

*Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный  
Университет (Сибстрин)*

**Лекции по теоритической механике. динамика**

**Лекция № 9**

**«Теорема об изменении момента импульса  
материальной системы»**



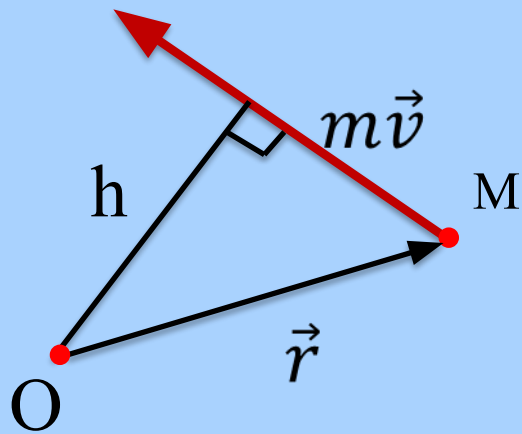
*Кафедра теоретической механики*

## **План лекции:**

- Момент импульса материальной точки**
- Момент импульса механической системы**
- Момент импульса твердого тела при поступательном и вращательном движении**
- Теорема об изменении момента импульса системы**
- Разбор задачи**

# Момент импульса материальной точки (вспоминаем)

Момент импульса материальной точки относительно некоторого центра  $O$  определяется равенствами



$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$K_O = \pm m v h$$

$$\overset{\square}{K}_O = K_x \overset{\square}{i} + K_y \overset{\square}{j} + K_z \overset{\square}{k}$$

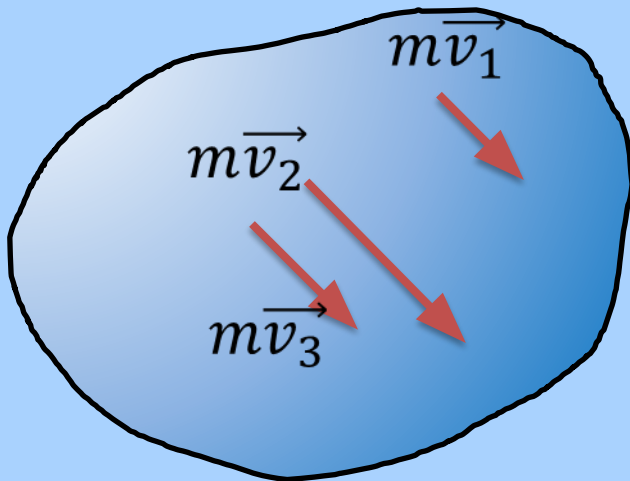
$$K_x = \sum m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky})$$

# Момент импульса механической системы (МС)

Момент импульса МС относительно центра  $O$  – это сумма моментов (или главный момент) импульсов всех материальных точек, входящих в систему, относительно того же центра



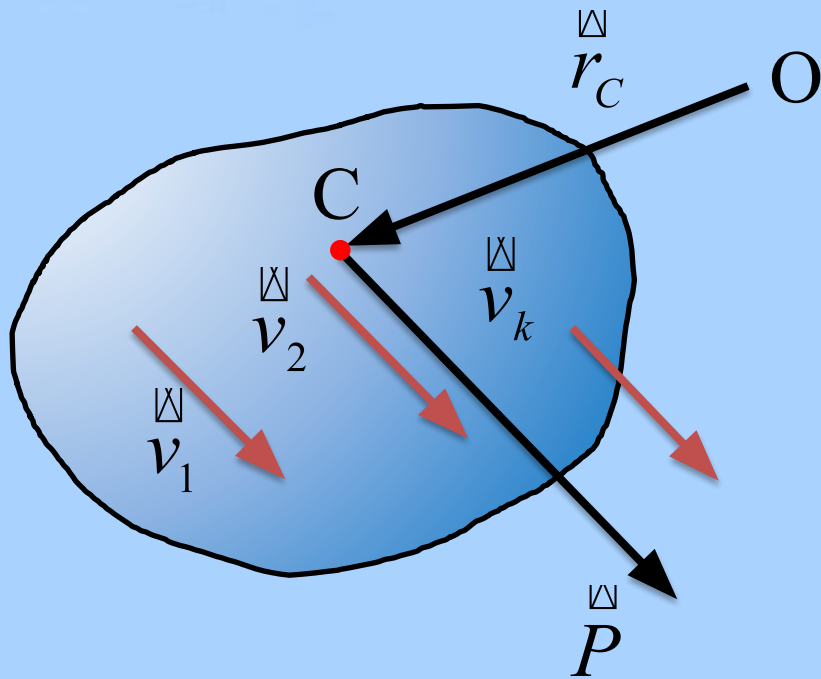
$$\vec{P} = \sum m_k \vec{v}_k$$



$$\vec{K}_O = \sum \vec{K}_{Ok} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$$

# Момент импульса твердого тела

## 1. Поступательное движение



$$\vec{K}_O = \sum_{k=0}^N \vec{K}_{Ok} = \sum_{k=0}^N m_k \vec{r}_k \times \vec{v}_k =$$

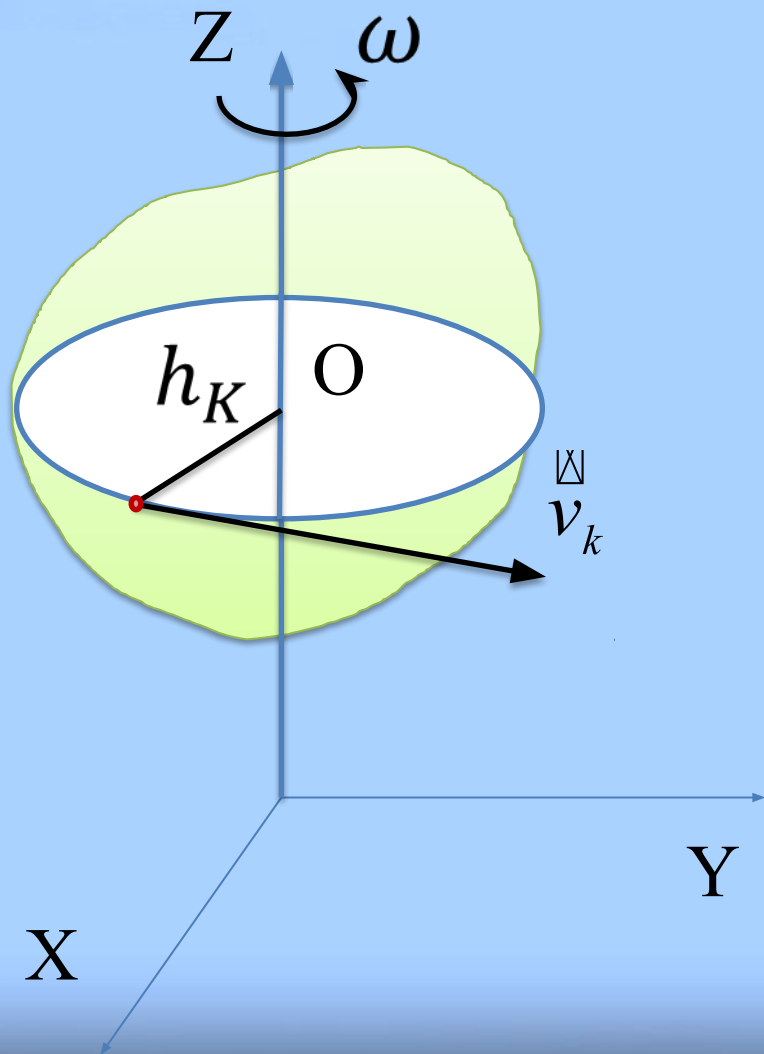
$$= \left( \sum_{k=0}^N m_k \vec{r}_k \right) \times \vec{v}_k = M \vec{r}_C \times \vec{v}$$

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times \vec{P}$$

$$K_O = \pm M v h_C$$

# Момент импульса твердого тела

## 2. Вращение вокруг неподвижной оси

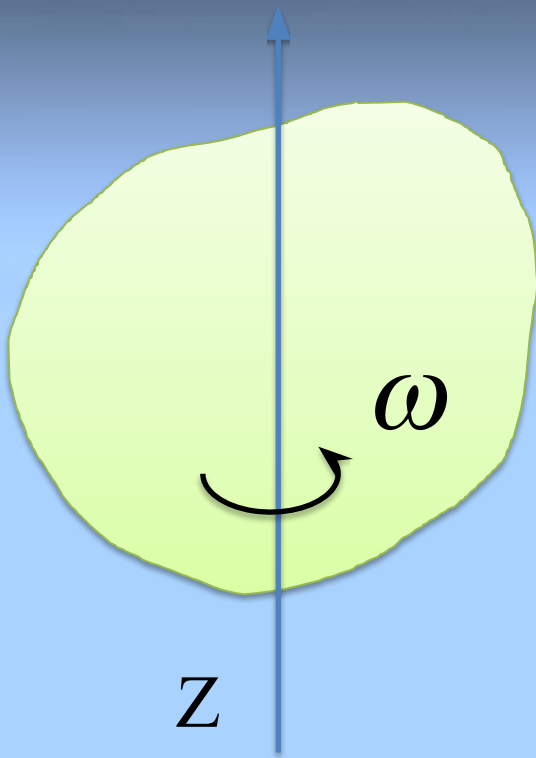


$$K_z = \sum m_k v_k h_k \quad v_k = \omega h_k$$

$$K_z = \sum m_k \omega h_k^2$$

$$K_z = \left( \sum m_k h_k^2 \right) \omega$$

$$J_z = \sum m_k h_k^2$$

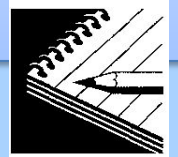


$$K_z = J_z \omega$$

Момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на модуль угловой скорости тела

# Теорема об изменении момента импульса МС

Полная производная по времени вектора момента импульса МС, вычисленного относительно неподвижного центра, равна главному моменту всех внешних сил относительно того же центра



$$\frac{dK_{Ok}}{dt} = M_O(F_k^e) + M_O(F_k^i)$$

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum_{k=1}^N M_O(F_k^e) + \sum_{k=1}^N M_O(F_k^i)$$

$$\sum M_O(F_k^i) = 0$$

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum M_O(F_k^e)$$



# Следствия из теоремы об изменении момента импульса МС

Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно данного центра равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра будет постоянен по модулю и направлению

$$\sum \overset{\Delta}{M}_O(\overset{\Delta}{F}_k^e) = 0 \quad \longrightarrow \quad \overset{\Delta}{K}_O = const$$

Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной

$$\sum M_z(\overset{\Delta}{F}_k^e) = 0 \quad \longrightarrow \quad K_z = const$$

# Рассмотрим задачу на вращение твердого тела вокруг своей оси

$$m_k = 5 \text{ кг}$$

$$h = 0.7 \text{ м}$$

$$R = 0.2 \text{ м}$$

$$K_o = 10 \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = ?$$

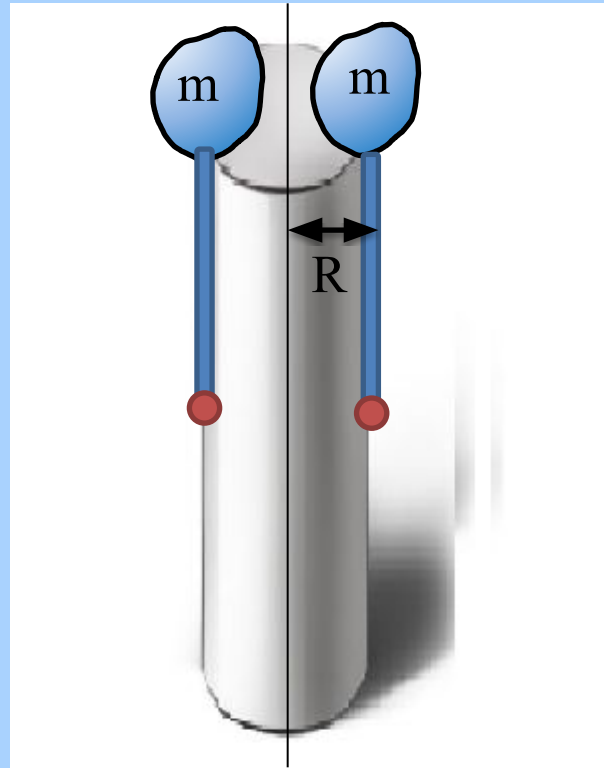
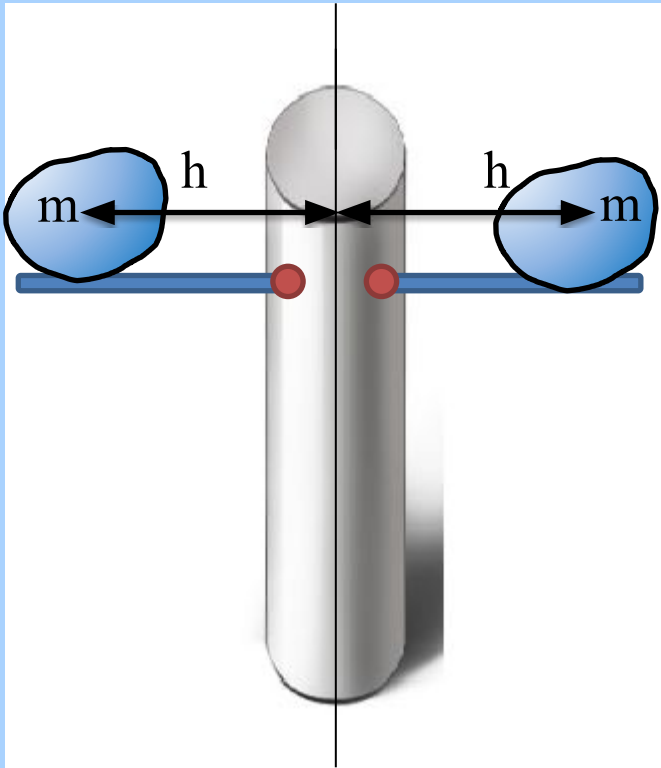
$$K_o = J_o \omega$$

$$J_z = \sum m_k h_k^2$$

Решение:

$$1. \omega_1 = \frac{K_o}{J_1} = \frac{K_o}{2 * m_k * h^2} = \frac{10}{4.9} = 2 \text{ рад/с}$$

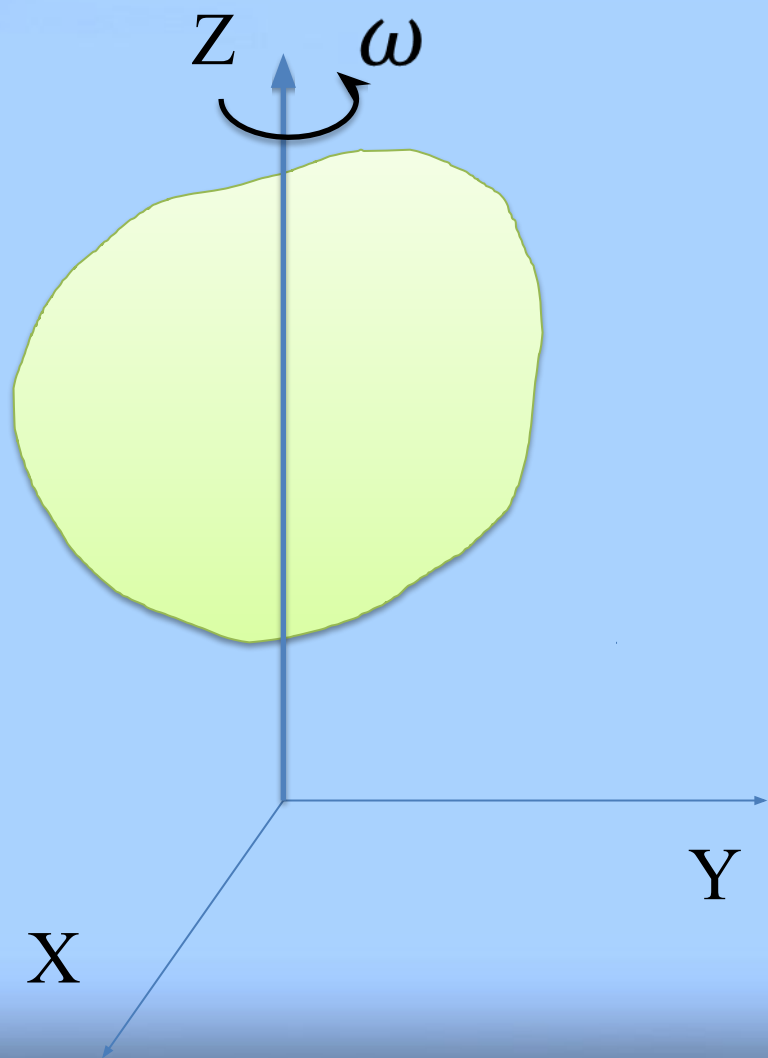
$$2. \omega_2 = \frac{K_o}{J_2} = \frac{K_o}{2 * m_k * h^2} = \frac{10}{0.4} = 25 \text{ рад/с}$$



$$3. \frac{\omega_2}{\omega_1} = 12.5$$

# Вектор момента импульса твердого тела

Вращение вокруг неподвижной оси



$$\overset{\curvearrowright}{P} = M \overset{\curvearrowright}{v} \quad \Rightarrow \quad K_Z = \pm J_Z \omega$$

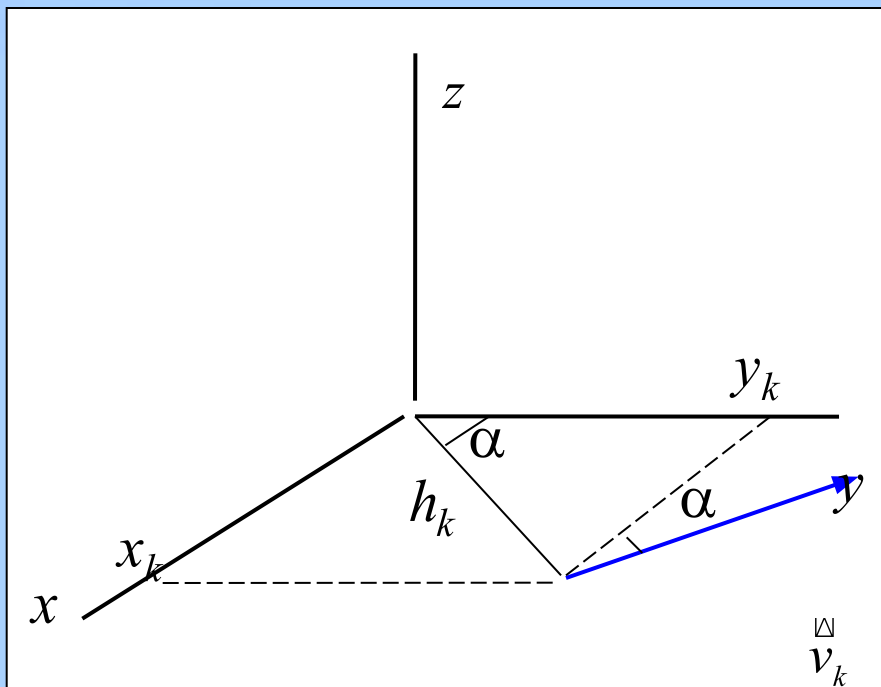
Можно ли записать

$$\overset{\curvearrowright}{K}_O = J_Z \overset{\curvearrowright}{\omega}$$

?

# Вектор момента импульса твердого тела

## Вращение вокруг неподвижной оси



$J_{xz}, J_{yz}$  - центробежные  
моменты инерции

$$v_{kx} = -\omega h_k \cos \alpha = -\omega h_k \frac{y_k}{h_k} = -\omega y_k$$

$$v_{ky} = \omega h_k \sin \alpha = \omega h_k \frac{x_k}{h_k} = \omega x_k$$

$$v_{kz} = 0$$

$$K_x = \sum_k m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) = -(\sum_k m_k x_k z_k) \omega$$

$$K_x = -J_{xz} \omega$$

$$K_y = \sum_k m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}) = -(\sum_k m_k y_k z_k) \omega$$

$$K_y = -J_{yz} \omega$$