

Лекция по дисциплине «Математика»

*Зироян Мария Альбертовна
профессор
кафедры прикладной математики*

“Весь этот мир держится исключительно на математике,- сказал Роб Кук, ушедший на пенсию вице-президент Pixar и автор многих важных программ, используемых при создании трехмерной графики.- Что бы вы в нем ни делали, все описывается математическими действиями. И если все сделано правильно, то никто об этом не догадывается”.

Для создания трехмерной анимации требуется не только разбираться в программном обеспечении, но и быть знатоком физики с математикой. Только обладая совокупностью этих познаний, можно создать реалистичный виртуальный мир.

Представьте себе локоть. Когда он гнется, рука, предплечье, запястье двигаются, а мышцы сжимаются и разжимаются – и все это можно описать при помощи математики.

При работе над трехмерной анимацией или графикой компьютерной игры тригонометрия помогает задать вращение и движение, алгебра используется при создании спецэффектов, а интегральное исчисление помогает создать реалистичное освещение.

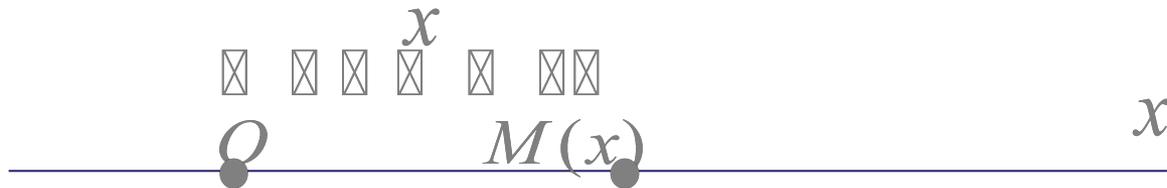
Стив Джобс.

- **Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве.**
- **Векторы. Операции над векторами.**
- **Скалярное произведение двух векторов.**
- **Свойства скалярного произведения.**

Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве.

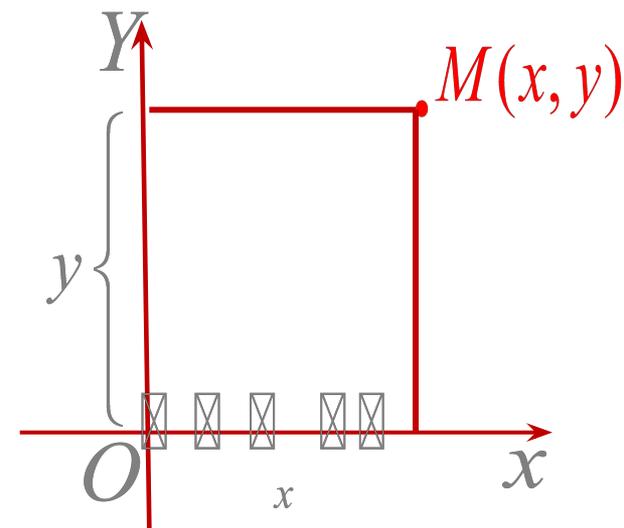
Система координат

- **Определение 1.** Прямая, служащая для изображения действительных чисел, в которой выбрана начальная точка O , единица измерения и положительное направление, называется **числовой прямой**, или **числовой осью**. Точка M этой прямой характеризуется определенным числом — **координатой**, x . $M(x)$.



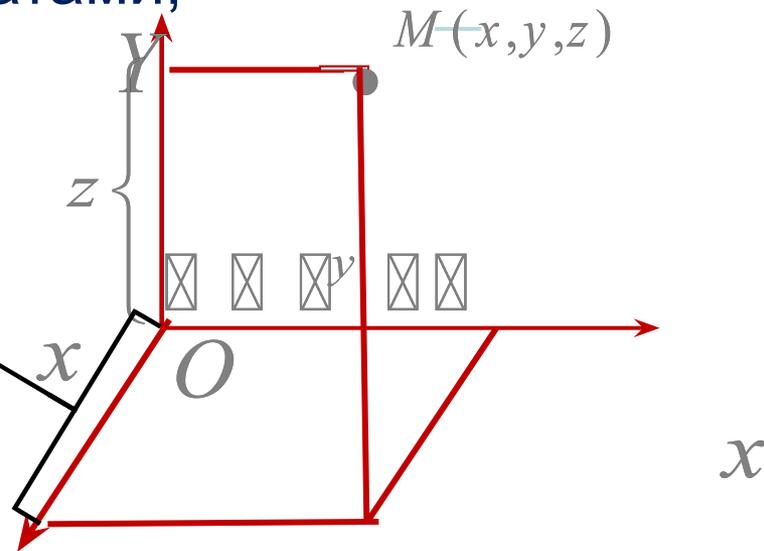
- **Определение 2.** Две взаимно перпендикулярные оси Ox Oy , имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба, образуют **прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.**
- Ось Ox называется **осью абсцисс**, а ось Oy - **осью ординат**, точка O - началом координат и плоскость Oxy - координатной плоскостью.

Каждой точке M этой плоскости соответствует пара чисел (x, y) , называемых ее координатами, т.е. $M(x, y)$. x — называется абсциссой, y - называется ординатой точки M .



- **Определение 3.** Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oz, Oy , имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба, образуют **прямоугольную (или декартовую) систему координат в пространстве $Oxyz$** .
Ось Oz называется **осью аппликат**.

Любая точка $M(x, y, z)$ характеризуется тройкой чисел, называемых ее координатами, т.е. x — называется абсциссой, y — называется ординатой, z — аппликатой точки M .



ОПРЕДЕЛЕНИЯ

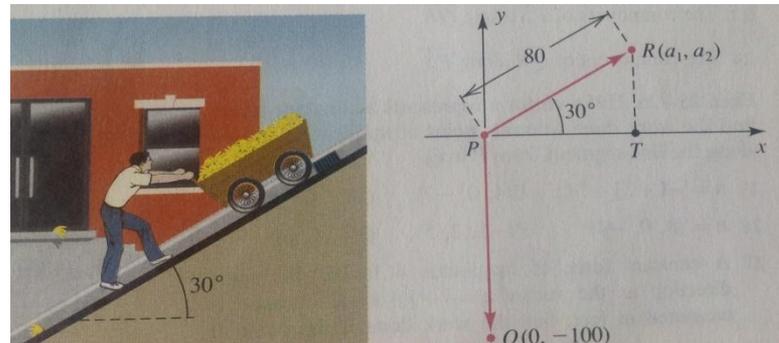
1. **Вектором** \overrightarrow{AB} называется направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B .

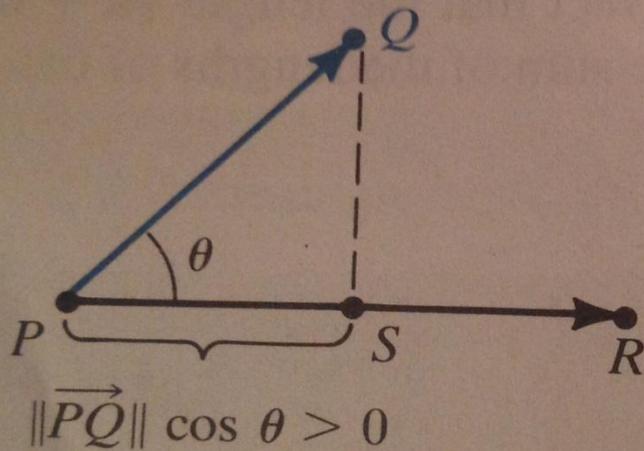
2. **Длиной** (или *модулем*) вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB . Используется обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$.

3. Два вектора \overrightarrow{AB} называются **равными**, если они имеют одинаковые длины, лежат на параллельных прямых (*коллинеарны*) и направлены в одну сторону (*сонаправлены*).

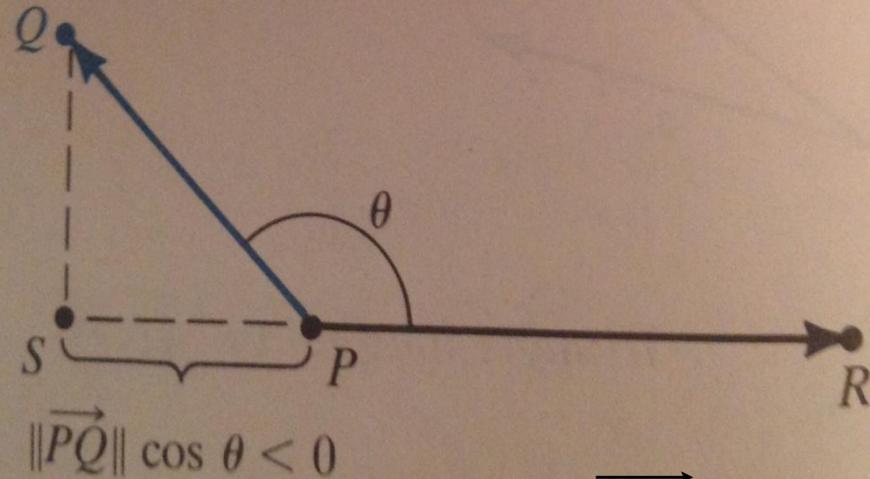
4. **Проекцией вектора \overrightarrow{a} на ось Ox** называются число, обозначаемое Pr_{Ox}^a , вычисляемое по формуле:

$$Pr_{Ox}^a = |a| \cos(\overrightarrow{a}, \hat{Ox})$$





$$\text{Пр}_{\vec{PR}} \vec{PQ} = PS$$



$$\text{Пр}_{\vec{PR}} \vec{PQ} = PS$$

- **Определение.** Если начало и конец вектора совпадают, например $\vec{0} = \vec{AA}$, то такой вектор называется **нулевым** и обозначается \vec{AA} .

Длина нулевого вектора равна нулю.

- **5. Направляющими углами** вектора \vec{a} называются углы между ним и координатными осями:

$$\alpha = (\vec{a}, Ox); \quad \beta = (\vec{a}, Oy); \quad \gamma = (\vec{a}, Oz)$$

- **6. Косинусы направляющих углов называются направляющими косинусами вектора:**

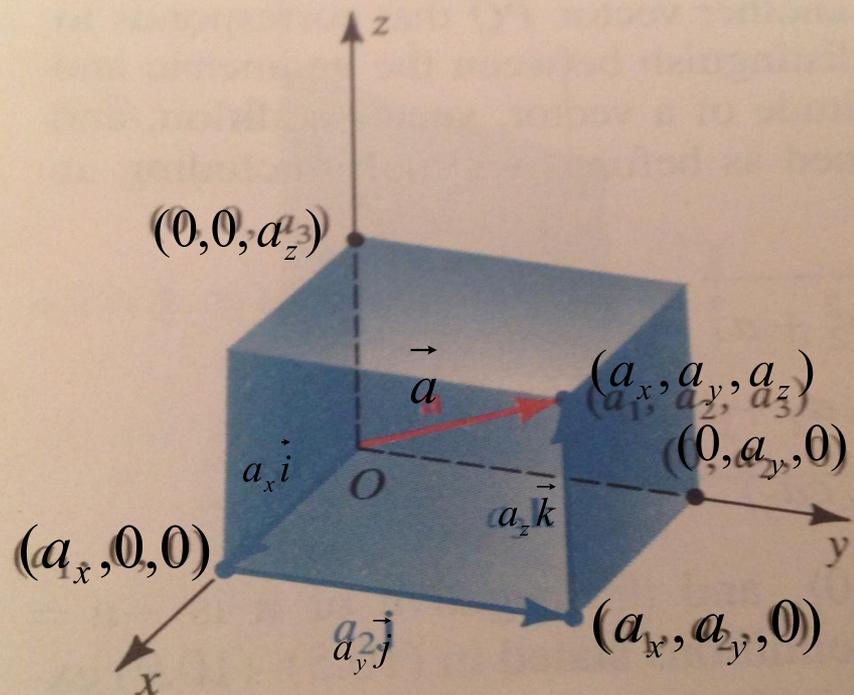
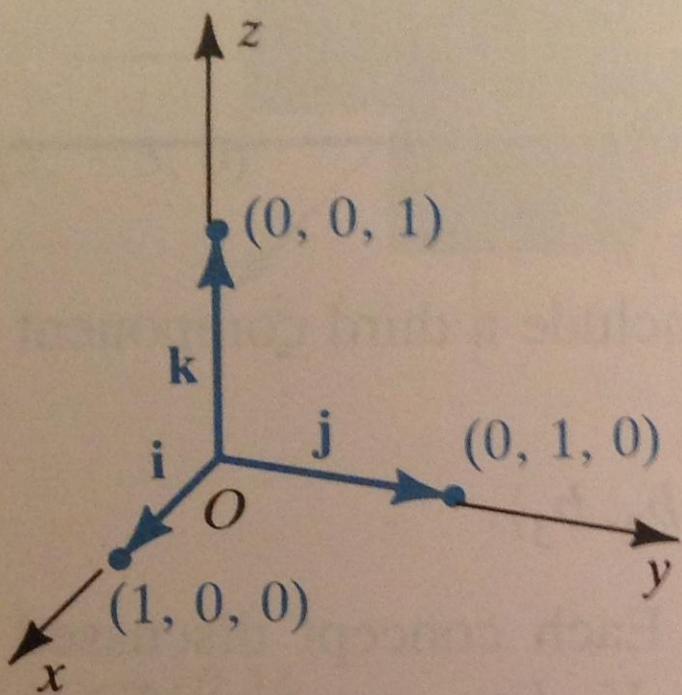
$$\cos \alpha = \cos(\vec{a}, Ox); \quad \cos \beta = \cos(\vec{a}, Oy); \quad \cos \gamma = \cos(\vec{a}, Oz)$$

- **7. Проекции вектора** \vec{a} **на координатные оси** Ox, Oy, Oz **называются координатами вектора** и обозначаются, соответственно, $a_x; a_y; a_z$.

З а м е ч а н и е 1. Для любого вектора \vec{a} верно

равенство:
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

$\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ - единичные векторы, сонаправленные с соответствующей осью.



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z).$$

Вектор \vec{a} также обозначается $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

З а м е ч а н и е 2. Для любого вектора

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ верны равенства:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

З а м е ч а н и е 3. У равных векторов равны соответствующие координаты:

$$\vec{a} = \vec{b}, \quad a_x = b_x; \quad a_y = b_y; \quad a_z = b_z.$$

З а м е ч а н и е 4. У коллинеарных векторов координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k.$$

З а м е ч а н и е 5. Длина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ через координаты определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

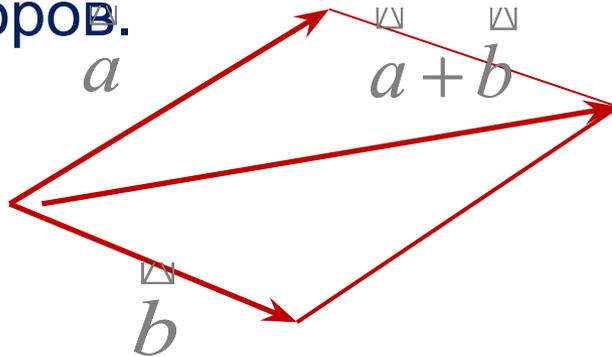
Если известны координаты точек $A = (x_a; y_a; z_a)$ и

$B = (x_b; y_b; z_b)$, то $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$.

$$\vec{AB} = (x_a - x_b)\vec{i} + (y_a - y_b)\vec{j} + (z_a - z_b)\vec{k}.$$

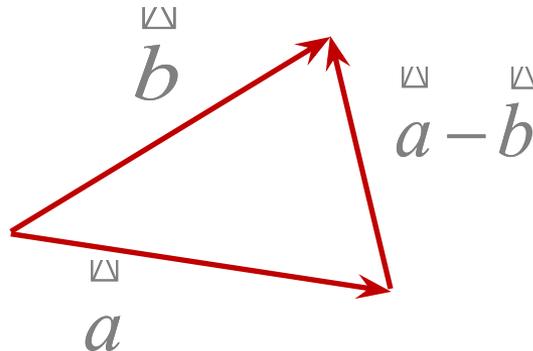
ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

- 1) Сложение: Координаты суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов.



$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

- 2) Вычитание:



$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

3) Умножение вектора на скаляр λ

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

4) Скалярное произведение двух векторов.

О п р е д е л е н и е. Скалярным произведением двух

векторов \vec{a} \vec{b} называется число, обозначаемое

(\vec{a}, \vec{b}) , вычисляемое по формуле $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$,

где φ – угол между векторами \vec{a} \vec{b} .

Если известны координаты векторов

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z), \text{ то}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Свойства скалярного произведения

- 1. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})$

- 2. $(\alpha \cdot \vec{a})(\beta \cdot \vec{b}) = \alpha \cdot \beta (\vec{b} \cdot \vec{a})$

- 3. $\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{a}) + (\vec{c} \cdot \vec{b})$

- 4. $\cos \varphi = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ φ — угол между двумя векторами

- 5. $Pr_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|}$

Пример

Даны векторы : $\vec{a} = (2; -1; -2)$; $\vec{b} = (8; -4; 0)$.

Найти:

1. $\vec{c} = 2\vec{a}$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$;

2. длины векторов \vec{c} и \vec{d} ;

3. скалярный квадрат вектора \vec{d} ;

4. скалярное произведение векторов \vec{c} и \vec{d} ;

5. угол между векторами \vec{c} и \vec{d}

Решение.

1. По определению

$$\vec{c} = 2\vec{a} = (4; -2; -4), \vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6; -3; 2).$$

2. Найдем длины векторов \vec{c} и \vec{d} . По формуле найдем

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

3. Скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.

$$(\vec{d}, \vec{d}) = d^2 = 49.$$

4. Скалярное произведение

$$(\vec{c} \vec{d}) = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z.$$

$$(\vec{c} \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

5. Угол между векторами \vec{c} и \vec{d} определяется равенством:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{c}, \vec{d})}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0,52$$

Откуда

$$\varphi = \arccos 0,52 \approx 58^\circ.$$