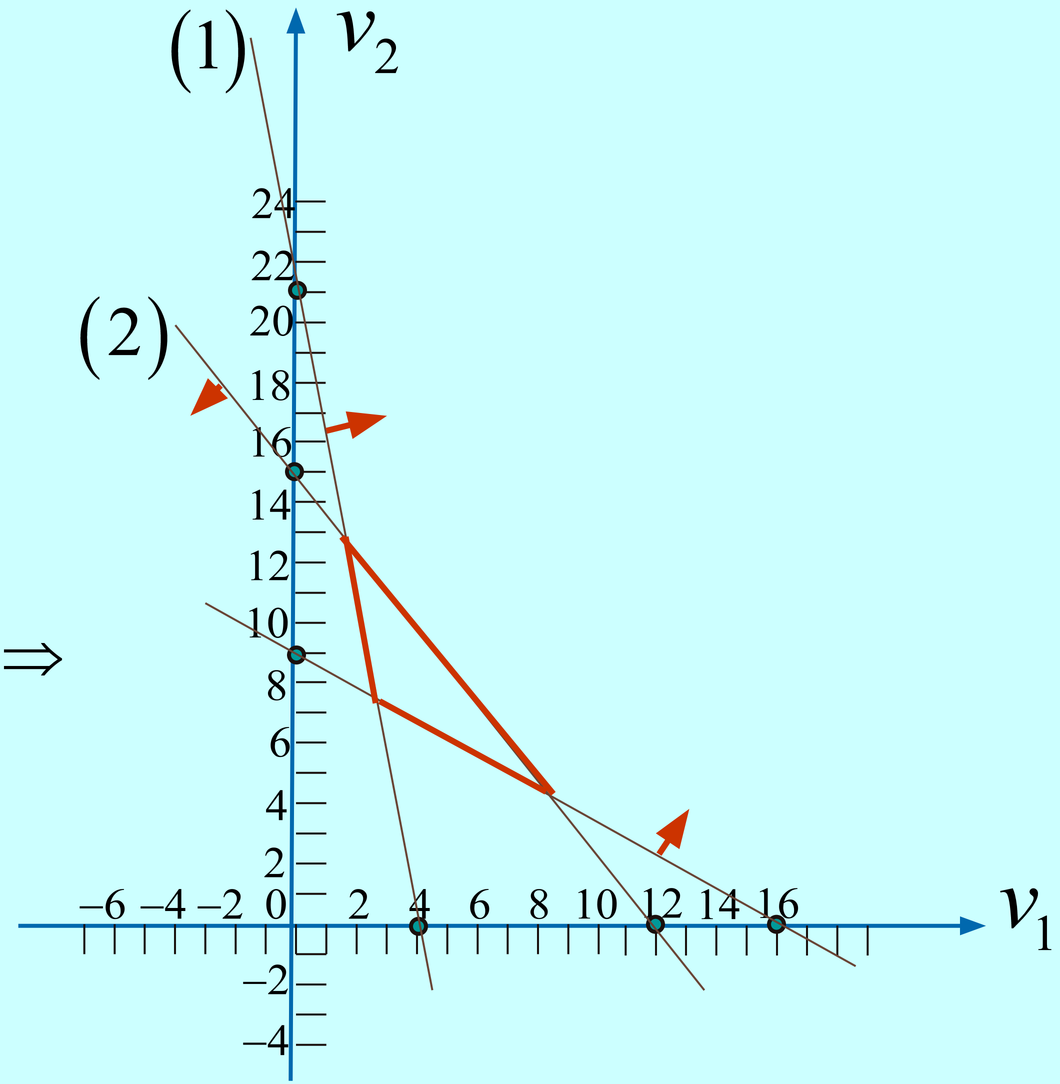
$$-21v_1-4v_2\le -84, \quad (1)$$
$$5v_1+4v_2\le 60, \quad (2) \quad \Rightarrow$$
$$-9v_1-16v_2\le -144 \quad (3)$$

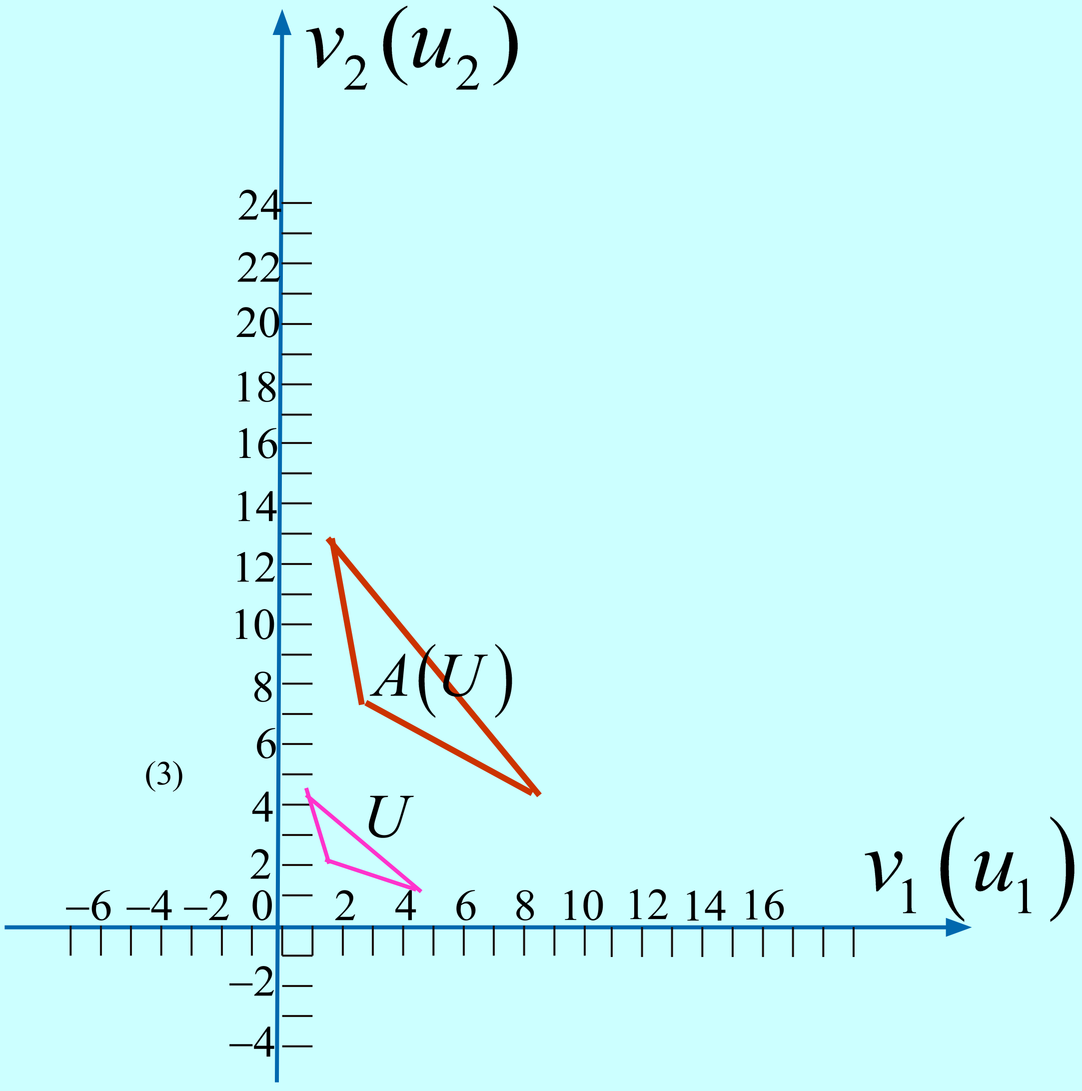
$$(1):\ v_1=0\Rightarrow\ v_2=21,\quad v_1=4\Leftarrow v_2=0.$$

$$(2):\ v_1=0\Rightarrow\ v_2=15,\quad v_1=12\Leftarrow v_2=0.$$

$$(3):\ v_1=0\Rightarrow\ v_2=9,\quad v_1=16\Leftarrow v_2=0.$$

$\Rightarrow$





$v_2(u_2)$
$v_1(u_1)$
$A(U)$
$U$
(3)
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
6
8
10
12
14
16