

Параллелограмм Вариньона решает задачи

Цель: изучить теорему Вариньона и научиться применять ее на практике с наименьшими временными затратами.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал: понятия «параллелограмм Вариньона», бимедианы четырехугольника, разобрать доказательство теоремы Вариньона и следствия из нее.
2. Сравнить количество времени, необходимое для решения задач традиционным способом и, используя теорему Вариньона.
3. Показать решение олимпиадных заданий с помощью параллелограмма Вариньона.

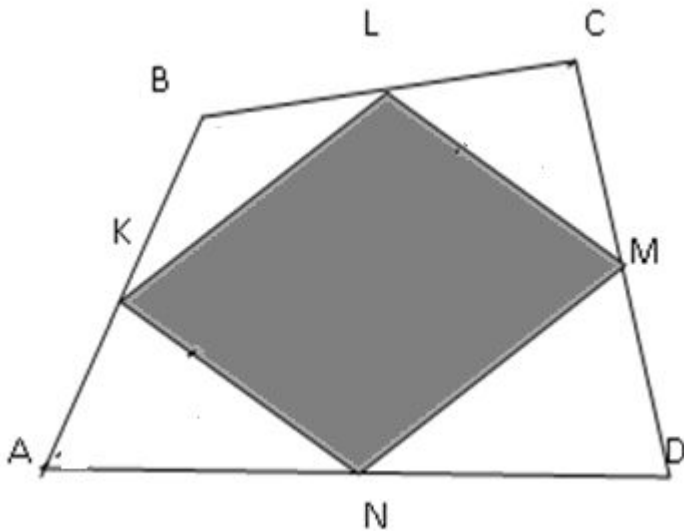
Пьер Вариньон (1654 – 1722)



- Французский механик и математик.
- Написал учебник по элементарной геометрии (издан в 1731 году).
- Первым доказал, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Теорема Вариньона

Четырехугольник, образованный путем последовательного соединения середин сторон выпуклого четырехугольника, является **параллелограммом**, и его площадь равна половине площади данного четырехугольника.



Дано:

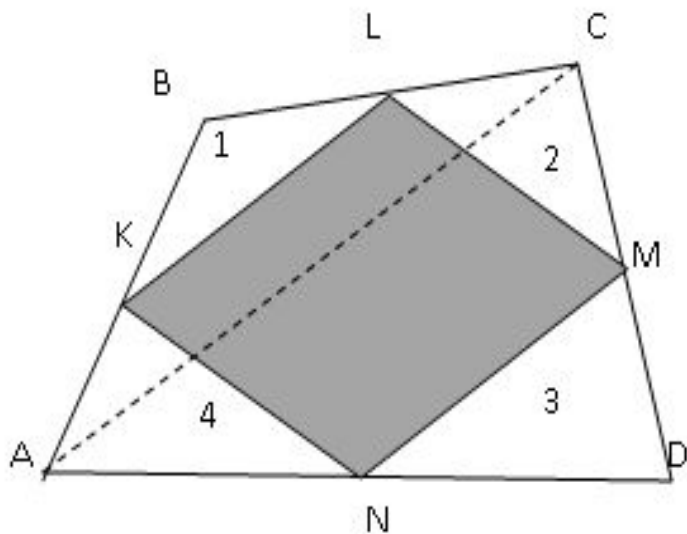
ABCD – выпуклый четырехугольник,
 $AK=KB$, $BL=LC$, $CM=MD$, $AN=ND$

Доказать:

1) KLMN – параллелограмм;

2) $S_{KLMN} = S_{ABCD} / 2$

Доказательство:



Рассмотрим треугольник ABC.

KL - средняя линия треугольника ABC
(по определению),
следовательно, $KL \parallel AC$.

MN – средняя линия треугольника ADC,
 $MN \parallel AC$.

Так как $KL \parallel AC$ и $MN \parallel AC$, следовательно,
 $KL \parallel NM$ и $KL = MN = AC/2$.

Таким образом, KLMN - параллелограмм. Этот
параллелограмм называется параллелограммом
Вариньона данного четырехугольника.

2. Средняя линия треугольника отсекает от
него треугольник, площадь которого в четыре
раза меньше площади исходного треугольника,
т.е. $S_{KBL} = S_{ABC}/4$, $S_{MDN} = S_{ADC}/4$.

Следовательно, $S_1 + S_3 = S_{ABCD}/4$.

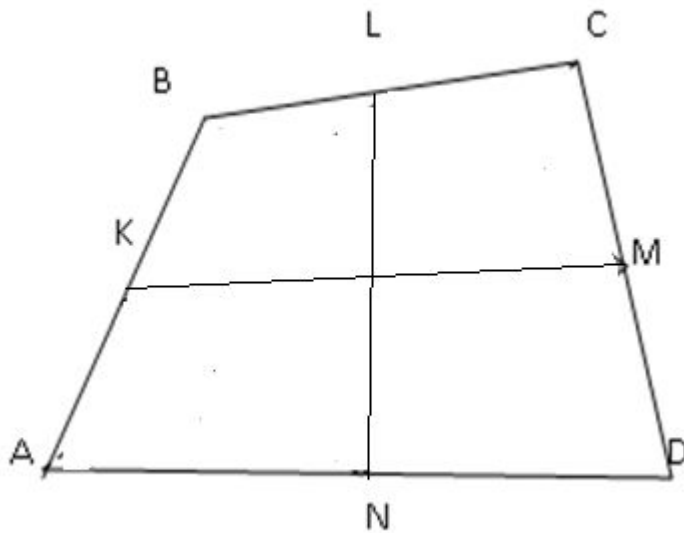
Аналогично, $S_2 + S_4 = S_{ABCD}/4$.

$S_1 + S_3 + S_2 + S_4 = S_{ABCD}/4 + S_{ABCD}/4 = S_{ABCD}/2$.

Т.е., $S_{KLMN} = S_{ABCD}/2$.

Что и требовалось доказать.

Бимедианы четырехугольника



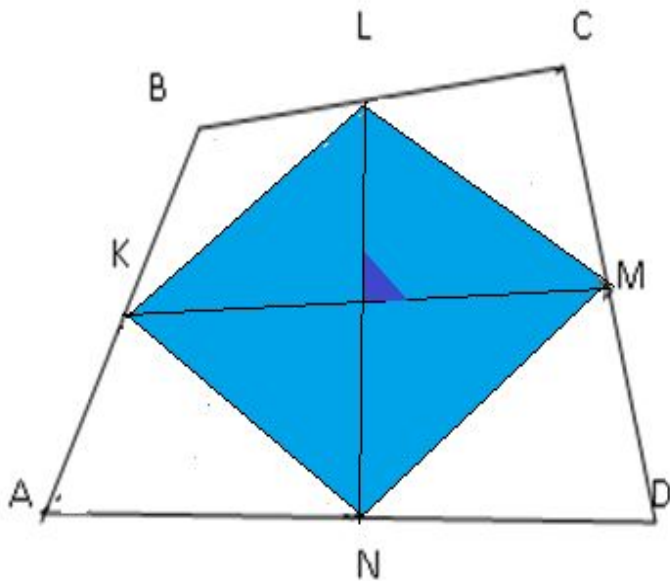
– это отрезки, соединяющие
середины противоположных сторон

KM и LN

(диагонали

параллелограмма Вариньона)

Следствия из теоремы Вариньона

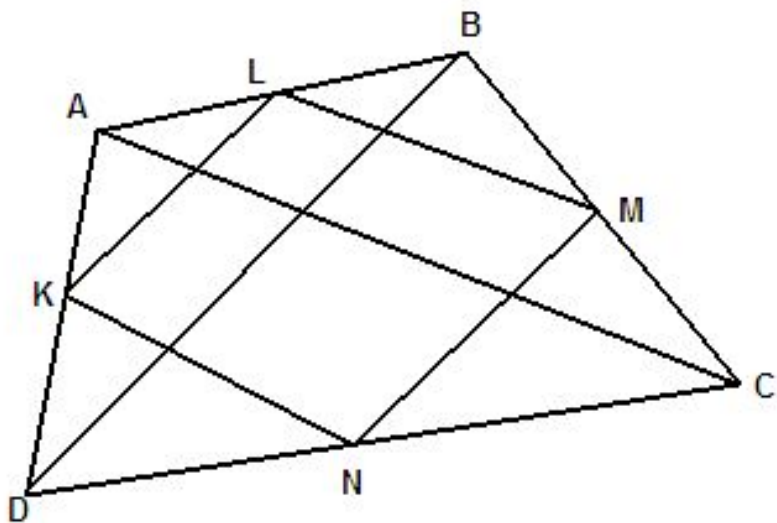


№1

Параллелограмм Вариньона является **ромбом** тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

- 1) **диагонали равны $AC=BD$;**
- 2) **бимедианы перпендикулярны**

$$KM \perp LN$$



№2

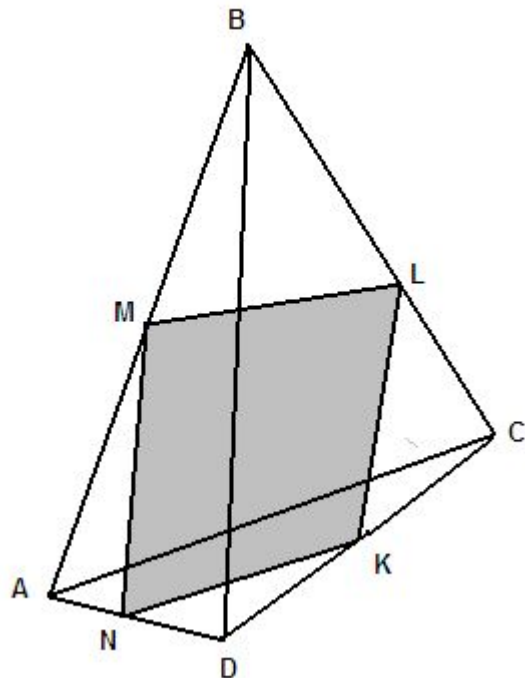
Параллелограмм Вариньона является **прямоугольником** тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

1) **диагонали перпендикулярны;**

$$AC \perp BD$$

2) **бимедианы равны**

$$KM=LN$$



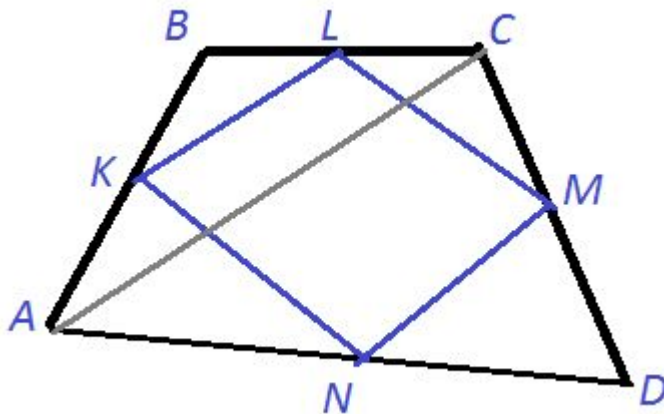
№3

Параллелограмм Вариньона является **квадратом** тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

- 1) диагонали равны $AC=BD$ и перпендикулярны $AC \perp BD$;
- 2) бимедианы равны $MK=NL$ и перпендикулярны $MK \perp NL$

Решение задач (из учебника №567)

- Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник
 $AK=KB$, $BL=LC$, $CM=MD$, $AN=ND$

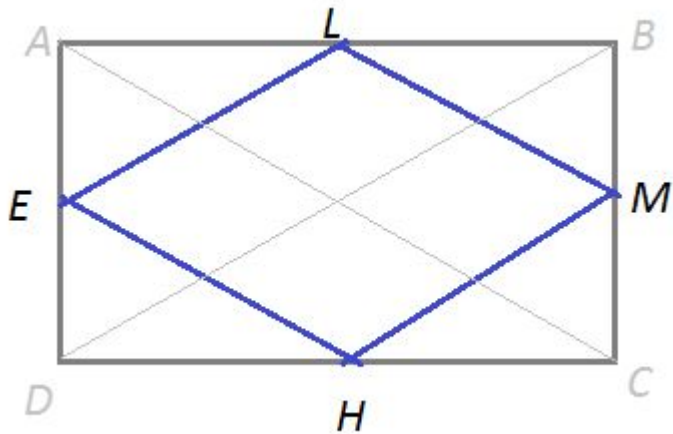
Доказать: $KLMN$ – параллелограмм

Новое доказательство:

$KLMN$ – параллелограмм Вариньона
(по определению)

№568(а)

- Докажите, что четырехугольник – ромб, если его вершинами являются середины сторон прямоугольника



Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $DE=EA$, $AL=LB$, $BM=MC$, $DH=HC$

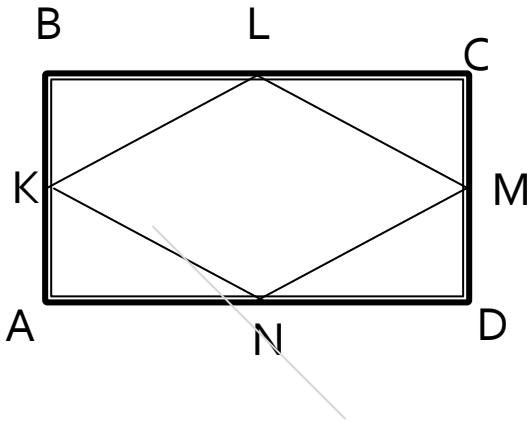
Доказать: $ELMN$ – ромб

Новое доказательство:

$ELMN$ – ромб
(по 1 следствию из теоремы Вариньона)

Олимпиадные задачи

Докажите, что если диагонали четырехугольника равны, то его площадь равна произведению средних линий.



Дано:

ABCD- четырехугольник
 $AC=BD$

Доказать:

$$S_{ABCD} = KM * LN$$

Доказательство:

KLMN – параллелограмм Вариньона. Так как $AC=BD$, параллелограмм Вариньона является ромбом. $S_{KLMN} = KM * LN / 2$ (площадь ромба равна половине произведения его диагоналей).

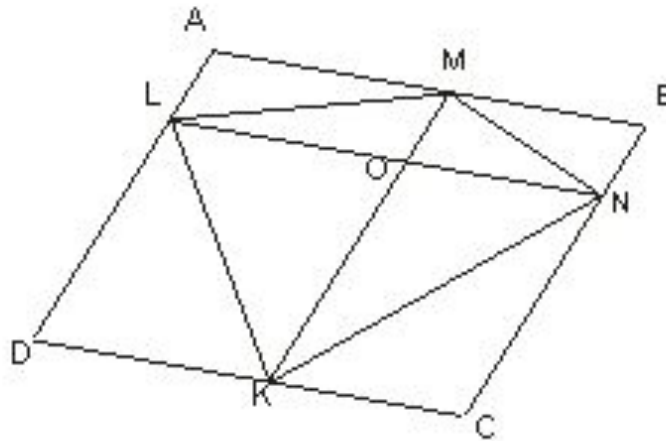
$$S_{ABCD} = 2 S_{KLMN} = KM * LN$$

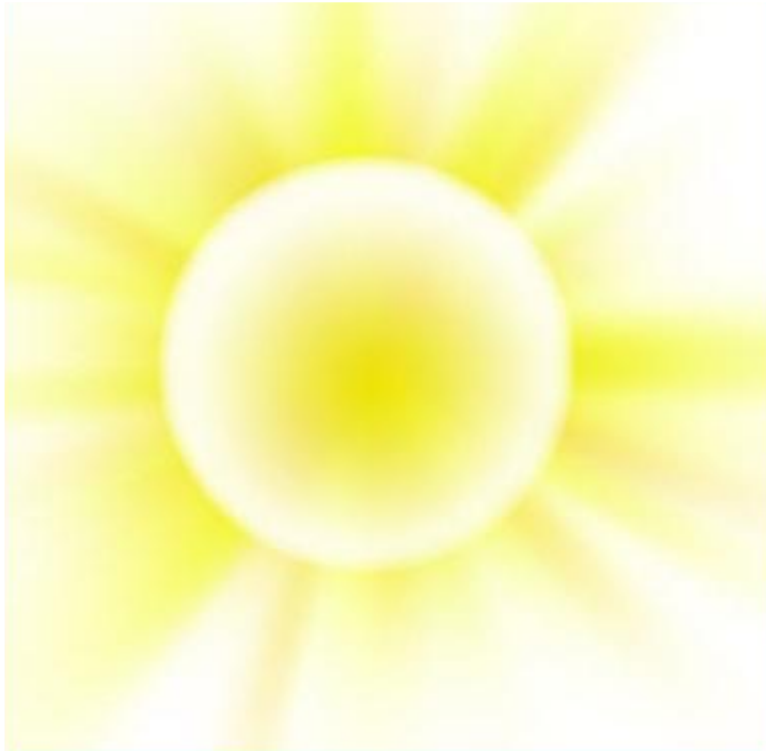
ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задачи: №568(б), №566

А также задача:

Докажите, что площадь параллелограмма, образованного прямыми, проходящими через вершины выпуклого четырехугольника и параллельными его диагоналям, в два раза больше площади исходного четырехугольника





**«Нет ничего нового под солнцем,
но есть кое-что старое, чего мы не знаем»**

Лоренс Питер

Пьер Вариньон жил в 18 веке, но теорема Вариньона как нельзя актуальна именно в наши дни, когда чтобы всё успеть, необходимо гораздо больше, чем 24 часа в сутки.

Доказательство задачи на дом: слайд 13

Доказательство:

$$S_{ABCD} = S_{LMNK} + S_{LKD} + S_{ALM} + S_{BMN} + S_{KCN}$$

Так как *AMOL*, *MONB*, *CKON*, *DKOL* -

параллелограммы,

$$\text{То } S_{ALM} = S_{MOL}, S_{MBN} = S_{MON}, S_{NCK} = S_{KON}.$$

Отсюда получаем, что,

$$S_{LKD} = S_{LOK}.$$