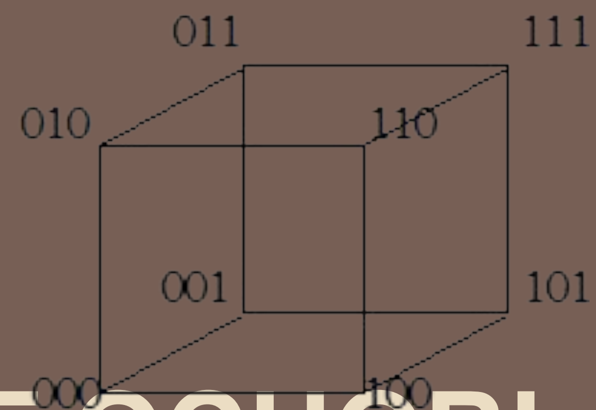
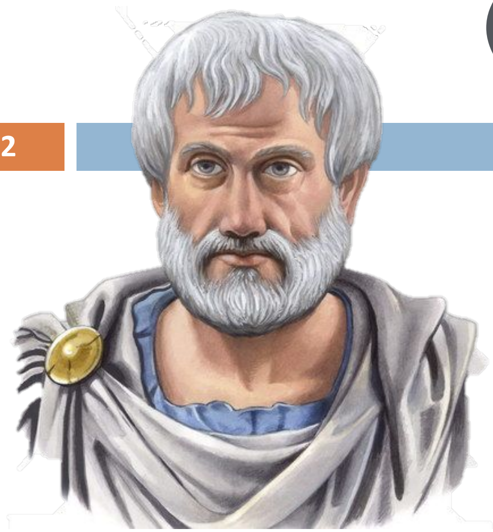


ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

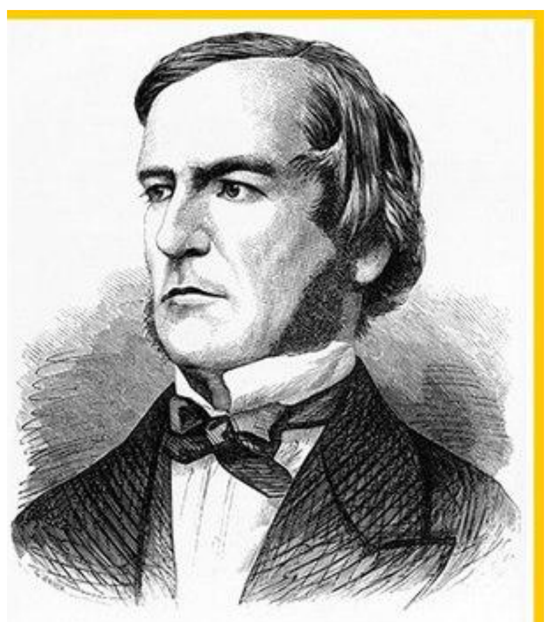
2016

Парамонов А.И.

Аристотель
(384— 322 гг. до н. э.)



Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646-1716)



Джордж Буль
(1815 – 1864)

Основные понятия алгебры логики

- **АЛГЕБРА ЛОГИКИ** – математический аппарат, с помощью которого записывают (кодируют), упрощают, вычисляют и преобразовывают *логические высказывания*.

- **Логическое высказывание** – любое утверждение, в отношении которого можно сказать *истинно* оно или

Логическая (двоичная, булева) переменная

— это такая переменная, которая может принимать одно из двух значений: **истина** или **ложь** (**1 (единица)** или **0 (ноль)**, **да** или **нет**).

Логические переменные выступают аргументами логических функций.

Логическая константа

— это такая постоянная величина, значением которой может быть **истинно** или **ложно** (**да** или **нет**, **единица** или **ноль**).

Логическая функция

— это такая функция, которая может принимать одно из двух значений: **истинно** или **ложно** (**да** или **нет**, **единица** или **ноль**) в зависимости от текущих значений ее аргументов, в качестве которых используются *логические переменные*.

Логическая (булева, *переключательная*) **функция f**, зависящая от **n** переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, принимает значения только ***0*** или ***1***.

Булева функция – это функция, аргументы и значение которой принадлежат множеству {0, 1}.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Логическая функция может быть одного (n = 1) или нескольких (n > 1) аргументов.

- Значение логической функции определяется комбинацией конкретных значений переменных, от которых она зависит.
- Комбинация конкретных значений переменных (аргументов функции) называется ***набором***.
- Количество различных наборов *(N)* для «*n*» переменных вычисляется по формуле $\mathbf{N = 2^n}$.

Булеву функцию от **n** переменных можно рассматривать как n-местную алгебраическую операцию на множестве ***B={0,1}***.

При этом алгебра ***<B;Ω>***, где **Ω** – множество всевозможных булевых функций, называется ***алгеброй логики*** (*или*, **булевой алгеброй**).

Способы задания булевых функций

- словесным описанием;
- таблицей истинности;
- логическим выражением.

Используется в случае сравнительно несложной логической функции

Таблица истинности

- *является универсальным средством задания логической функции.*
- Включает все наборы для заданного количества переменных, определяющих значение логической функции, с указанием значений, которые примет функция для каждого набора.
- В одной таблице истинности может задаваться несколько логических функций, зависящих от одних и тех же переменных.

Табличный способ предполагает, что в левой части будут записаны все возможные двоичные наборы длины **n** (комбинации значений переменных $\mathbf{x_1, x_2, \ldots x_n}$), а в правой части будут представлены значения функций на этих наборах.

Пример таблицы истинности трех переменных

№	x_1	x_2	x_3	y_1				
0	0	0	0	0				
				1	1			
				1				
			1	0				
				1				
				0	0			
				0				
				1	1	0		1

Значения функций для каждого набора

ых

логических переменных

Двоичные наборы удобно представлять «**номером набора**»

(целое десятичное число)

- Логическая функция называется «***полностью определенной***», если для нее заданы значения по всем возможным наборам.
- Функция называется «***частично определенной***», если для некоторых наборов значения функции не заданы.

Максимальное количество полностью определенных функций от «***n***» переменных определяется как $M = (2^{2})^{n}$

Пример таблицы истинности трех переменных

№	x_1	x_2	x_3					y_n
0	0	0	0					***0***
1	0	0	1					***1***
2	0	1	0	***1***	***1***	***1***		***0***
3	0	1	1	***0***	***1***	***0***		–
4	1	0	0	***1***	***0***	***1***		***0***
5	1	0	1	***0***	***0***	***0***		***1***
6	1	1	0	***0***	***0***	***1***		–
7	1	1	1	***1***	***1***	***0***		***1***

– означает неопределенность значения функции

Булевы функции от большого числа переменных таблицей истинности задавать сложно (*громоздко*).

Например,
Для функции от 8 логических переменных необходимо $\mathbf{2^8 = 256}$ двоичных наборов.

Для представления функций многих переменных удобно использовать **модификацию таблицы истинности**.

$x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$	$x_j, x_{j+1}, \dots, x_n$			
	00...0	00...1	...	11...1
00...0	0	1	...	1
00...1	1	0	...	0
...	...	...	...	
11...1	1	0		1

При аналитическом способе задания булевой функции используется формула, т.е. *аналитическое выражение,* построенное из операций булевой алгебры.

Логическое выражение

– комбинация логических переменных и констант, связанных элементарными базовыми логическими функциями (*или логическими операциями*), которые могут разделяться скобками.

Набор элементарных логических операций, с помощью которых можно задать любую, сколь угодно сложную логическую функцию, называется ***функционально полной системой логических функций*** (ФПСЛФ).

Иногда такую систему называют **базисом**.

В качестве элементарных логических функций *функционально полных систем* этих функций используются функции одной или двух логических переменных.

Функции одной переменной

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$y_0 = 0$ – константа;

y_1 равна значению переменной x;

y_2 равна значению, обратному значению переменной x;

$y_3 = 1$ – константа.

Функции одной переменной

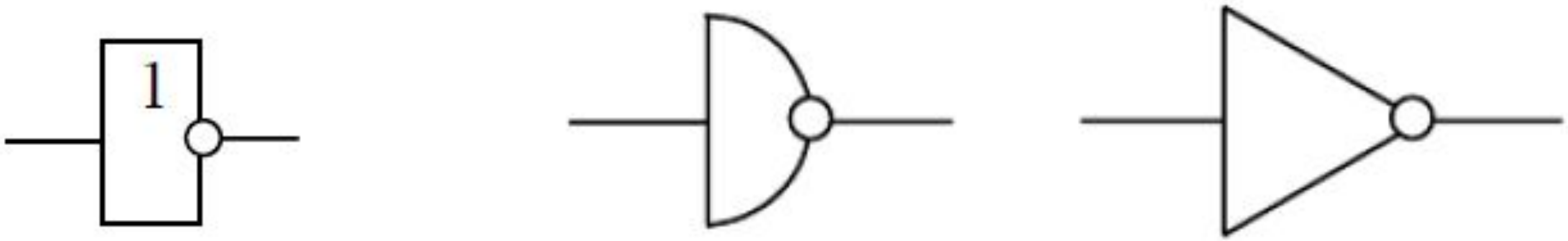
x	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

y_2 – *функция отрицания*,

читается как «*не x*» и обозначается как « $\bar{x}$ »,

т. е. можно записать $y2 = \overline{x}$.

Условные графические обозначения (УГО) логических элементов схем



а *б* *в*

Рис. УГО логического элемента НЕ:
а – по ГОСТ и МЭК; *б* – по DIN; *в* – по milspec

Функции двух переменных

№	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

y_i	***Название функции***	***Чтение функции***	
y_0	Const «0»		
y_1	Конъюнкция	и x_1, и x_2	
y_2	Запрет по x_2	неверно, что, если x_1, то x_2	
y_3	$F(x_1)$	функция одной переменной	
y_4	Запрет по x_1	неверно, что, если x_2 , то x_1	
y_5	$F(x_2)$	функция одной переменной	
y_6	Неравнозначности	x_1 не равно x_2	
y_7	Дизъюнкция	или x_1, или x_2	
y_8	Пирса	ни x_1, ни x_2	
y_9	Равнозначности	x_1 равно x_2	
y_{10}	$F(x_2)$	функция одной переменной	
y_{11}	Импликация	если x_2 , то x_1	
y_{12}	$F(x_2)$	функция одной переменной	
y_{13}	Импликация	если x_1, то x_2	

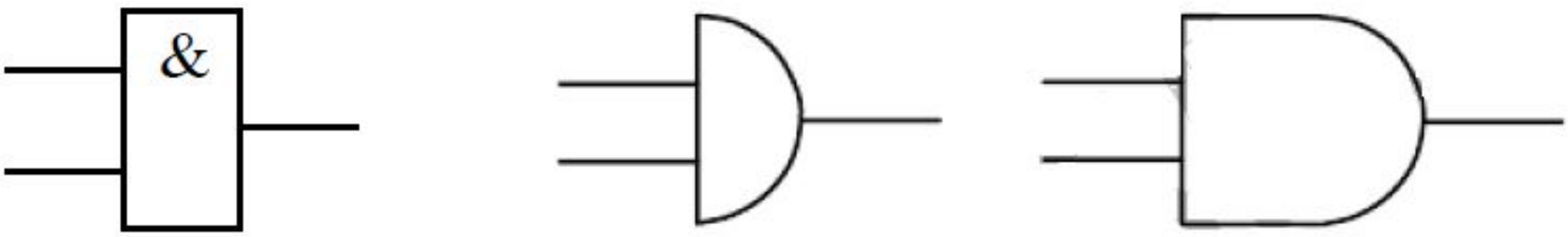
Функции двух переменных

№	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
0	**0**	**0**	0	**0**	0	0	0	0	0	**0**	1	1	1	1	1	1	1	1
1	**0**	**1**	0	**0**	0	0	1	1	1	**1**	0	0	0	0	1	1	1	1
2	**1**	**0**	0	**0**	1	1	0	0	1	**1**	0	0	1	1	0	0	1	1
3	**1**	**1**	0	**1**	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1

y_1 – ***КОНЪЮНКЦИЯ*** («И» или логическое умножение), читается как «**и** x_1 **и** x_2» и обозначается как: «$x_1 \bullet x_2$», «x_1x_2», «x_1 & x_2».

y_7 – ***ДИЗЪЮНКЦИЯ*** («ИЛИ» или логическое сложение), читается как «**или** x_1 **или** x_2» и обозначается как «$x_1 + x_2$».

Условные графические обозначения (УГО) логических элементов схем



а *б* *в*

Рис. УГО логического элемента И:
а – по ГОСТ и МЭК; *б* – по DIN; *в* – по milspec

Условные графические обозначения (УГО) логических элементов схем

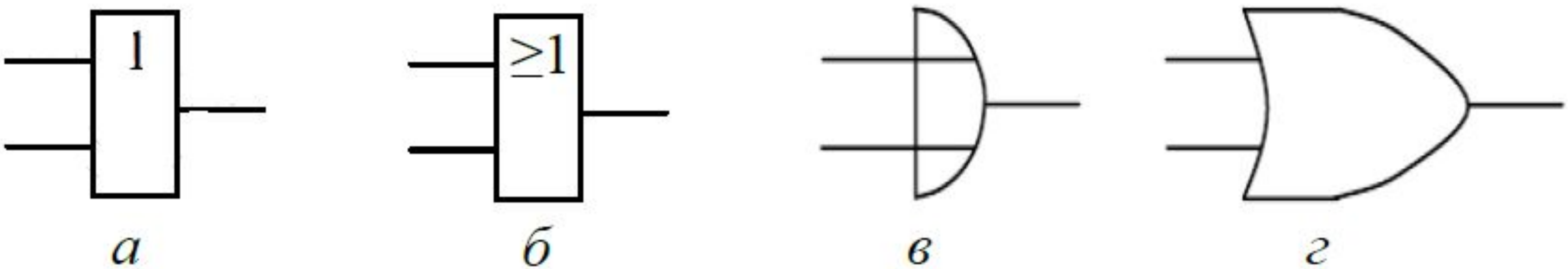


Рис. УГО логического элемента ИЛИ:
а – по ГОСТ; *б* – по МЭК; *в* – по DIN; *г* – по milspec

Наиболее распространенной в алгебре логики является *ФПСЛФ*, которая в качестве базовых логических функций использует функцию одной переменной «НЕ» (функция отрицания) и две функции двух переменных: «И» (конъюнкция) и «ИЛИ» (дизъюнкция).

Эта система получила название ***система булевых функций***, или ***булевый базис***.

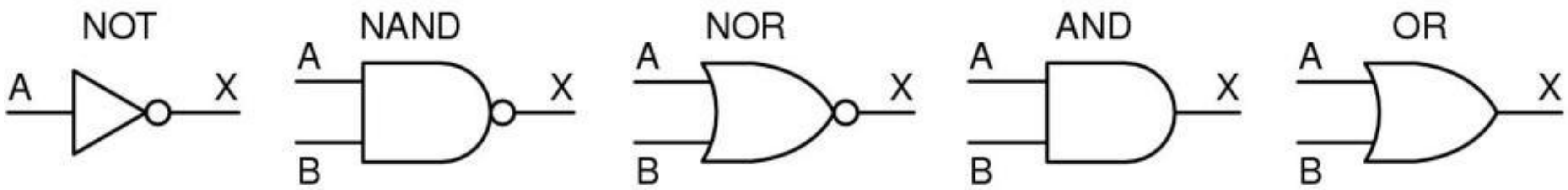
Из всех функций от двух переменных можно выделить еще так называемые «**Стрелка Пирса**» и «**Штрих Шеффера**».

Они выступают как функционально полные системы и могут записываться в следующем виде:

$$y_8 = \overline{x_1 + x_2} = x_1 \downarrow x_2,$$

$$y_{14} = \overline{x_1 x_2} = x_1 | x_2$$

УГО основных элементов базиса по стандарту *milspec806B*



A	X
0	1
1	0

(a)

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b)

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(c)

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(d)

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

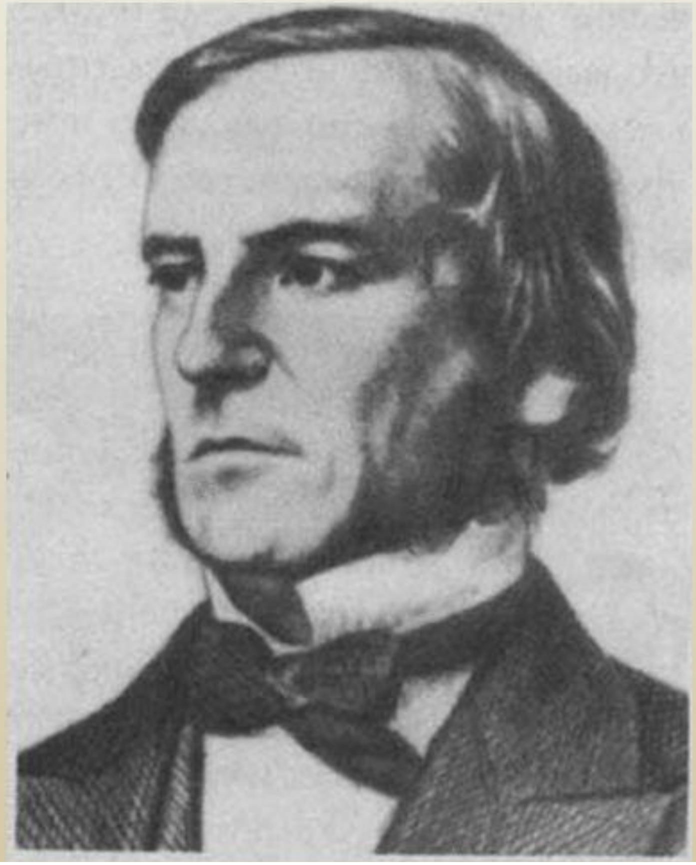
(e)

Булева алгебра

В алгебре логики выделяют целый раздел «***алгебра Буля***», посвященный булевому базису.

В алгебре Буля логические выражения включают логические операции **И**, **ИЛИ**, **НЕ**, которые могут быть использованы в самых различных сочетаниях.

Джордж Буль – создатель алгебры логики



Джордж Буль – английский математик-самоучка (1815-1864г)

- Джордж Буль по праву считается отцом математической логики. Его именем назван раздел математической логики – булева алгебра.

Булева алгебра

При оценке значения логического выражения необходимо решить его для конкретного набора переменных.

В алгебре Буля применяется следующая **приоритетность выполнения операций:**

- сначала рассчитываются значения имеющих место **отрицаний** и **скобок**,
- затем выполняется **операция И**;
- самый низший приоритет у **операции ИЛИ**.

Законы булевой алгебры:

Переместительный (коммутативный)

Закон справедлив и для конъюнкции и для дизъюнкции.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_4 + x_3 + x_2 + x_1$$

от перемены мест логических слагаемых сумма не меняется.

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_4 x_3 x_2 x_1$$

от перемены мест логических сомножителей их произведение не меняется.

Закон справедлив для любого количества логических операндов.

Законы булевой алгебры:

Сочетательный (ассоциативный)

Закон справедлив и для конъюнкции и для дизъюнкции.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_2 + x_3) + x_1 + x_{4.} = (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3)$$

при логическом сложении отдельные слагаемые можно заменить их суммой.

$$x_1\, x_2\, x_3\, x_4 = (x_2\, x_3)\, x_1 x_4 = (x_1\, x_4)\,(x_2\, x_3)$$

при логическом умножении отдельные логические сомножители можно заменить их

Законы булевой алгебры:

Распределительный (дистрибутивный)

$$x_1 + x_2\, x_3 = (x_1 + x_2)\,(x_1 + x_3)$$

дизъюнкция переменной и конъюнкции эквивалентна конъюнкции дизъюнкций этой переменной с сомножителями.

$$(x_1 + x_2)\, x_3 = x_1\, x_3 + x_2\, x_3$$

конъюнкция переменной и дизъюнкции равносильна дизъюнкции конъюнкций этой переменной со слагаемыми.

Законы булевой алгебры:

Закон инверсии (**Правило де Моргана**)

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

отрицание суммы равно произведению отрицаний;

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

отрицание произведения равно сумме отрицаний.

Правило де Моргана **справедливо для любого числа переменных:**

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n},$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}.$$

Законы булевой алгебры:

Закон рефлексивности

$$x \vee x = x;$$
$$x \cdot x = x.$$

Операции с одинаковыми операндами.

Правило повторения (идемпотентности):

$$x_1 + x_1 + x_1 + x_1 + \ldots + x_1 = x_1$$

$$x_1 x_1 x_1 \ldots x_1 = x_1$$

при любом числе повторений.

Законы булевой алгебры:

Закон поглощения

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1;$$
$$x_1 \cdot (x_1 \vee x_2) = x_1;$$

Доказательство:

$$x_1 + (x_1 \bullet x_2) = (x_1 \bullet 1) + (x_1 \bullet x_2) = x_1 \bullet (1 + x_2) = x_1 \bullet 1 = x_1$$

$$x_1 \bullet (x_1 + x_2) = (x_1 \bullet x_1) + (x_1 \bullet x_2) = x_1 + (x_1 \bullet x_2) = x_1$$

Операции:

- **_С отрицаниями._**

$$\overline{x}\cdot x=0,\quad \overline{x}+x=1,$$

$$\overline{\overline{x}}=x$$ – двойное отрицание равносильно отсутствию отрицания

- **_С константами._**

$$x_1+1=1\quad x_1+0=x_1$$

$$x_1\cdot 1=x_1\quad x_1\cdot 0=0$$

- **_Склеивания._**

$$\overline{x}_i\cdot A+x_i\cdot A=A,\quad (\overline{x}_i+A)\cdot(x_i+A)=A$$

где ***A*** – переменная или любое логическое выражение.

Количество переменных в простой конъюнкции называется ***рангом конъюнкции***

Литература по теме:

- Лысиков Б. Г. **Арифметические и логические основы цифровых автоматов** // Минск: Высшая школа, 1980. – 268 с.
- Савелььев А. Я. **Прикладная теория цифровых автоматов**: учебник для вузов по специальности ЭВМ // М.: Высшая школа, 1987. – 462 с.
- Шевелев Ю. П. **Дискретная математика**. Ч. 1: Теория множеств. Булева алгебра Автоматизированная технология обучения «Символ»): Учебное пособие // Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. — 118 с.