

# **Лекция по дисциплине «Математика»**

*Зироян Мария Альбертовна  
профессор  
кафедры прикладной математики*

***“Весь этот мир держится исключительно на математике,- сказал Роб Кук, ушедший на пенсию вице-президент Pixar и автор многих важных программ, используемых при создании трехмерной графики.- Что бы вы в нем ни делали, все описывается математическими действиями. И если все сделано правильно, то никто об этом не догадывается”.***

Для создания трехмерной анимации требуется не только разбираться в программном обеспечении, но и быть знатоком физики с математикой. Только обладая совокупностью этих познаний, можно создать реалистичный виртуальный мир.

Представьте себе локоть. Когда он гнется, рука, предплечье, запястье двигаются, а мышцы сжимаются и разжимаются – и все это можно описать при помощи математики.

При работе над трехмерной анимацией или графикой компьютерной игры тригонометрия помогает задать вращение и движение, алгебра используется при создании спецэффектов, а интегральное исчисление помогает создать реалистичное освещение.

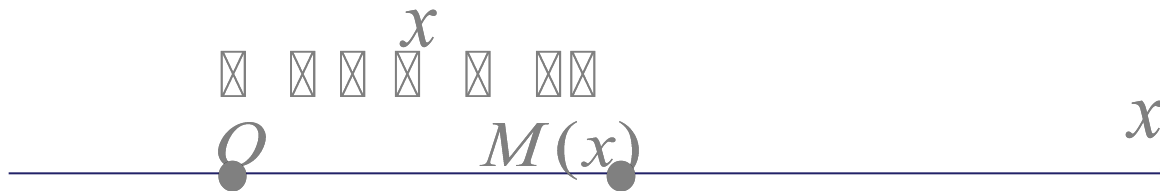
**Стив Джобс.**

- **Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве.**
- **Векторы. Операции над векторами.**
- **Скалярное произведение двух векторов.**
- **Свойства скалярного произведения.**

# Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве.

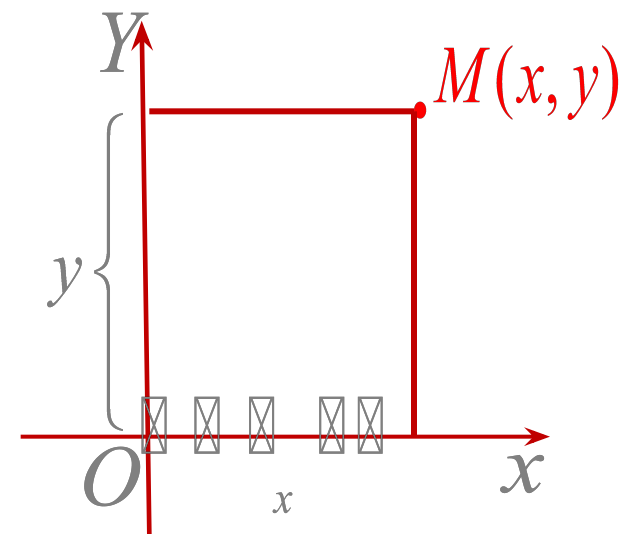
## Система координат

- **Определение 1.** Прямая, служащая для изображения действительных чисел, в которой выбрана начальная точка  $O$ , единица измерения и положительное направление, называется **числовой прямой**, или **числовой осью**. Точка  $M$  этой прямой характеризуется определенным числом — **координатой**,  $x$ е.  $M(x)$ .



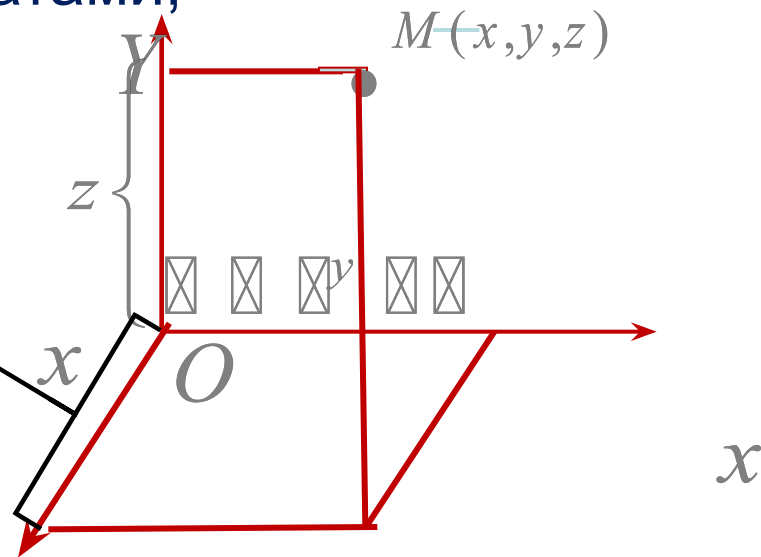
- **Определение 2.** Две взаимно перпендикулярные оси  $Ox$   $Oy$ , имеющие общее начало  $O$  и одинаковую единицу масштаба, образуют **прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.**
- Ось  $Ox$  называется **осью абсцисс**, а ось  $Oy$  - **осью ординат**, точка  $O$  - началом координат и плоскость  $Oxy$  - координатной плоскостью.

Каждой точке  $M$  этой плоскости соответствует пара чисел  $(x, y)$ , называемых ее координатами, т.е.  $M(x, y)$ .  $x$  — называется абсциссой,  $y$  - называется ординатой точки  $M$ .



- **Определение 3.** Три взаимно перпендикулярные оси  $Ox, Oz, Oy$ , имеющие общее начало  $O$  и одинаковую единицу масштаба, образуют **прямоугольную (или декартовую) систему координат в пространстве  $Oxyz$** .  
Ось  $Oz$  называется **осью аппликата**.

Любая точка  $M(x, y, z)$  характеризуется тройкой чисел, называемых ее координатами, т.е.  $x$  — называется абсциссой,  $y$  — называется ординатой,  $z$  — аппликатой точки  $M$ .



# ОПРЕДЕЛЕНИЯ

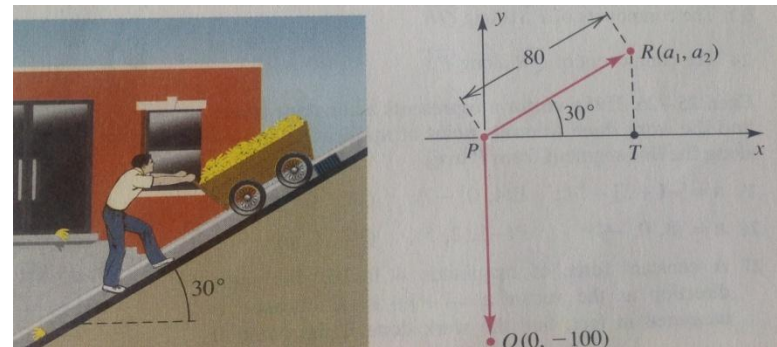
1. **Вектором**  $\overrightarrow{AB}$  называется направленный отрезок с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$ .

2. **Длиной** (или *модулем*) вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ . Используется обозначение:  $|\overrightarrow{AB}|$ .

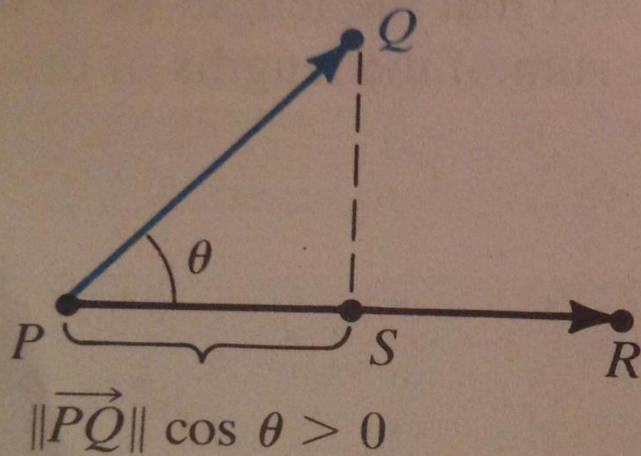
3. Два вектора  $\overrightarrow{AB}$  называются **равными**, если они имеют одинаковые длины, лежат на параллельных прямых (*коллинеарны*) и направлены в одну сторону (*сонаправлены*).

4. **Проекцией вектора  $\overrightarrow{a}$  на ось  $Ox$**  называются число, обозначаемое  $Pr_{Ox}^a$ , вычисляемое по формуле:

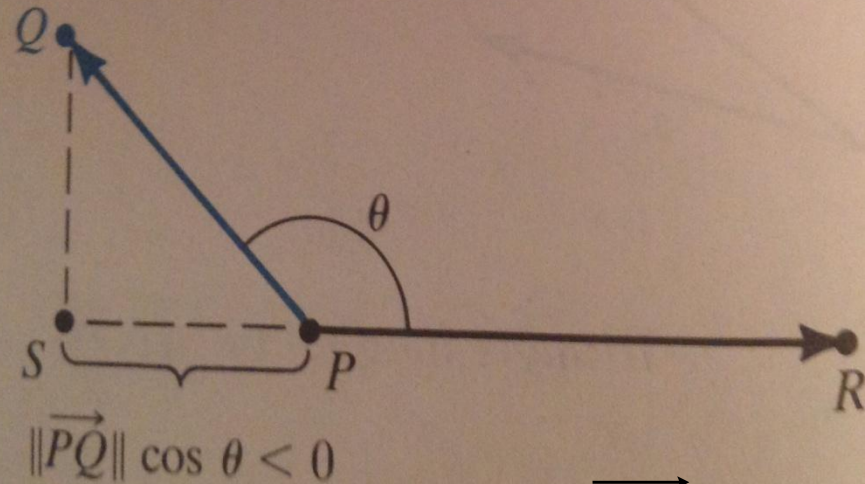
$$Pr_{Ox}^a = |a| \cos(\overrightarrow{a}, \hat{Ox})$$







$$\text{Пр}_{\vec{PR}} \vec{PQ} = PS$$



$$\text{Пр}_{\vec{PR}} \vec{PQ} = PS$$

- **Определение.** Если начало и конец вектора совпадают, например  $\vec{0} = \vec{AA}$ , то такой вектор называется **нулевым** и обозначается  $\vec{AA}$ .

Длина нулевого вектора равна нулю.

- **5. Направляющими углами** вектора  $\vec{a}$  называются углы между ним и координатными осями:

$$\alpha = (\vec{a}, Ox); \quad \beta = (\vec{a}, Oy); \quad \gamma = (\vec{a}, Oz)$$

- **6. Косинусы направляющих углов называются направляющими косинусами вектора:**

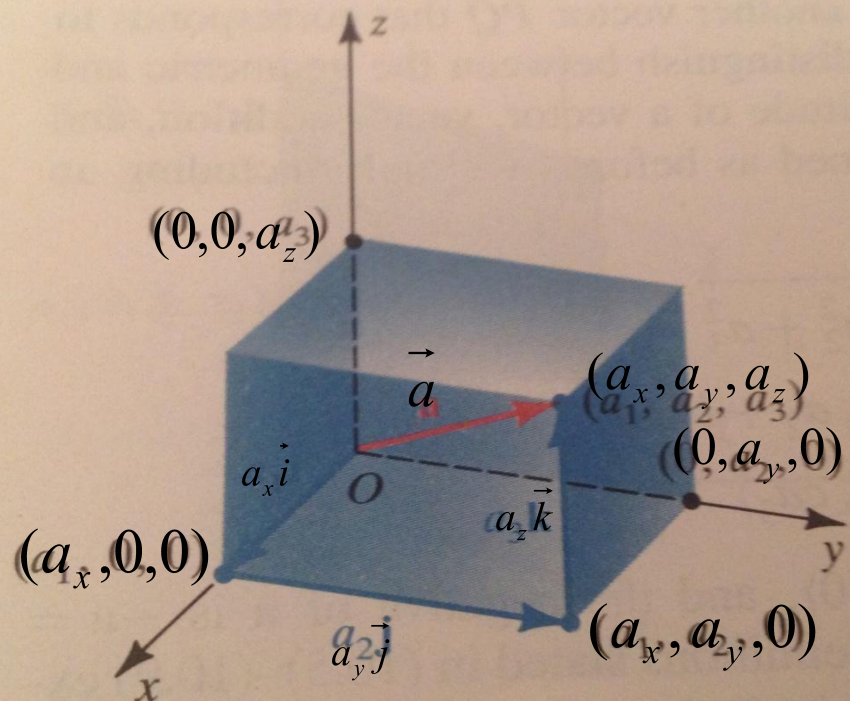
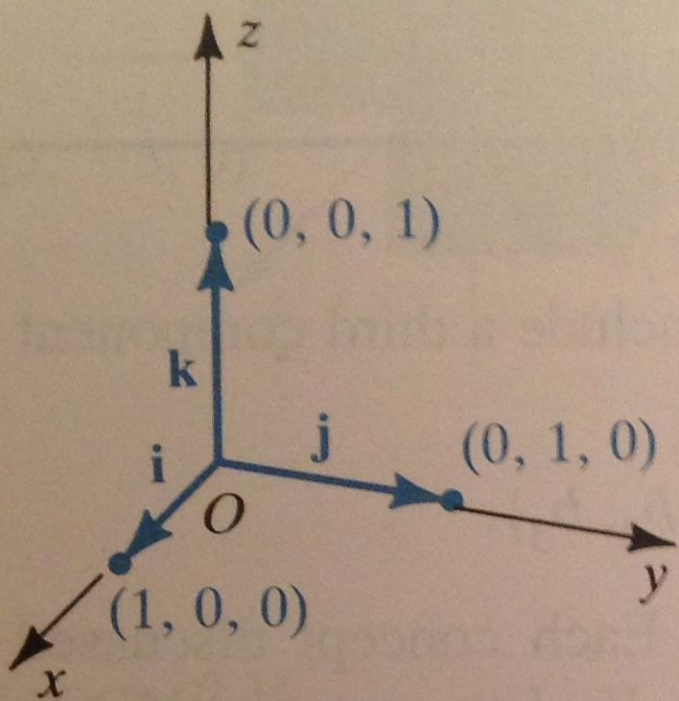
$$\cos \alpha = \cos(\vec{a}, Ox); \quad \cos \beta = \cos(\vec{a}, Oy); \quad \cos \gamma = \cos(\vec{a}, Oz)$$

- **7. Проекции вектора**  $\vec{a}$  **на координатные оси**  $Ox, Oy, Oz$  **называются координатами вектора** и обозначаются, соответственно,  $a_x; a_y; a_z$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Для любого вектора  $\vec{a}$  верно

равенство: 
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

$\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$  - единичные векторы, сонаправленные с соответствующей осью.



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z).$$

Вектор  $\vec{a}$  также обозначается  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Для любого вектора

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  верны равенства:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

**З а м е ч а н и е 3.** У равных векторов равны соответствующие координаты:

$$\vec{a} = \vec{b}, \quad a_x = b_x; \quad a_y = b_y; \quad a_z = b_z.$$

**З а м е ч а н и е 4.** У коллинеарных векторов координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k.$$

**З а м е ч а н и е 5.** Длина вектора  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$  через координаты определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

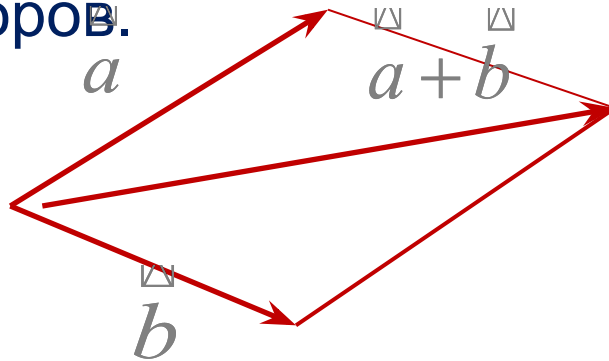
Если известны координаты точек  $A = (x_a; y_a; z_a)$  и

$B = (x_b; y_b; z_b)$ , то  $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$ .

$$\vec{AB} = (x_a - x_b)\vec{i} + (y_a - y_b)\vec{j} + (z_a - z_b)\vec{k}.$$

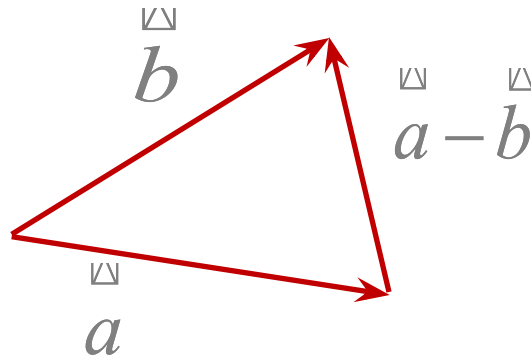
# ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

- 1) Сложение: Координаты суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов.



$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

- 2) Вычитание:



$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

3) Умножение вектора на скаляр  $\lambda$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

4) Скалярное произведение двух векторов.

**О п р е д е л е н и е.** Скалярным произведением двух

векторов  $\vec{a}$   $\vec{b}$  называется число, обозначаемое

$(\vec{a}, \vec{b})$ , вычисляемое по формуле  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ ,

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{a}$   $\vec{b}$ .

Если известны координаты векторов

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z), \text{ то}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

# Свойства скалярного произведения

- 1.  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})$

- 2.  $(\alpha \cdot \vec{a})(\beta \cdot \vec{b}) = \alpha \cdot \beta (\vec{b} \cdot \vec{a})$

- 3.  $\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{a}) + (\vec{c} \cdot \vec{b})$

- 4.  $\cos \varphi = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$        $\varphi$  — угол между двумя векторами

- 5.  $Pr_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|}$



## Пример

Даны векторы :  $\vec{a} = (2; -1; -2)$ ;  $\vec{b} = (8; -4; 0)$ .

Найти:

1.  $\vec{c} = 2\vec{a}$ ;  $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ ;

2. длины векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ ;

3. скалярный квадрат вектора  $\vec{d}$ ;

4. скалярное произведение векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ ;

5. угол между векторами  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$

# Решение.

1. По определению

$$\vec{c} = 2\vec{a} = (4; -2; -4), \vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6; -3; 2).$$

2. Найдем длины векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ . По формуле найдем

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

3. Скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.

$$(\vec{d}, \vec{d}) = d^2 = 49.$$

#### 4. Скалярное произведение

$$(\vec{c} \vec{d}) = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z.$$

$$(\vec{c} \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

5. Угол между векторами  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  определяется равенством:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{c}, \vec{d})}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0,52$$

Откуда

$$\varphi = \arccos 0,52 \approx 58^\circ.$$