Функция называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

$\left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$ $\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} y = [0] = 0$

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{C}{x} = \left[\frac{C}{0}\right] = \infty$ C-конст., $C \neq 0$

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Уральский федеральный университет

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Уральский федеральный университет

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

$= \lim\limits_{x\to -3} \frac{x-2}{x+3} = \left[\frac{-5}{0}\right] = \infty$

Функция называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

$y = \frac{x-2}{x+3}$ - гипербола

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

$\infty - c = \infty$

Функция называется *бесконечно малой* при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

$\infty \cdot c = \infty, \ c \neq 0$

§3. Замечательные пределы, эквивалентные функции. Вычисление пределов

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

раскрывает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$

Бесконечно малые в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$

называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1.$

Обозначают: $f(x) \sim g(x)$.

При вычислении пределов функцию можно заменять на эквивалентную (если эта функция является множителем, а не слагаемым).

Примеры эквивалентных функций (в точке x_0 =0)

$$\sin x \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

$$(e^x-1) \sim x$$

$$(a^x-1) \sim x \cdot \ln a$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$((1+x)^k-1) \sim k \cdot x$$

Примеры. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}2x\sim 2x\\ \sin 3x\sim 3x\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{(1-e^{x})\cdot\arcsin 2x}=\left[\frac{0}{0\cdot 0}\right]=\left[\begin{array}{l}1-\cos 4x\sim\frac{(4x)^2}{2}=8x^2\\ 1-e^{x}\sim(-x)\\ \arcsin 2x\sim 2x\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\cancel{x^2}}{-\cancel{x}\cdot 2\cancel{x}}=\frac{8}{-2}=-4$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$ Раскрываем неопр-ти

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad [1^\infty]$$

Пример. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right)^{3x^2-1} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right] = [1^\infty]$$

используем 2ой замеч. предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = [\text{делим на наиб. выражение}] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2):x^2}{(x^2-1):x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{1-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0+1}{1-0}\right] = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right)^{3x^2-1} = [\text{выделяем единицу в основании}] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right)+1-1\right)^{3x^2-1} \to \lim\left(\frac{1+x^2-(x^2-1)}{x^2-1}+1\right)^{3x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{3x^2-1} = [\text{преобразуем степень}] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}}_{=e}\right)^{\frac{2}{x^2-1}\cdot(3x^2-1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(3x^2-1):x^2}{(x^2-1):x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = e^{\frac{2\cdot 3}{1}} = e^6$$

$\frac{1}{x^2}\to 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α, β - коэффициенты при n в числителе и знаменателе

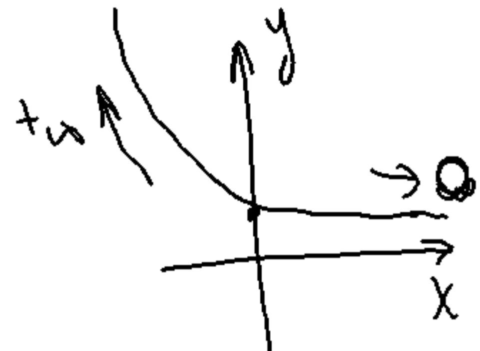
Вычислить

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{4x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1+2x}+1-1\right)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{1+x-1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{4x}} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{-x}{1+2x}\right)^{\frac{1+2x}{-x}\cdot\frac{-x}{1+2x}\cdot\frac{1}{4x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{4x(1+2x)}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{4(1+2x)}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

e

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{4x^2} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] = \cancel{+\infty}\ 0$$



$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$$\frac{(1+x):x}{(1+2x):x} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}+2} \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm\infty}\right] = \begin{cases} \overset{0}{\cancel{+\infty}}, & x\to+\infty \\ +\infty, & x\to-\infty \end{cases}$$

Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

1. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+4}{1-x^2} = \left[\frac{\infty-\infty}{-\infty}\right] = \left[\text{старшая степень } x^2;\ \frac{1}{-1}\right] = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+2n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}+3n} = \left[\text{старшая степень } n^2\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+2n}{n}\right)^2}{\frac{\sqrt[3]{n^6+1}}{n^2}+\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+2\right)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}+\frac{3}{n}} = \frac{(1+2)^2}{1} = 9$$

1 2 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+7^2\cdot 7^n}{3-7^n} = \left[\text{делим на } 7^n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{7^n}+49}{\frac{3}{7^n}-1} = -49$$

0 0

2. Неопределенность вида $[\infty - \infty]$ свести к $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x : x^2}{(x^2-1) : x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{1-0}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x+4})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x+4})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x+4}} = \left[\begin{aligned}&(a-b)(a+b)= \\ &= a^2-b^2\end{aligned}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-(x^2-3x+4)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x+4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4):x}{(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x+4}):x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{6}{1+1} = 3$$

$$\sqrt{3x} = \sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}$$

3. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

1 ип замен., экв ф-ция

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{3x^2+2x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{r|l} x^3+x^2-5x+3 & x-1 \\ -\ x^3-x^2 & x^2+2x-3 \\ 2x^2-5x+3 & \\ -\ 2x^2-2x & \\ -3x+3 & \\ -\ -3x+3 & \\ 0 & \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{r|l} 3x^2+2x-5 & x-1 \\ -\ 3x^2-3x & 3x+5 \\ 5x-5 & \\ -\ 5x-5 & \\ 0 & \end{array}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+2x-3)}{\cancel{(x-1)}(3x+5)}=$$

$$=\left[\frac{1+2-3}{3+5}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(x+4-4)}^{x}(\sqrt{x+9}+3)}{\underbrace{(x+9-9)}_{x}(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{3+3}{2+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

4. Неопределенность вида $[0\cdot\infty]$ $\to \frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0}(\sin \overset{\to 0}{2x}\cdot \operatorname{ctg} \overset{\to\infty}{5x}) = \left[\operatorname{ctg}5x = \frac{1}{\operatorname{tg}5x} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}5x} = \left[\begin{matrix} \sin 2x \sim 2x \\ \operatorname{tg}5x \sim 5x \end{matrix} \right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

5. Неопределенность вида $[1^{\infty}]$ $2^{ой}$ замеч. предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+3x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sin 2x}} = \left[1^{\infty},\ \sin 2x \sim 2x\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+3x}{1-x}+1-1\right)^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+3x-1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(1+\frac{4x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{4x}}}_{e}{}^{\frac{4x}{1-x}\cdot\frac{1}{2x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{(1-x)2x}} = e^{\frac{4}{2}} = e^{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x) = \left[\infty(\infty-\infty)\right] = \left[\begin{array}{l}\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}\\ c\ln a=\ln a^{c}\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)^{x-5} = \left[\ln(1^{\infty})\right] = \lim_{x\to\infty}\ln\underbrace{\left(1+\frac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3}}}_{e}{}^{\frac{-3}{x}\cdot(x-5)} =$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(x-5)}{x}} = \ln e^{-3} = -3\underbrace{\ln e}_{1} = -3$$