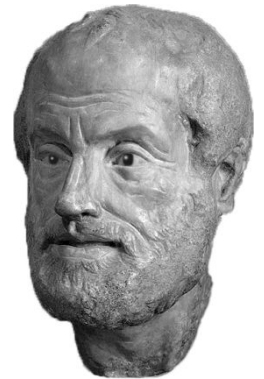


Математическая ЛОГИКА

Логика, высказывания

Логика (др.греч. *λογικός*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель
(384-322 до н.э.)

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

✓ Сейчас идет дождь.

✓ Жирафы летят на север.

~~История – интересный предмет.~~

✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

Красиво!

В городе N живут 2 миллиона человек.

Который час?

Логика и компьютер

двоичная логика

! Любое высказывание может быть **ложно (0)** или **истинно (1)**.

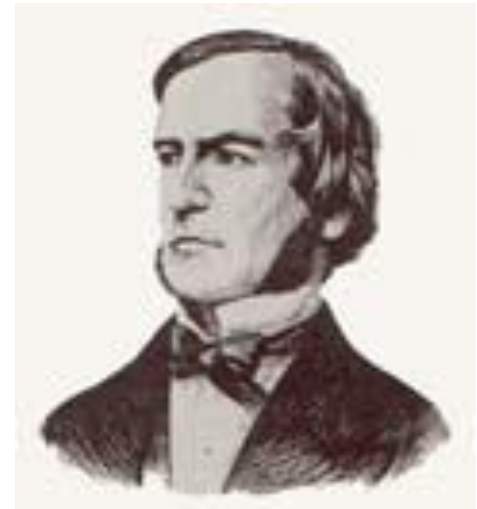
Логика изучает операции между 0 и 1!



! Связь с двоичным кодированием!

Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, упрощают и преобразуют логические высказывания, вычисляют их значения.

Алгебра высказываний,
булева алгебра



Джордж Буль

Простые и составные высказывания

A – Сейчас идет дождь. }
B – Форточка открыта. }

простые
высказывания
(элементарные)

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

A и B Сейчас идет дождь и открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если A, то B Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также \bar{A} , not A

таблица
истинности
операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Разные операции с одной переменной



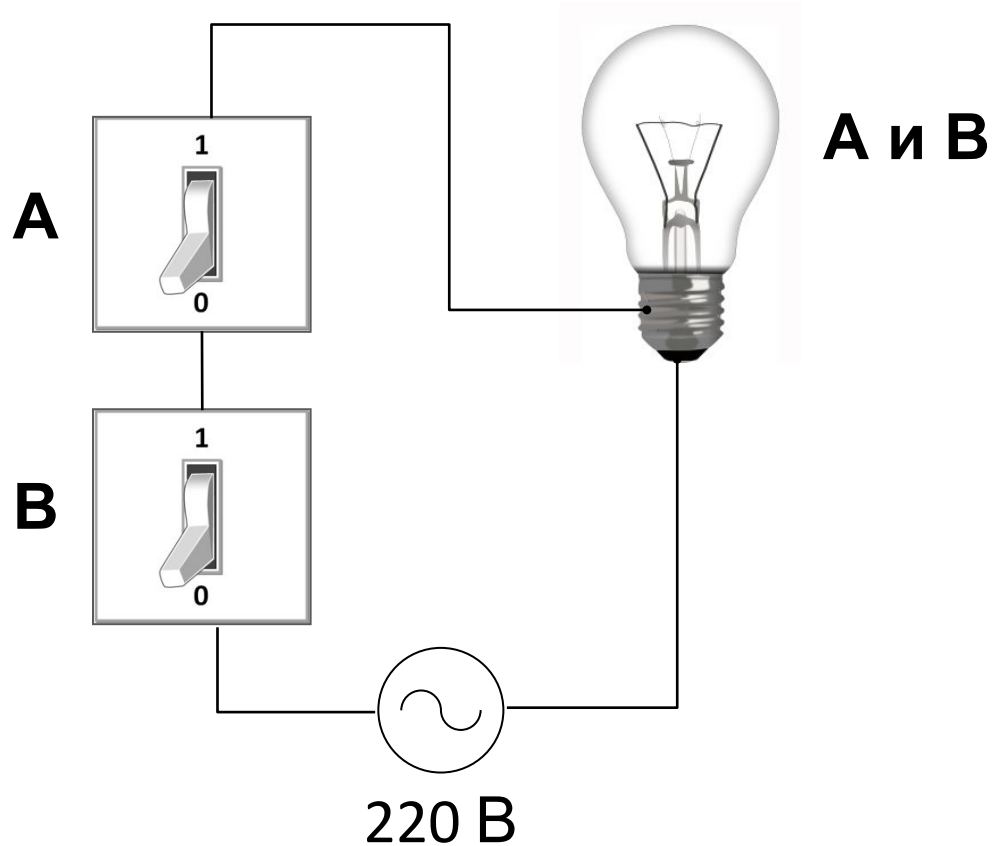
Сколько всего?

$$2^2 = 4$$

A	не A
0	1
1	0

Операция И

Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

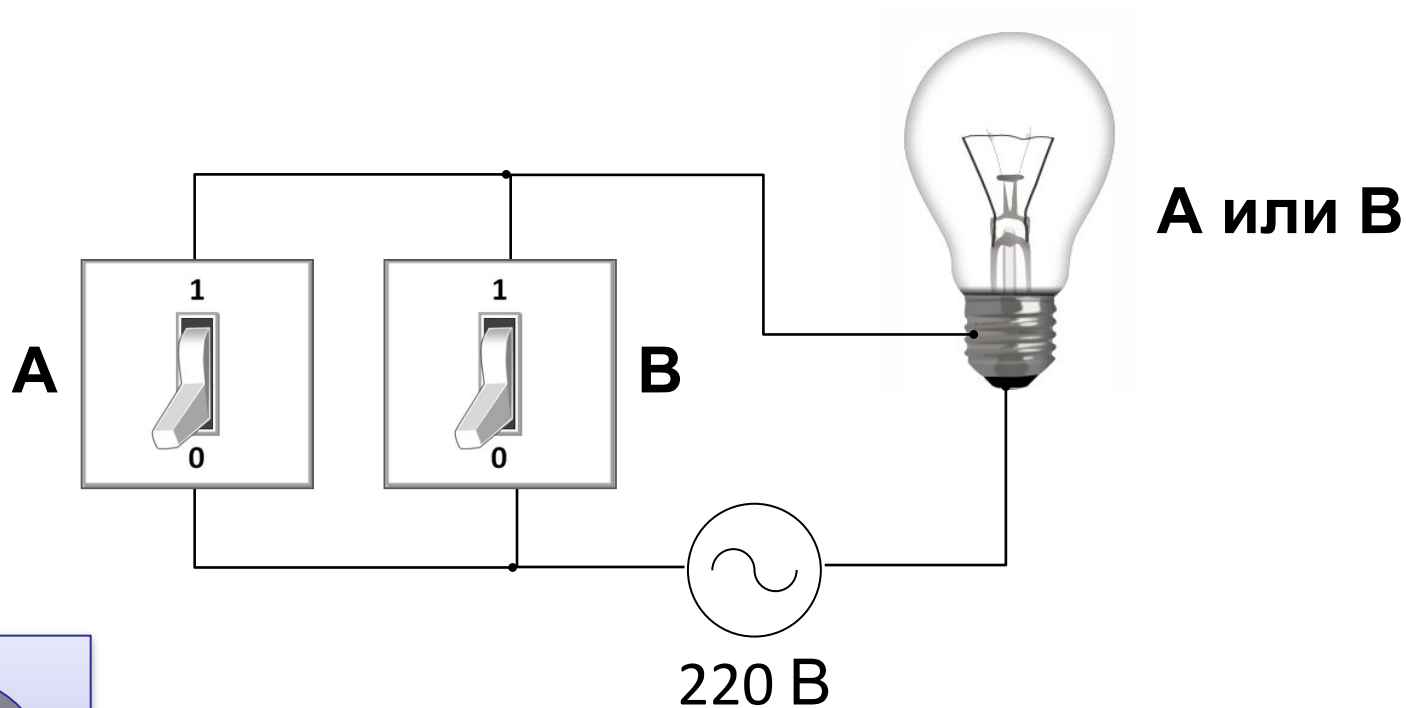
также $A \cdot B$, A and B

КОНЪЮНКЦИЯ – от лат. *conjunctio* — соединение

$$A \text{ и } B = \min(A, B)$$

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, A or B

ДИЗЪЮНКЦИЯ – от лат. *disjunctio* — разъединение

$$A \text{ или } B = \max(A, B)$$

Импликация

A

$X =$ Если идёт дождь, то

Лена раскрывает зонтик.

$$X = A \rightarrow B$$

B

Импликация $A \rightarrow B$ истинна, если **не исключено**, что из A следует B .

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Идёт дождь, но Лена не раскрыла зонтик.

Эквиваленция

Высказывание «**A** \leftrightarrow **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A \leftrightarrow B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические выражения

Логическое выражение — это выражение, результат вычисления которого — логическое значение (истина или ложь).

Авария = вышли из строя 2 из 3-х двигателей.

A – «Двигатель № 1 неисправен».

B – «Двигатель № 2 неисправен».

C – «Двигатель № 3 неисправен».

логическое
выражение

Аварийный сигнал: $X = (A \cdot B) + (A \cdot C) + (B \cdot C)$

X = «Неисправны два двигателя»

= (A и B) или (A и C) или (B и C)

! **Формализация** – это переход к записи на формальном языке!

Порядок вычисления

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквиваленция

$$X = A \cdot B + (\bar{A} \cdot B + \bar{B})$$

Таблицы истинности

$$X = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

	A	B	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	X
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	0

Логические выражения могут быть:

- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)
- **тождественно истинными** (всегда 1, **тавтология**)
- **тождественно ложными** (всегда 0, **противоречие**)

Таблицы истинности

$$X = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

	A	B	A + B	$\bar{A} + \bar{B}$	X
0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0

равносильны

$A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$
0
1
1
0

Если два выражения принимают одинаковые значения при всех значениях переменных, они называются **равносильными** (определяют одну и ту же логическую функцию).

Упрощение логических выражений

$$A \text{ и } 0 = A \cdot 0 = 0$$

$$A \text{ и } 1 = A \cdot 1 = A$$

$$A \text{ или } 0 = A + 0 = A$$

$$A \text{ или } 1 = A + 1 = 1$$

$$A \text{ и не } A = A \cdot \bar{A} = 0$$

$$A \text{ или (не } A) = A + \bar{A} = 1$$

Постройте таблицы истинности

$$B \rightarrow A \neq A \rightarrow B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \rightarrow B = \bar{B} \rightarrow \bar{A}$$

Постройте таблицы истинности

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$A \leftrightarrow B = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B)$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B)}$$