Потоки в графах. Нахождение максимального потока

Преподаватель: Солодухин Андрей Геннадьевич

План

1. Понятие потока. Постановка задачи
2. Алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

На этом занятии будем рассматривать **ориентированные** графы **без петель и кратных ребер**. Для вершины ***x*** множество всех входящих в нее ребер обозначается через $E^{+}(x)$, а множество выходящих – через $E^{-}(x)$.

Сетью называется орграф, в котором
1) каждому ребру ***e*** приписано положительное число ***c(e)***, называемое ***пропускной способностью*** ребра;
2) выделены две вершины ***s*** и ***t***, называемые соответственно ***источником*** и ***стоком***, при этом $E^{+}(s) = E^{-}(t) = \varnothing$ - то есть из источника дуги только выходят, а в сток только входят.

В данной задаче основным параметром на дугах сети является c_{ij} – ***пропускная способность***

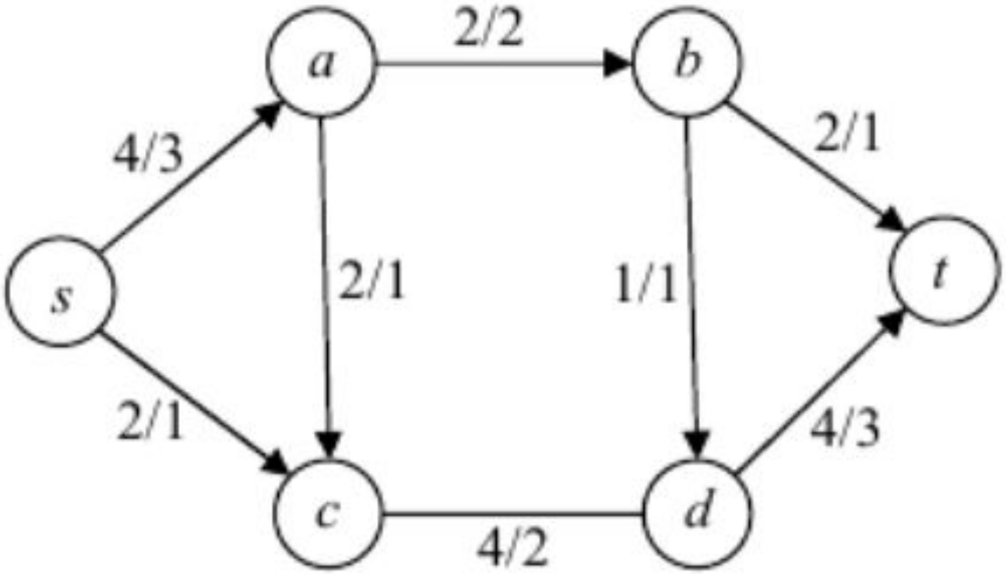
Функция f называется ***потоком*** в сети N, если она удовлетворяет условиям:

(1) **ограниченности**: поток по любой дуге сети не превосходит пропускной способности этой дуги:

$$0 \le f(e) \le c(e) \text{ для каждой дуги } e;$$

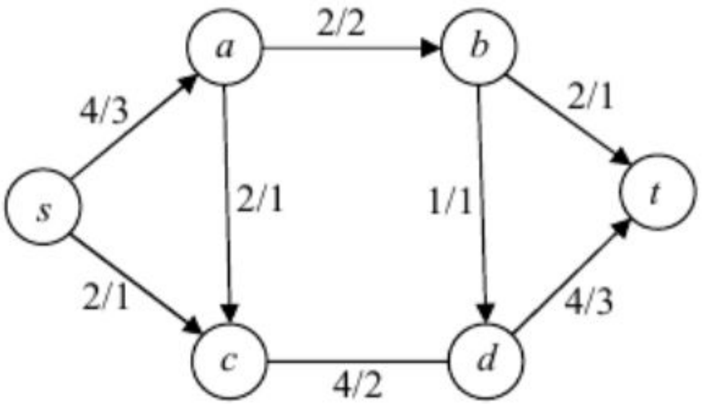
(2) **сохранения**: суммарный поток, заходящий в любую вершину сети (кроме истока и стока), равен суммарному потоку, выходящему из этой вершины:

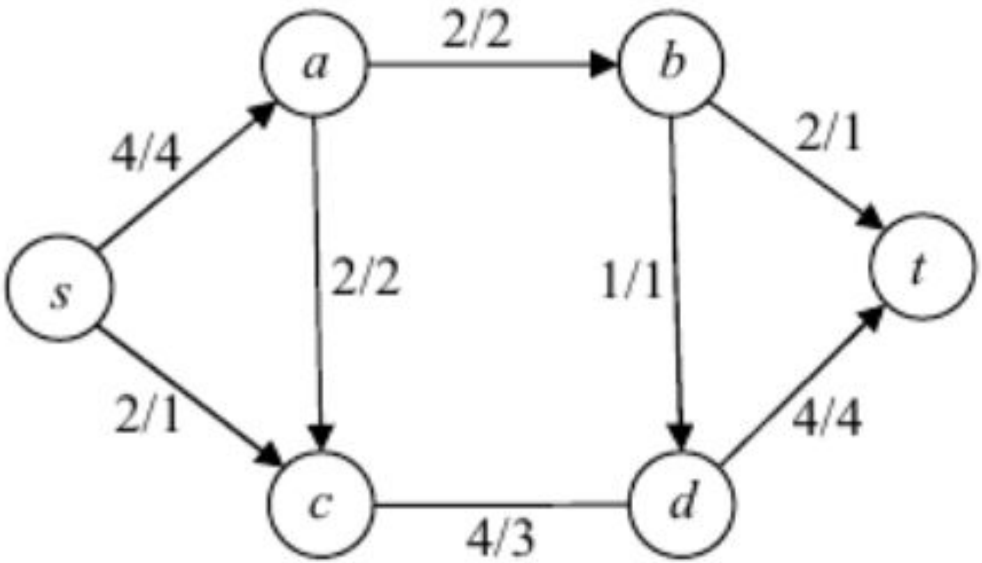
$$f^{+}(x) = f^{-}(x) \text{ для каждой внутренней вершины } x.$$



В дроби, приписанной каждому ребру, числитель представляет пропускную способность ребра, а знаменатель – величину потока на этом ребре

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

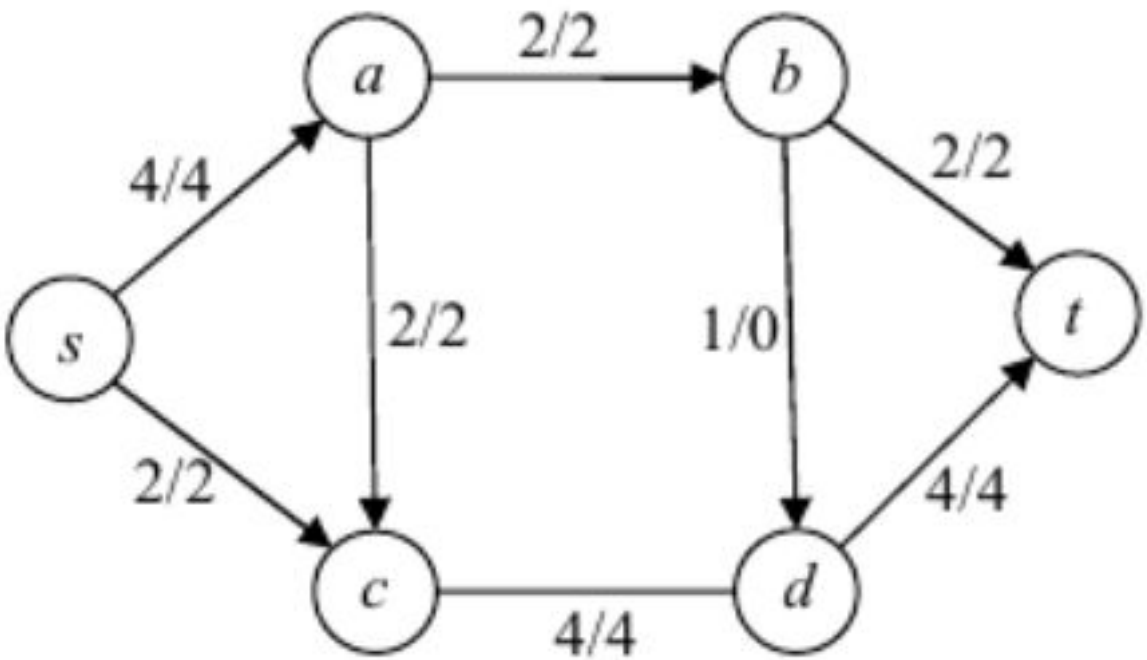




Поток на рисунке 1 не является максимальным – можно, например, добавить по единице на ребрах пути s,a,c,d,t . Получится поток величины 5, показанный на рисунке 2.

Дуга сети называется ***насыщенной***, если поток по этой дуге равен пропускной способности этой дуги.

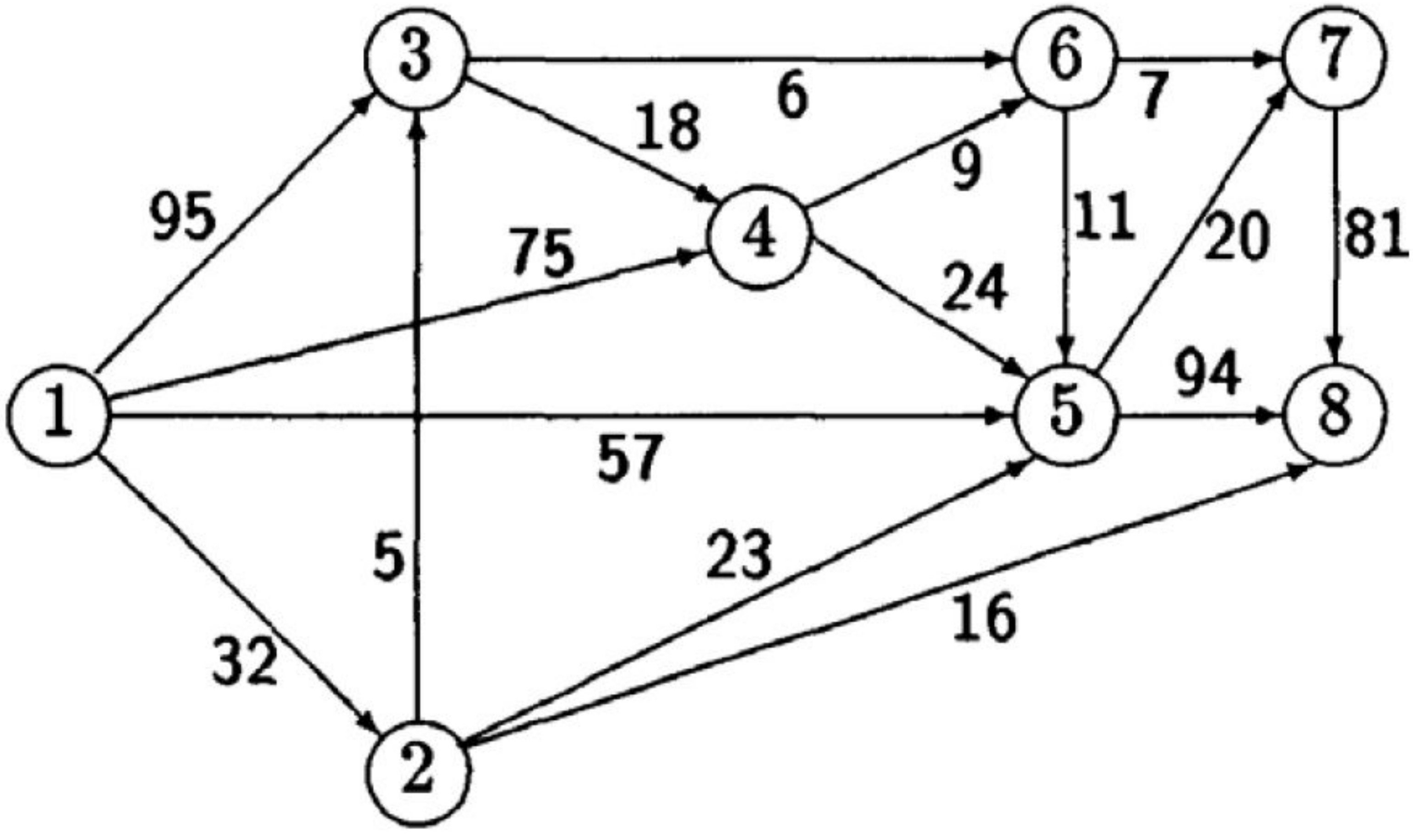
Но и он не максимален. Можно увеличить поток на 1 на ребрах (s,c), (c,d), (b,t) и уменьшить на 1 на ребре (b,d). Условие сохранения останется выполненным, а величина потока станет равной 6.



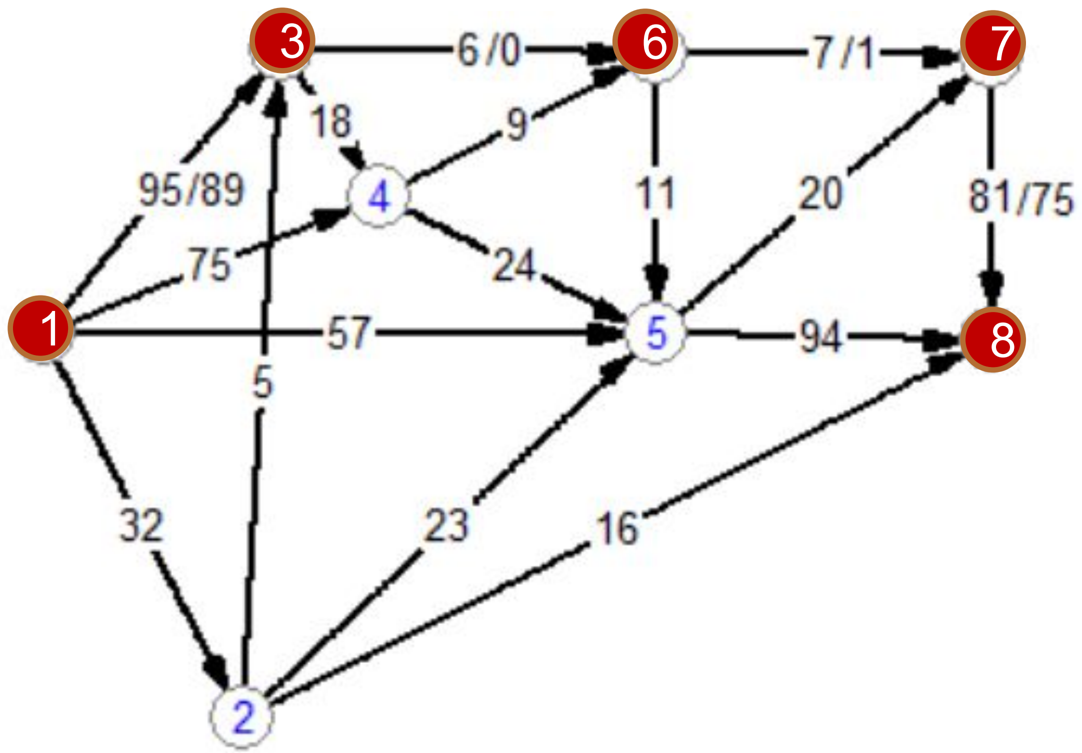
Разрезом сети называется множество дуг, удаление которых из сети приводит к тому, что исток и сток оказываются несвязанными.

АЛГОРИТМ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

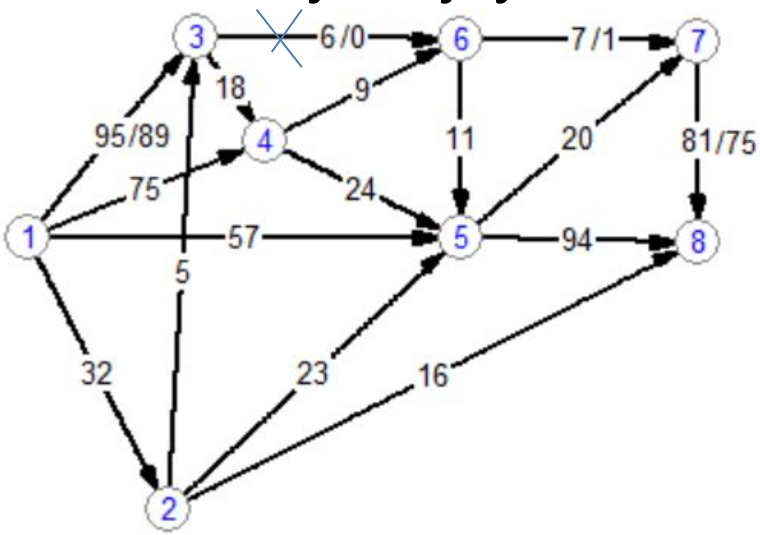
Найти максимальный поток и минимальный разрез в транспортной сети, используя алгоритм Форда–Фалкерсона
Источник – вершина 1, сток – вершина 8.

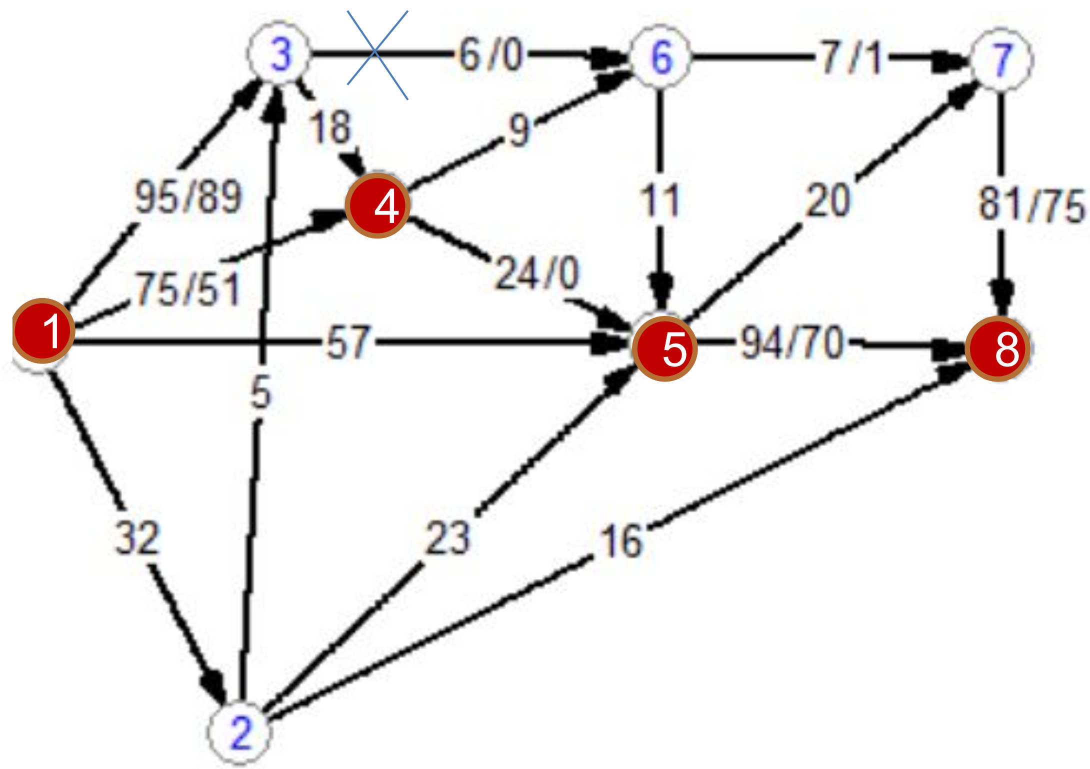


Шаг 1. Выбираем произвольный путь: ***1-3-6-7-8***.
Его пропускная способность равна ***минимальной*** из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть **6**.
Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 6, насыщенную дугу 3-6 вычеркиваем.

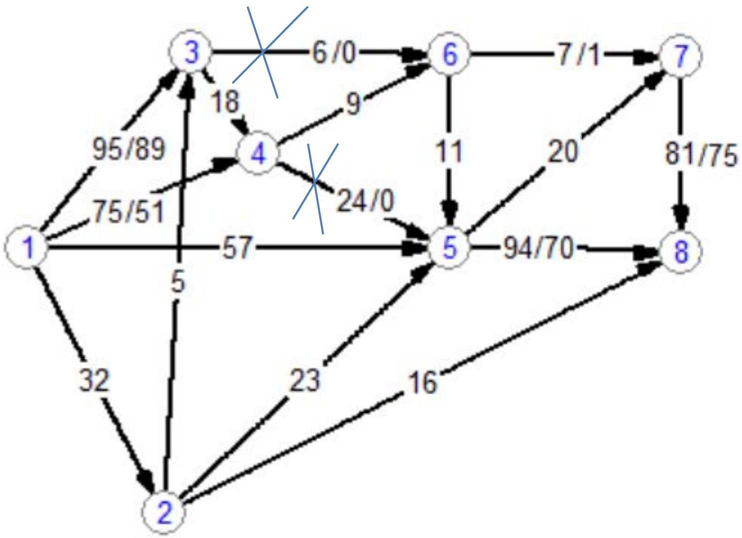


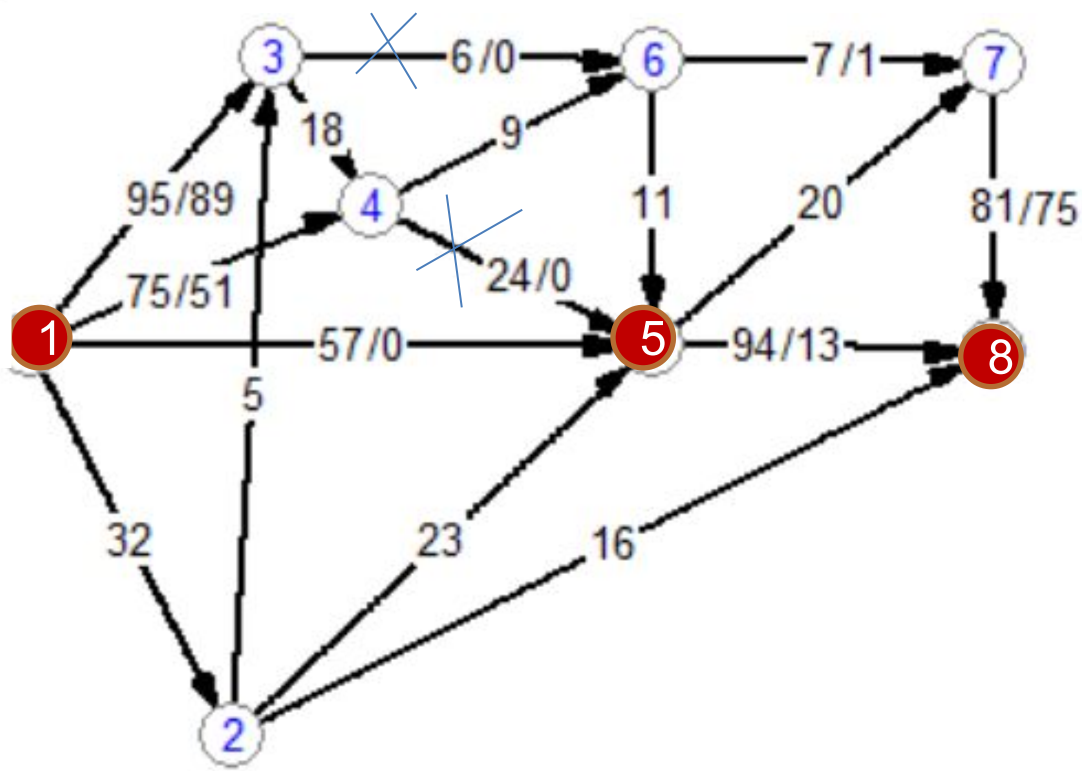
Шаг 2. Выбираем произвольный путь: ***1-4-5-8***.
Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть ***24***.
Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 24, насыщенную дугу 4-5 вычеркиваем



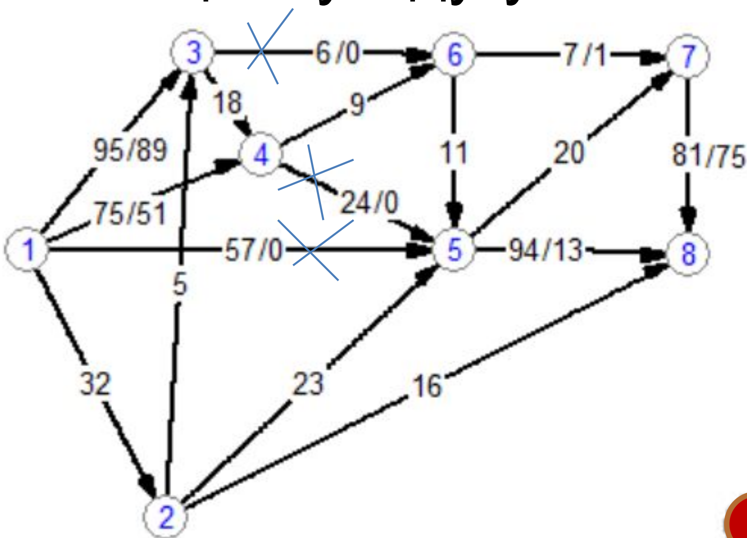


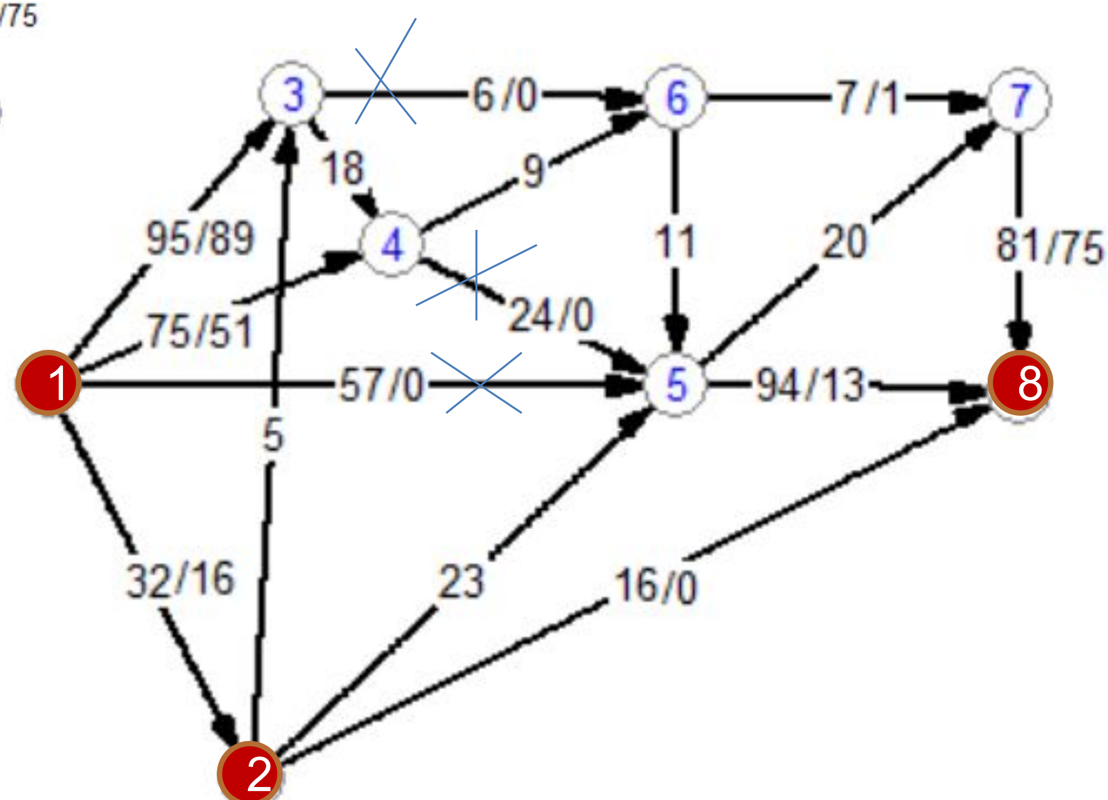
Шаг 3. Выбираем произвольный поток, 1-5-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 57. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 57, насыщенную дугу 1-5 вычеркиваем.



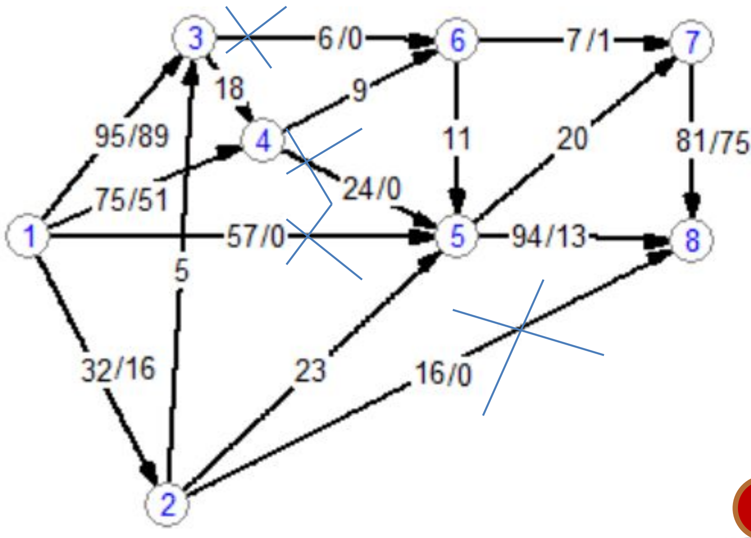


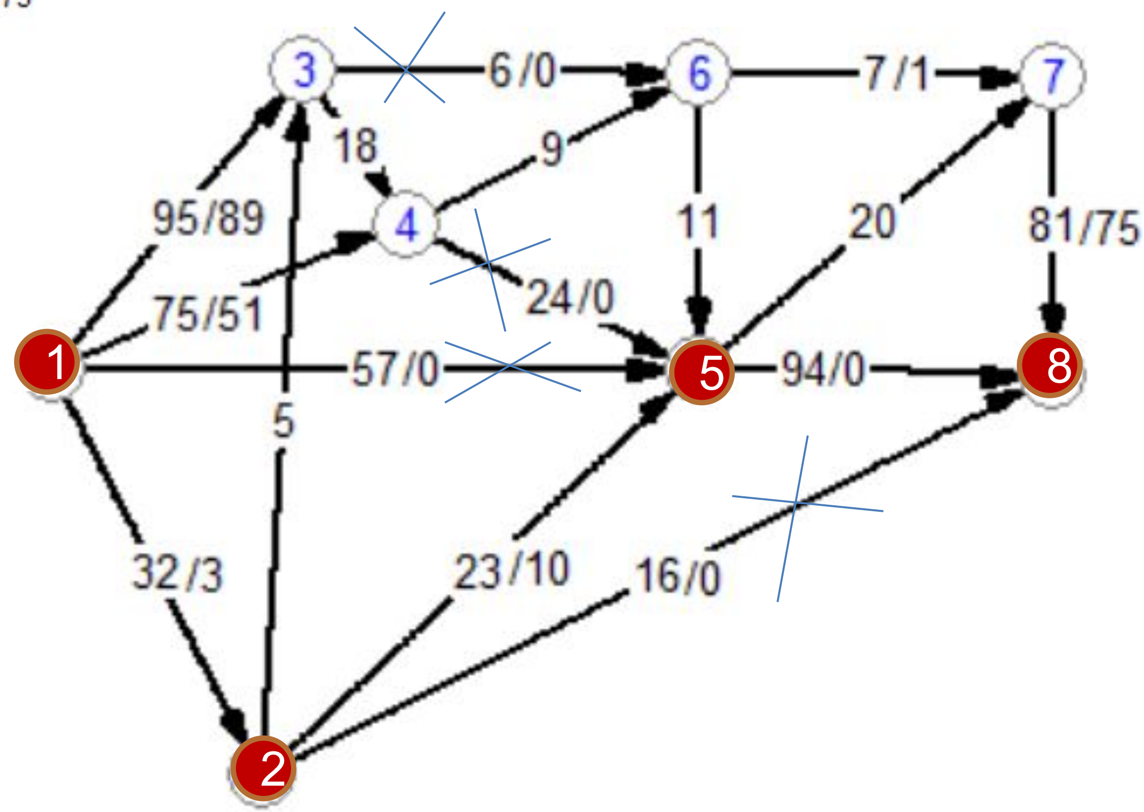
Шаг 4. Выбираем произвольный поток, 1-2-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 16. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 16, насыщенную дугу 2-8 вычеркиваем.



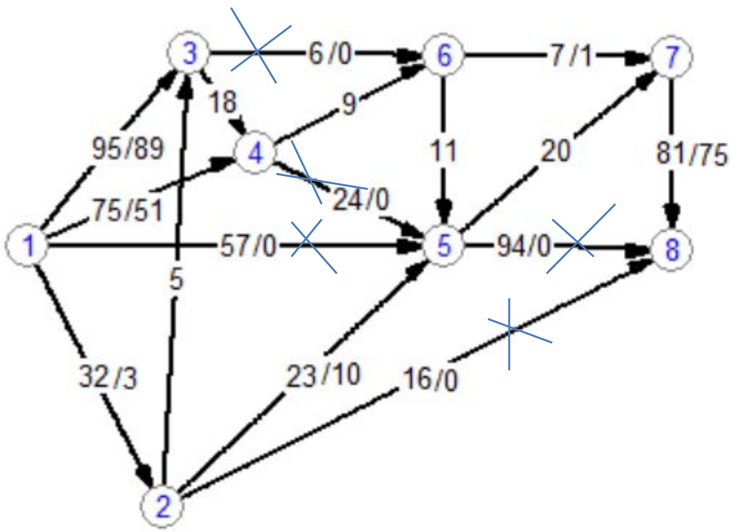


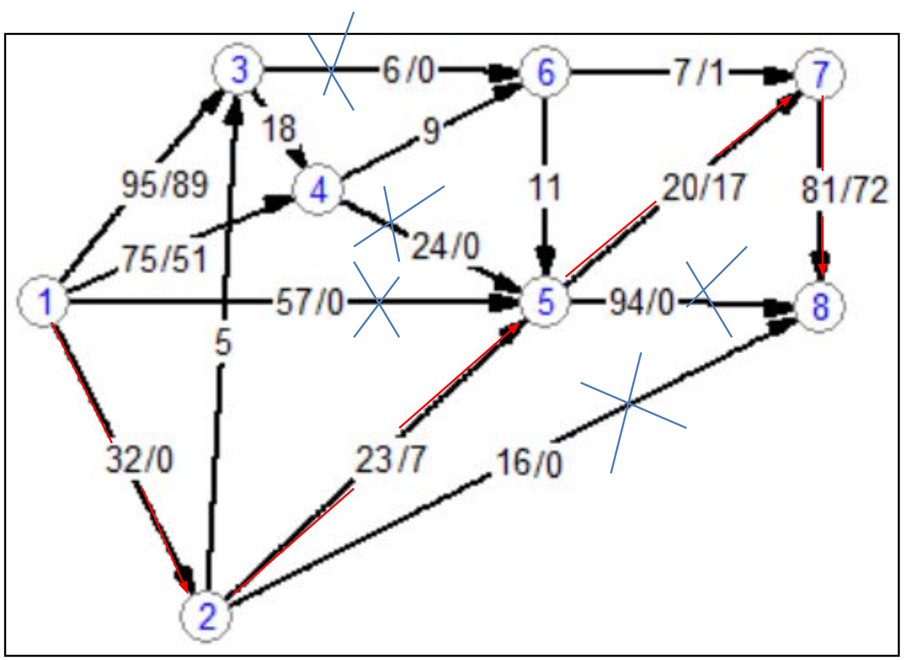
Шаг 5. Выбираем произвольный поток, 1-2-5-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 13. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 13, насыщенную дугу 5-8 вычеркиваем.



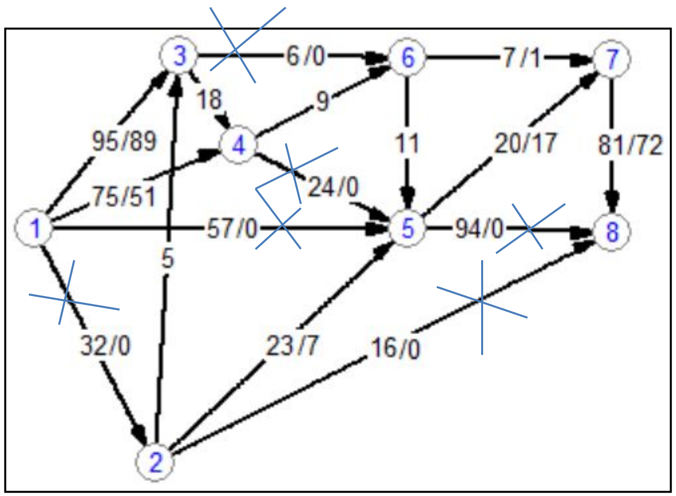


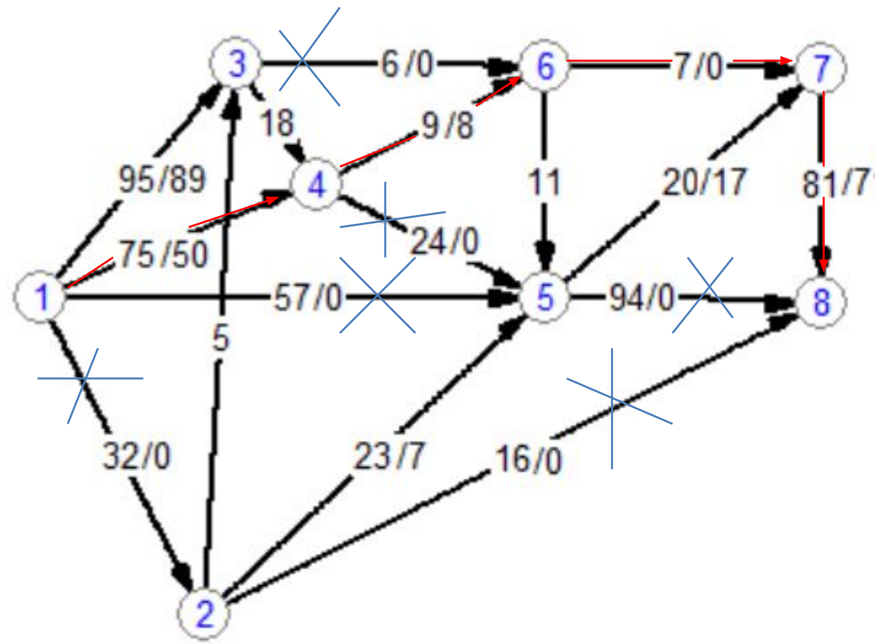
Шаг 6. Выбираем произвольный поток, 1-2-5-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 3. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 3, насыщенную дугу 1-2 вычеркиваем.



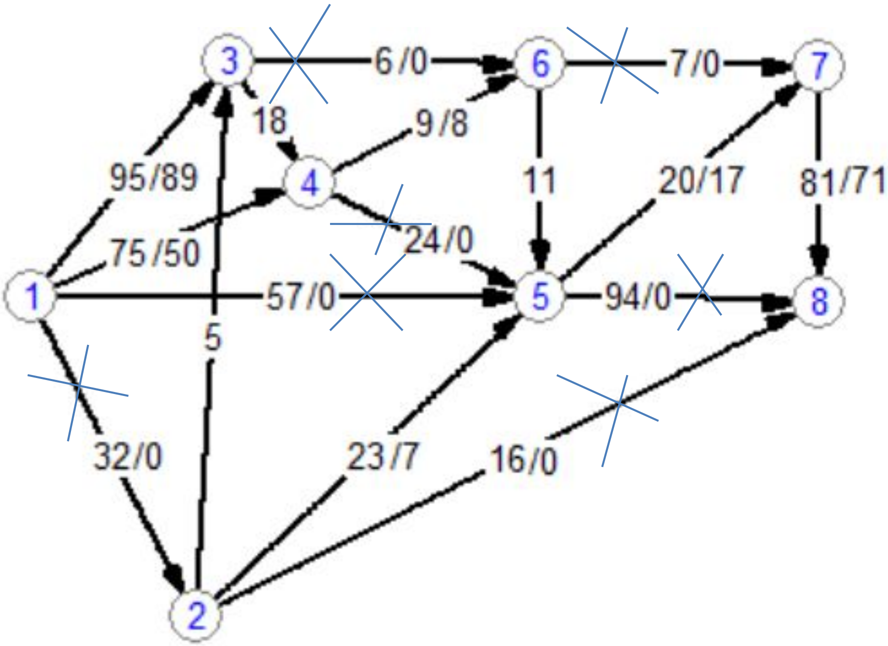


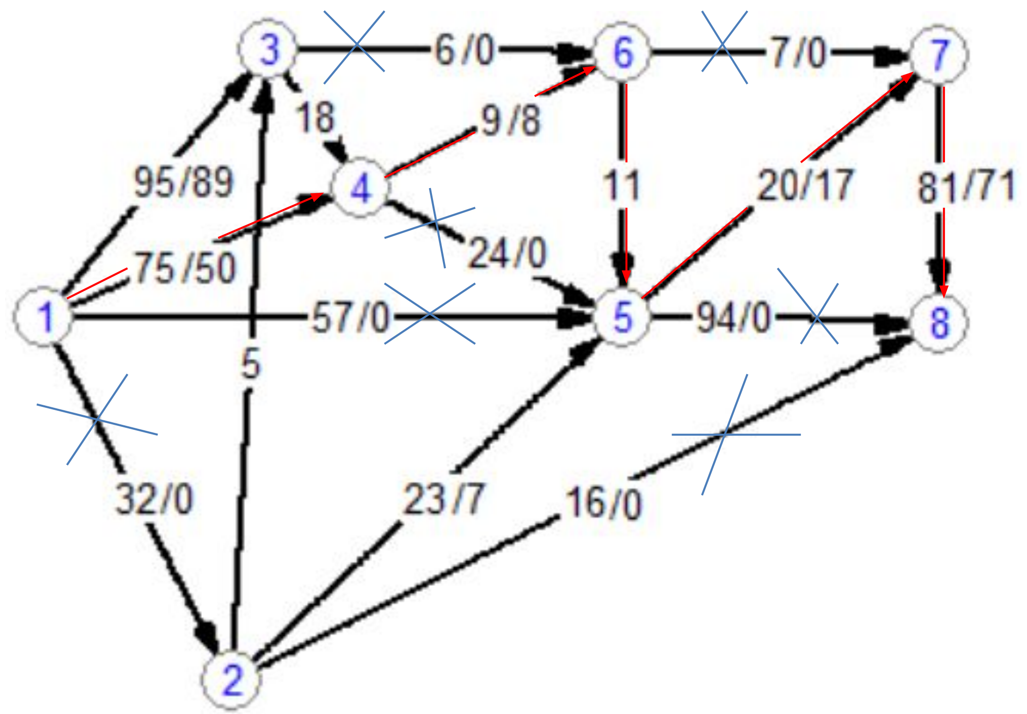
Шаг 7. Выбираем произвольный поток, 1-4-6-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 1. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 1, насыщенную дугу 6-7 вычеркиваем.



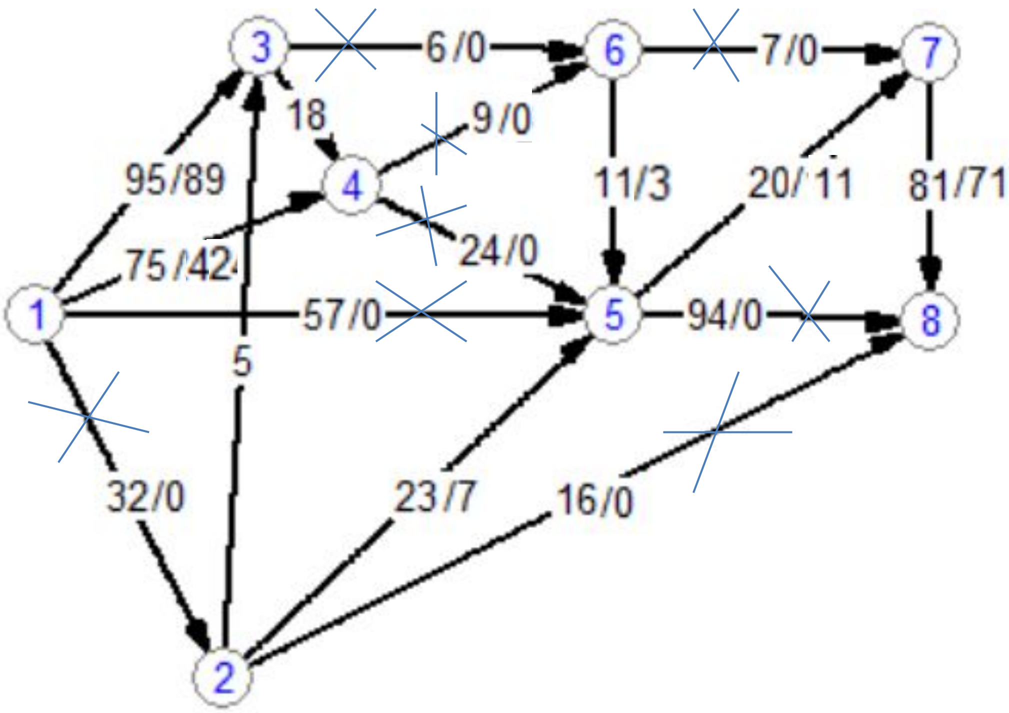


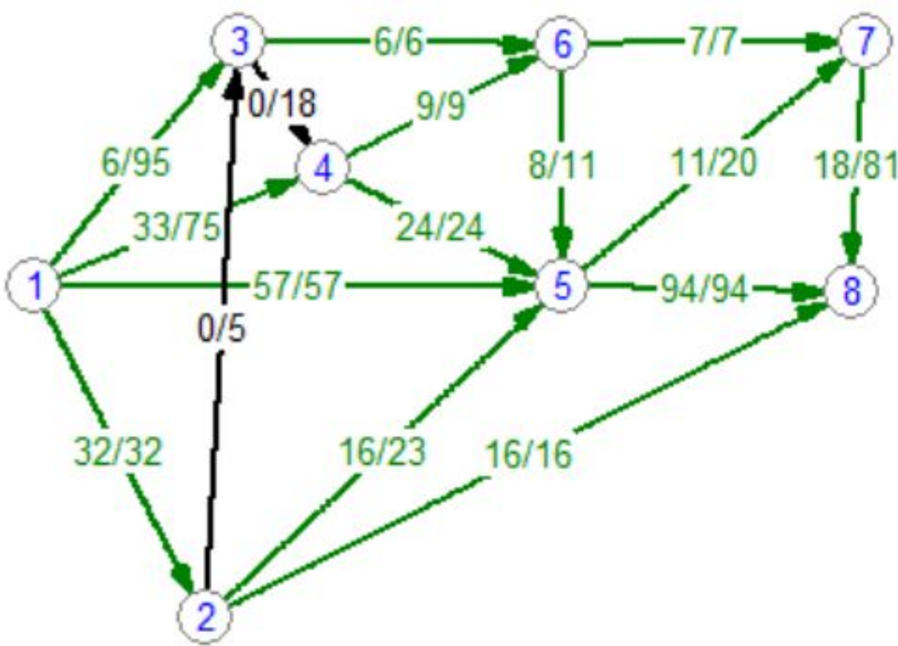
Шаг 8. Выбираем произвольный поток, 1-4-6-5-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 8. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 8, насыщенную дугу 4-6 вычеркиваем.

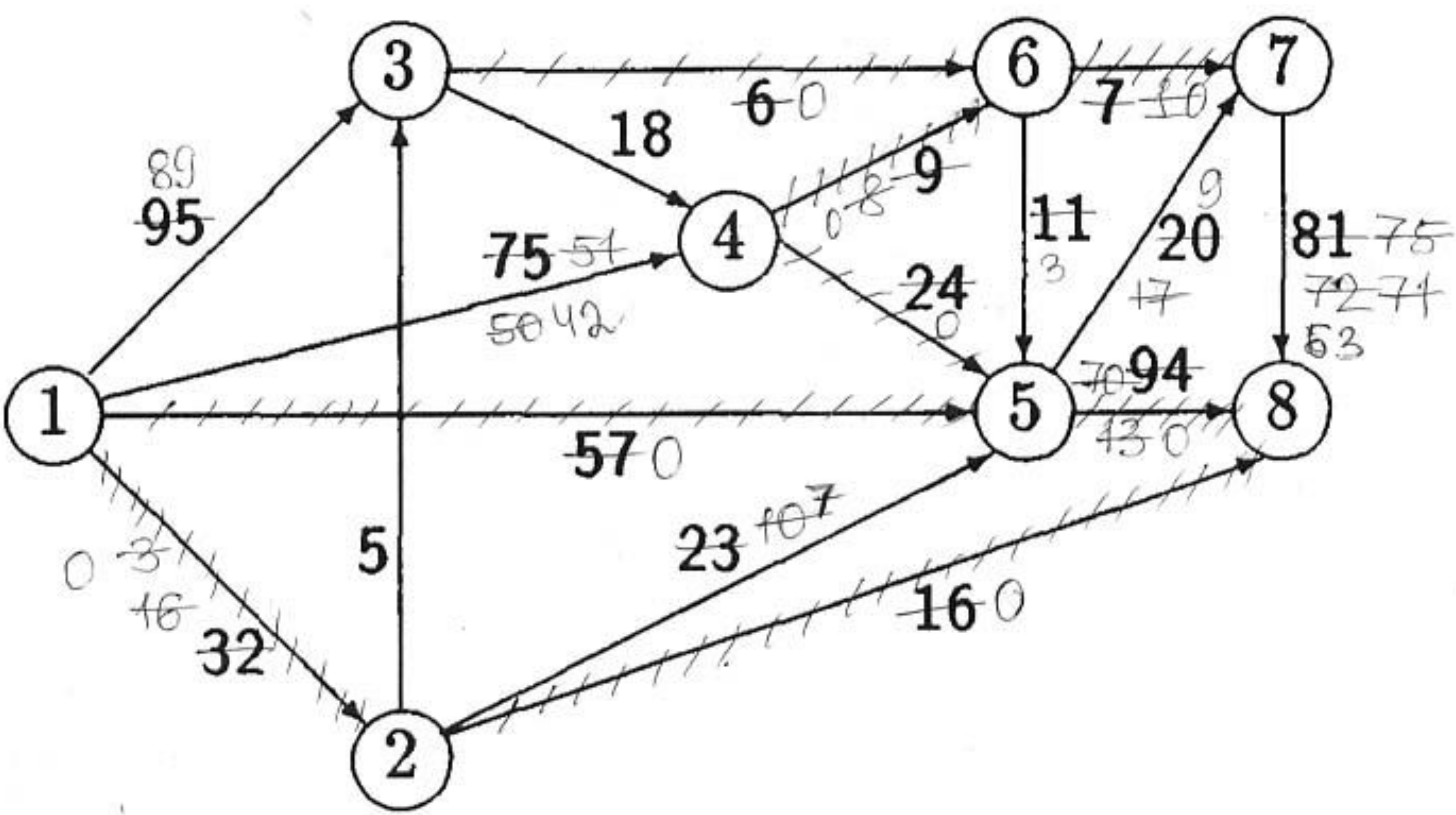




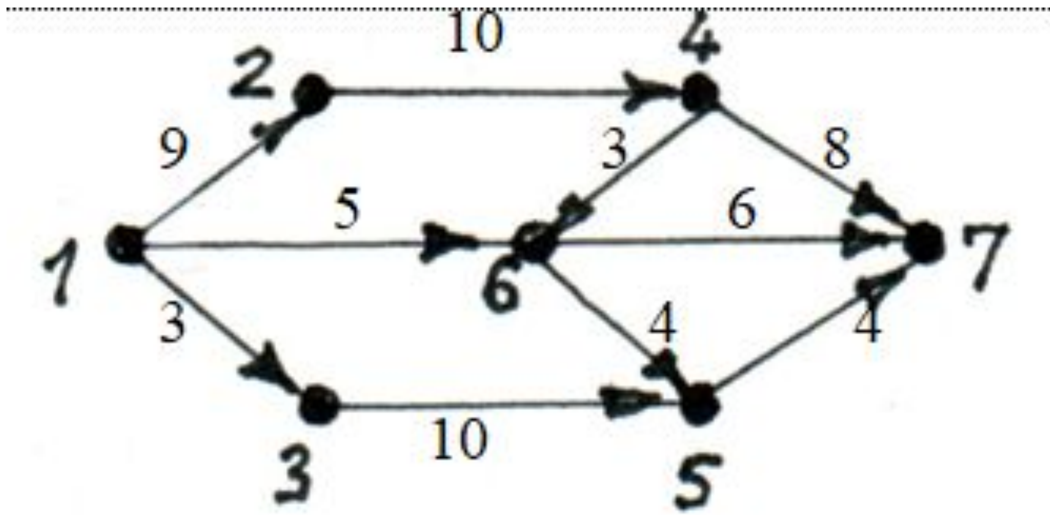
Больше путей нет. Суммарный поток 6+24+57+16+13+3+1+8=128



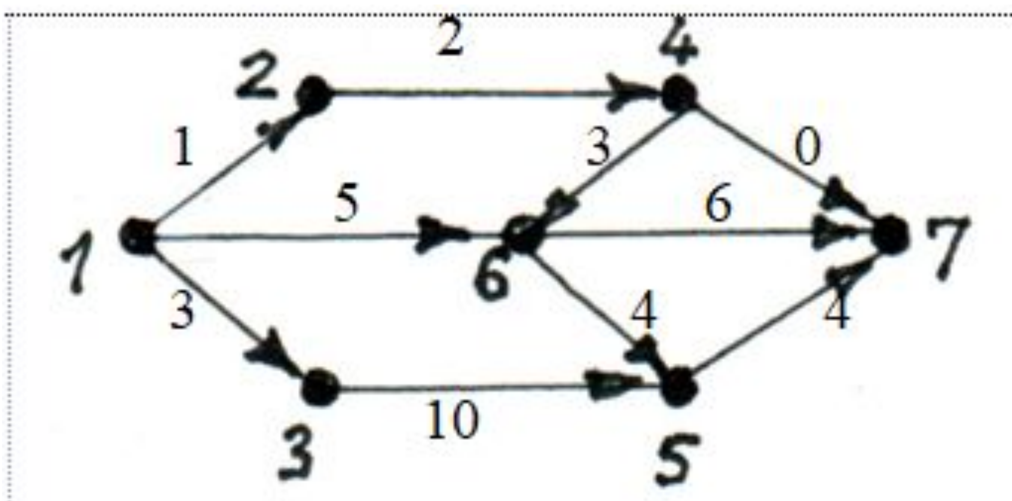




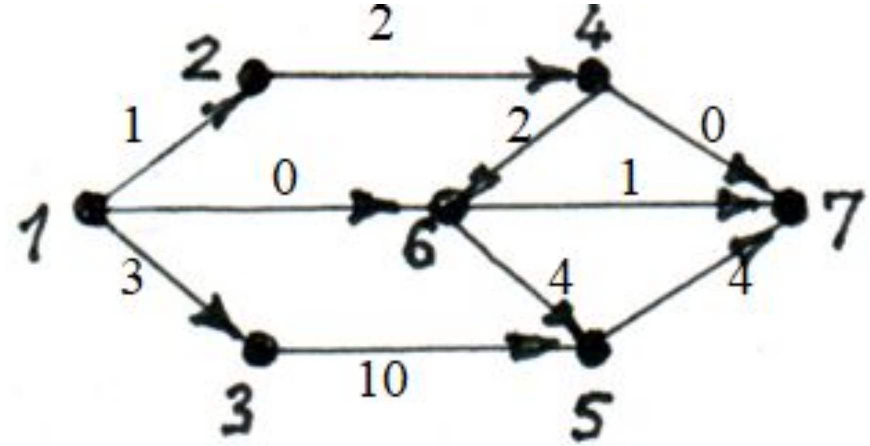
1
2
3
4
5
6
7
8
95 89
75 51
50 42
57 0
32 16 3 0
5
18
6 0
9 8 0
24 0
11 3
20 17 9
7 10
81 75
72 71
63
70 94
13 0
23 10 7
16 0



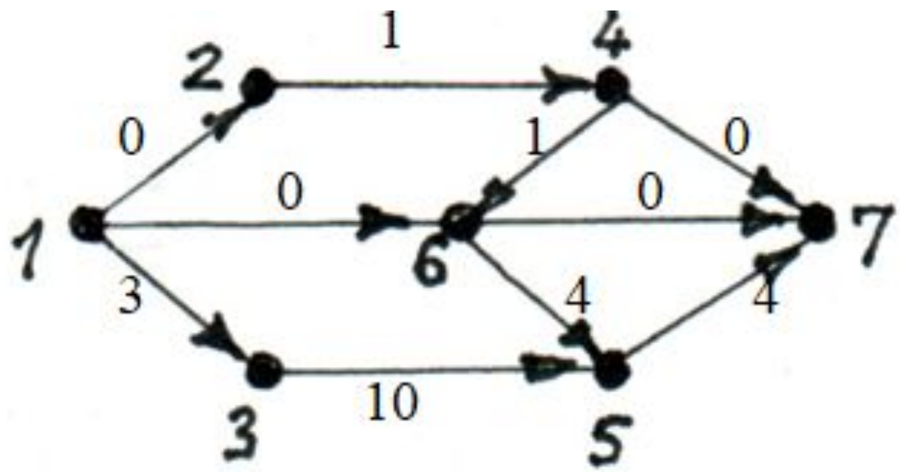
Шаг 1: Выбираем произвольный путь: ***1-2-4-7***. Поток по этому пути равен минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть **8**. Вычитаем 8 из пропускных способностей дуг этого потока. Дуга 4-7 насыщенная



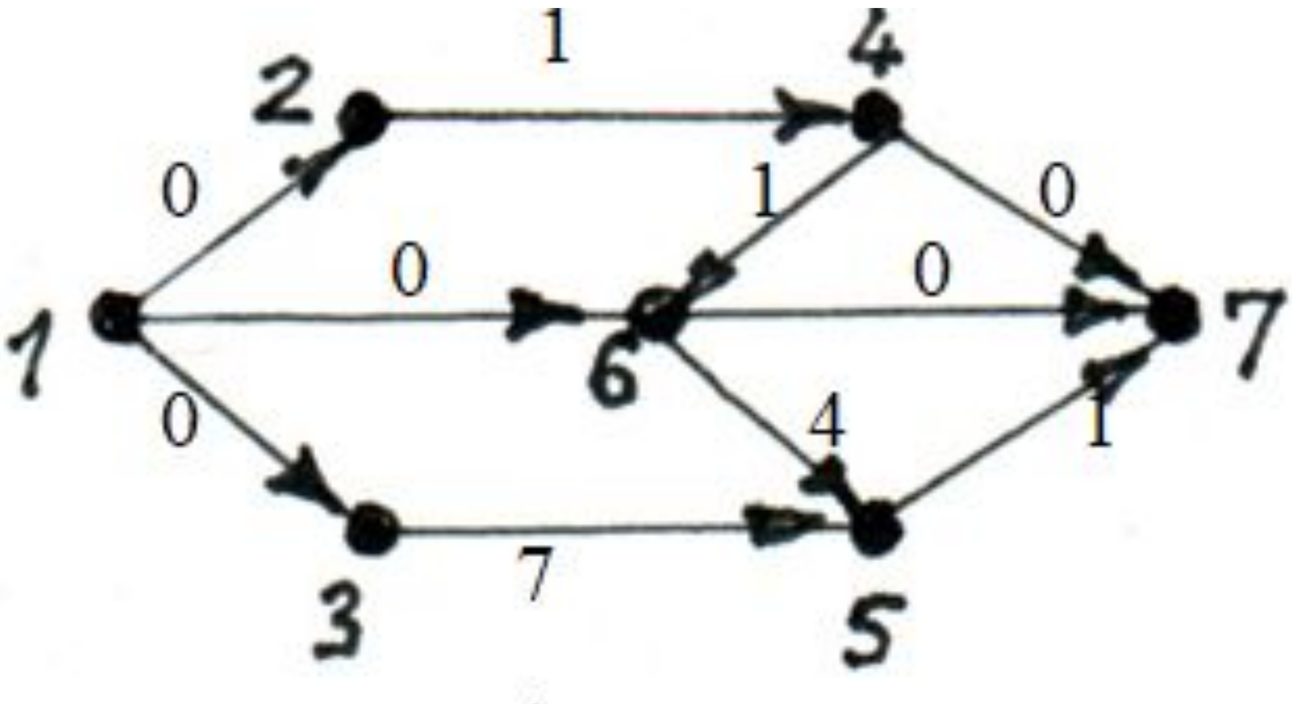
Шаг 2. Выбираем произвольный путь: ***1-6-7***. Поток по этому пути равен **5**. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 5. Дуга 1-6 насыщенная



Шаг 3. Выбираем произвольный путь: ***1-2-4-6-7***. Поток по этому пути равен **1**. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 1. Дуги 1-2, 6-7 насыщенные



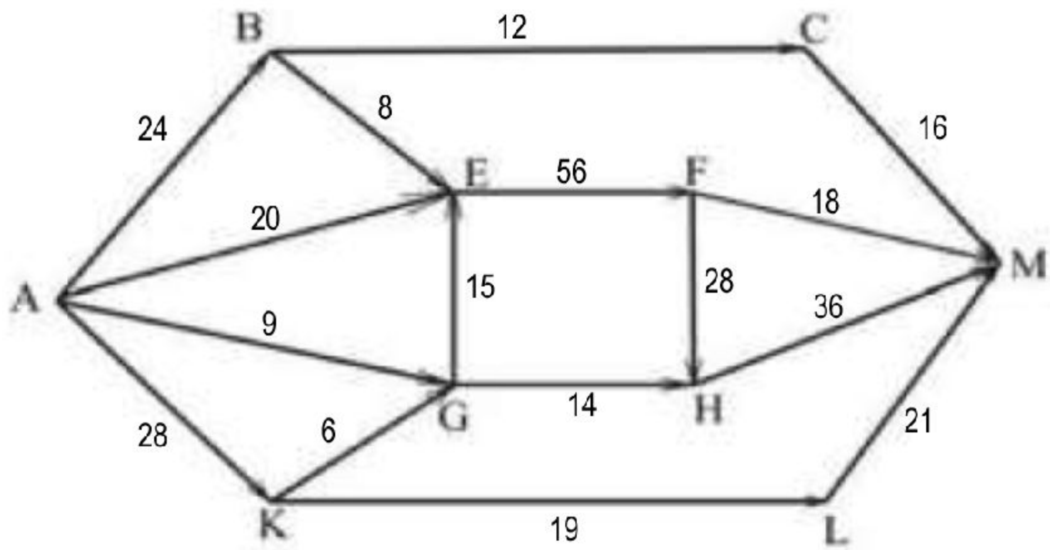
Шаг 4. Выбираем произвольный путь: ***1-3-5-7***. Поток по этому пути равен **3**. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 3. Дуга 1-3 насыщенная

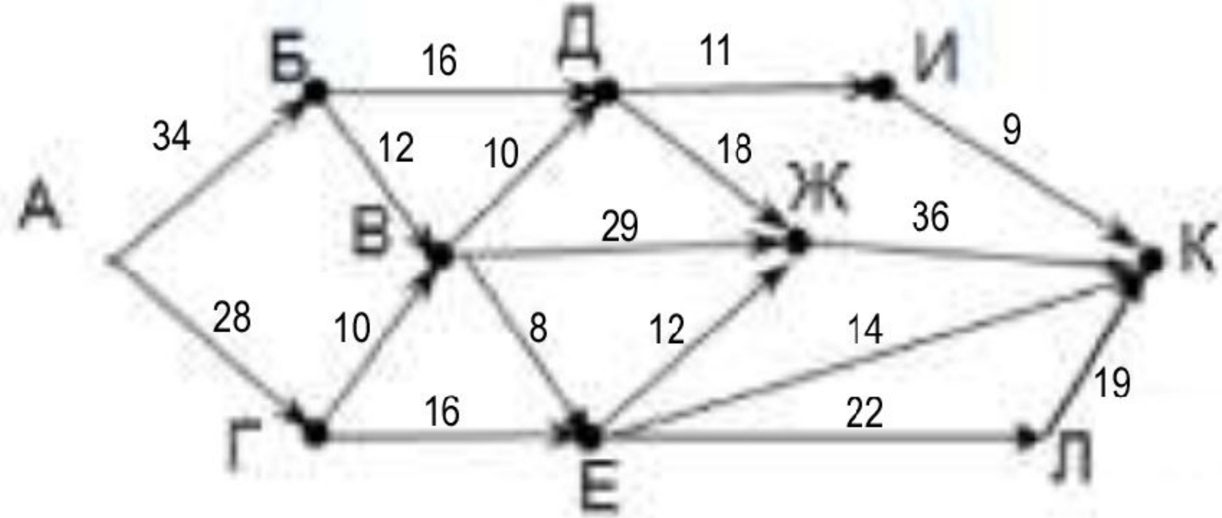


Суммарный поток по все путям равен:

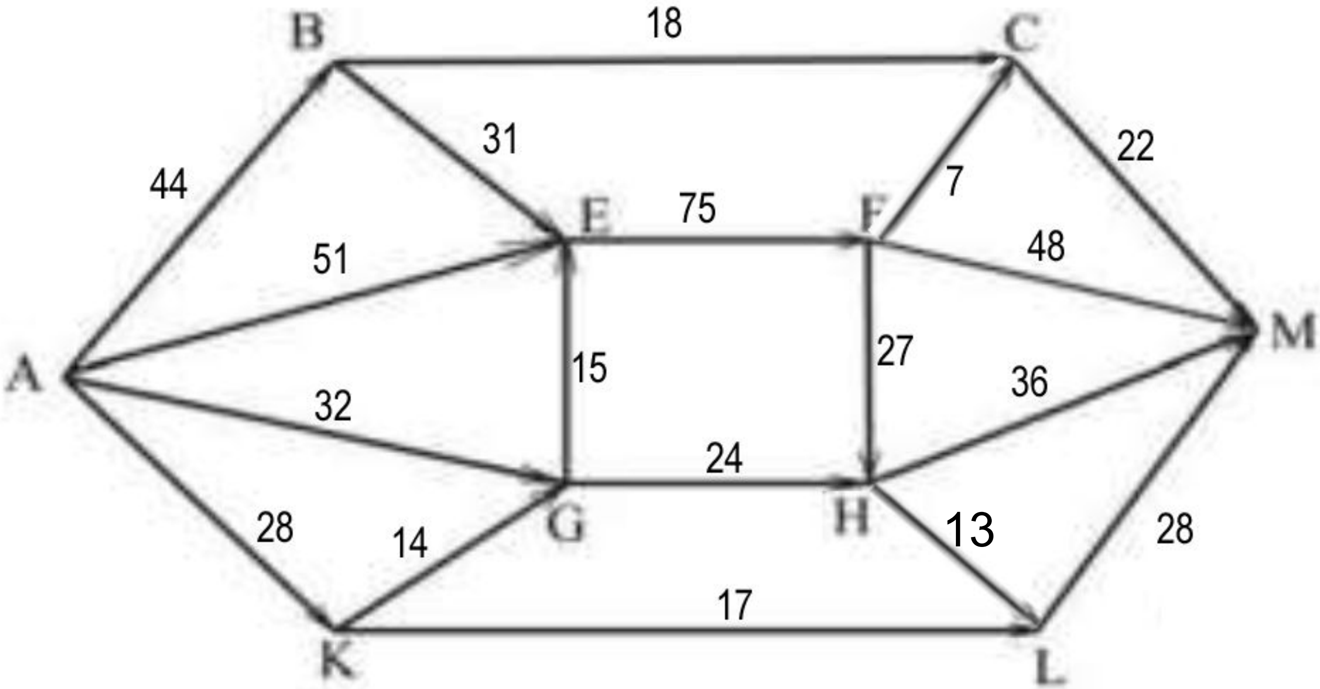
8 + 5 + 1+ 3 = 17

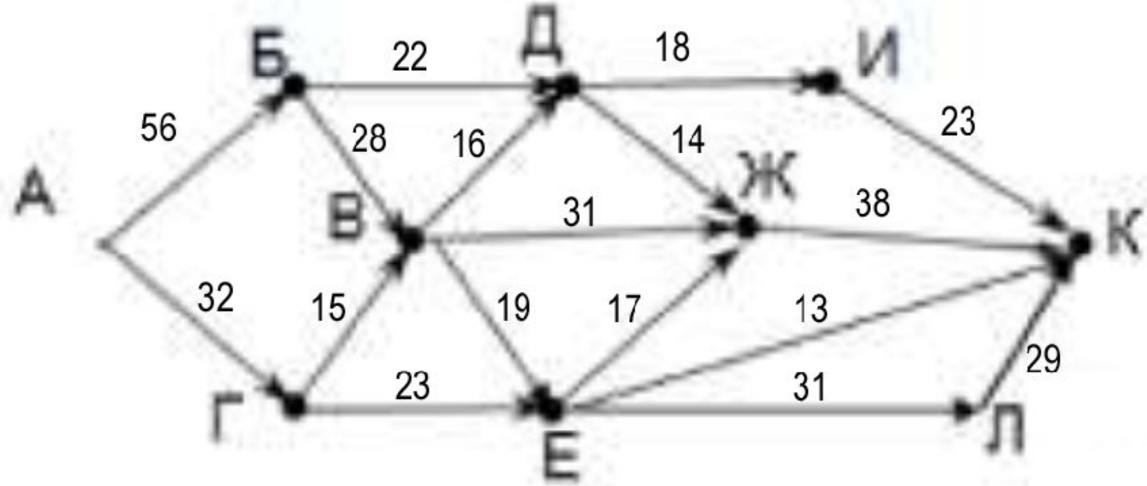
Нахождение максимального потока. Примеры.





Нахождение максимального потока. Примеры.





Источники информации

- [Программирование, компьютеры и сети https://progr-system.ru/](https://progr-system.ru/)

Благодарю за внимание!