Дисциплина: «МДК 01.03. Математическое моделирование»

Тема «Задача о максимальном потоке и алгоритм Форда–Фалкерсона»

Преподаватель спец. дисциплин Радунцева Александра Антоновна

Основные понятия

- **Транспортной сетью** называется пара T=(G, C), где взвешенный орграф, удовлетворяющий следующим условиям:
- а) нет петель;
- б) существует только одна вершина, не имеющая ни одного прообраза - это исток;
- в) существует только одна вершина, не имеющая ни одного образа - это сток.
- C - функция пропускных способностей дуг, которая является положительной вещественной функцией, определенной на множестве дуг графа, т. е. каждой дуге v графа поставлено в соответствие положительное число C(v), называемое **пропускной способностью дуги V.**

Основные понятия

- Вершина, не имеющая ни одного прообраза называется **входом сети или источником** и обычно обозначается V0, а вершина, не имеющая ни одного образа называется **выходом сети или стоком** и обозначается U0. В транспортной сети существует один исток и один сток.
- **Потоком** в транспортной сети Т называется неотрицательная вещественная функция, определенная на множестве дуг, удовлетворяющая условиям:
- 1) ограниченности: поток по любой дуге сети не превосходит пропускной способности этой дуги;
- 2) сохранения: суммарный поток, заходящий в любую вершину сети (кроме истока и стока) равен суммарному потоку, выходящему из этой вершины.

Основные понятия

- Дуга сети называется **насыщенной**, если поток по этой дуге равен пропускной способности этой дуги.
- Поток по пути называется **полным**, если хотя бы одна дуга пути насыщена.
- Поток в сети - это функция, определенная на множестве дуг. **Величиной потока** называется сумма значений этой функции по всем выходным дугам сети (выходные дуги сети - это дуги, инцидентные стоку). Понятия потока и величины потока в сети часто путают, однако между ними существует различие: поток - это функция, а величина потока - число.
- **Разрезом сети** называется множество, которому принадлежит исток, и не принадлежит сток. Т.е. разрез это минимальное (в смысле отношения включения) множество дуг, удаление которых “разрывает” все пути, соединяющие исток и сток.

Основные понятия

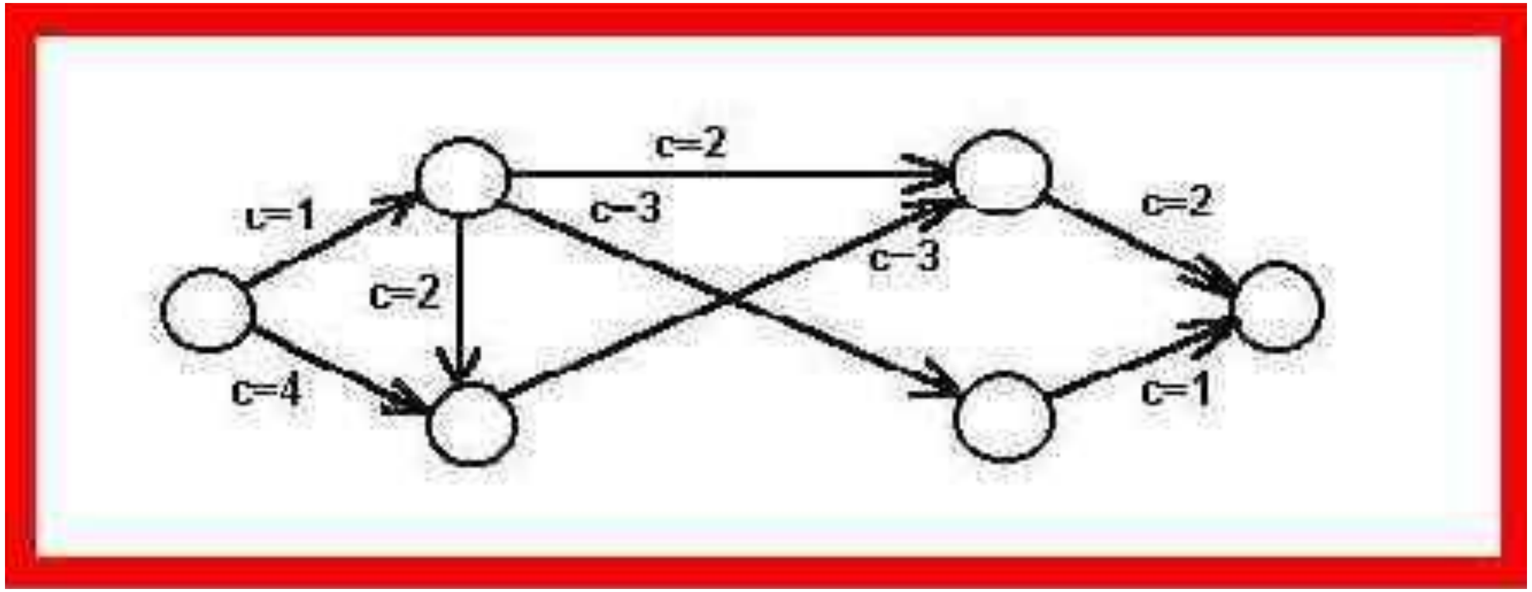
- **Пропускной способностью разреза** называется число, равное сумме пропускных способностей дуг этого разреза.
- Разрез называется **минимальным**, если имеет наименьшую пропускную способность

Теорема Форда-Фалкерсона

В любой транспортной сети величина любого максимального потока равна пропускной способности любого минимального разреза.

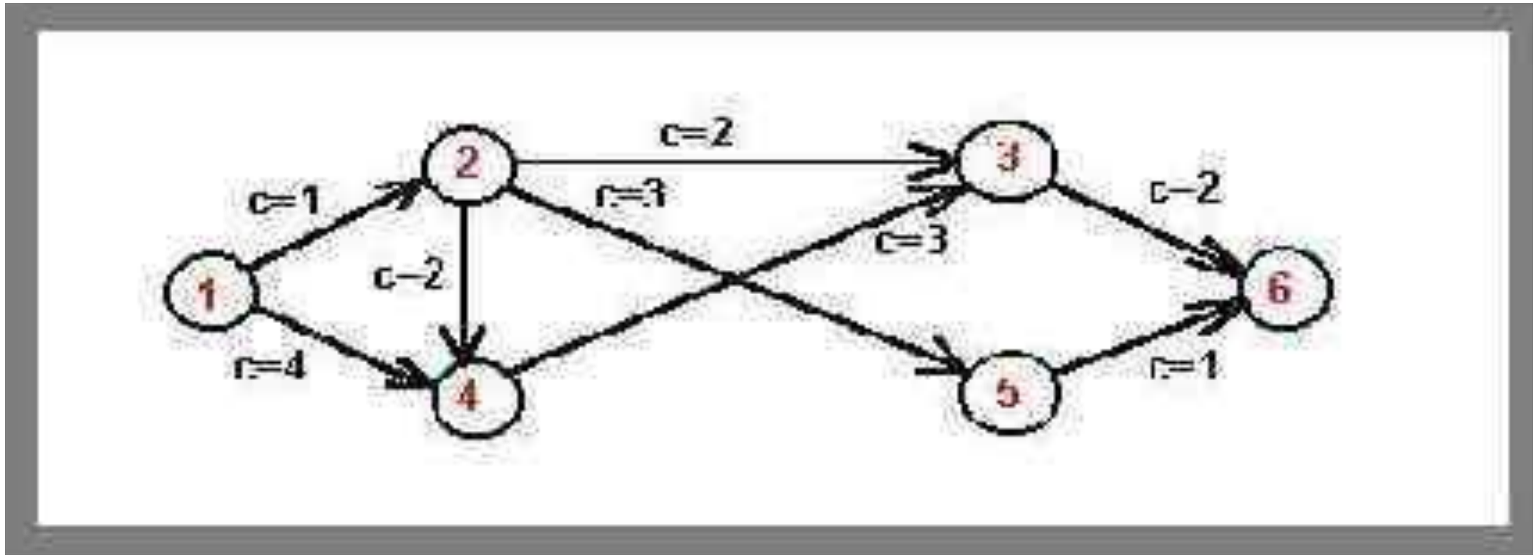
Постановка задачи

- Найти максимальный поток в транспортной сети.



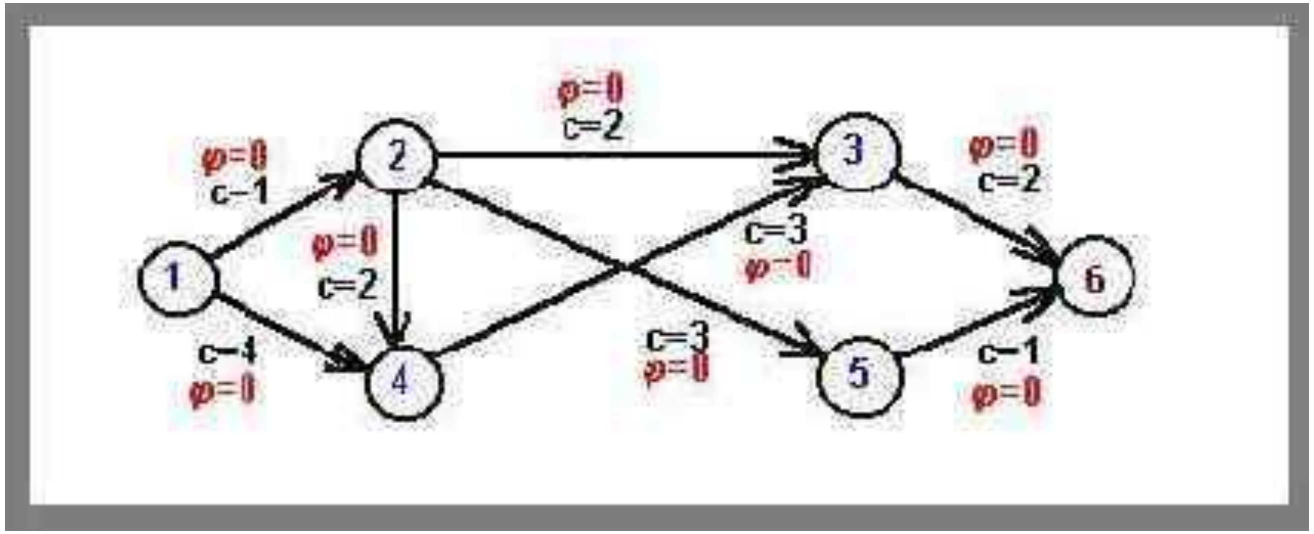
Алгоритм Форда-Фалкерсона

1. Пронумеровать все вершины сети произвольным образом, кроме истока и стока.



Алгоритм Форда-Фалкерсона

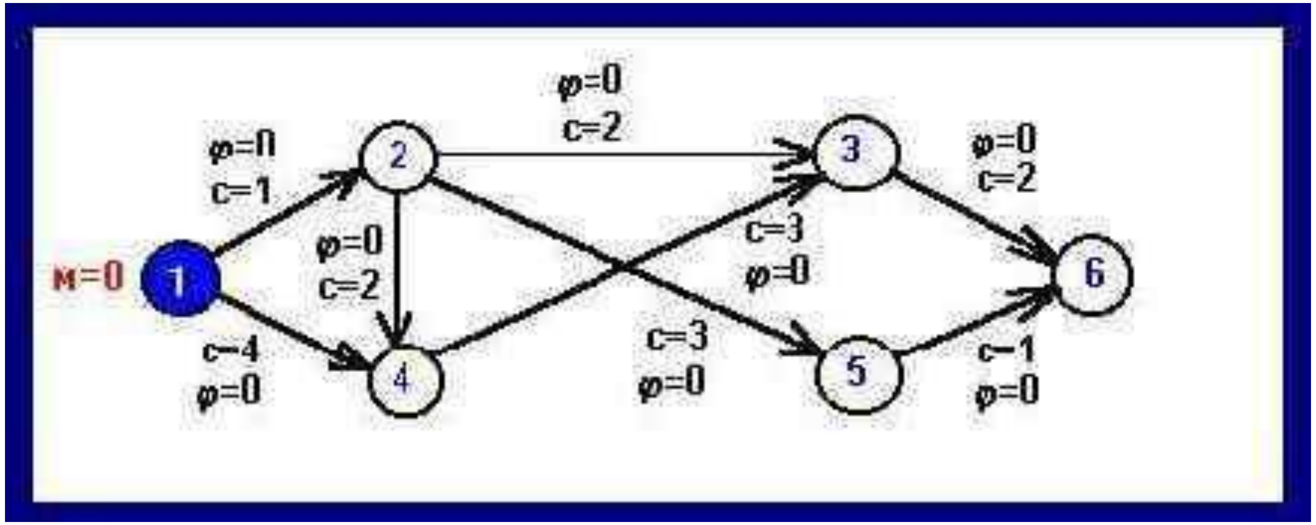
2. Задать некоторый начальный поток в сети (например, нулевой).



Алгоритм Форда-Фалкерсона

3. Вершинам сети присвоить целочисленные метки, а дугам - знаки “+” и “-” по следующим правилам:

- а) вершине-истоку присвоить метку 0.

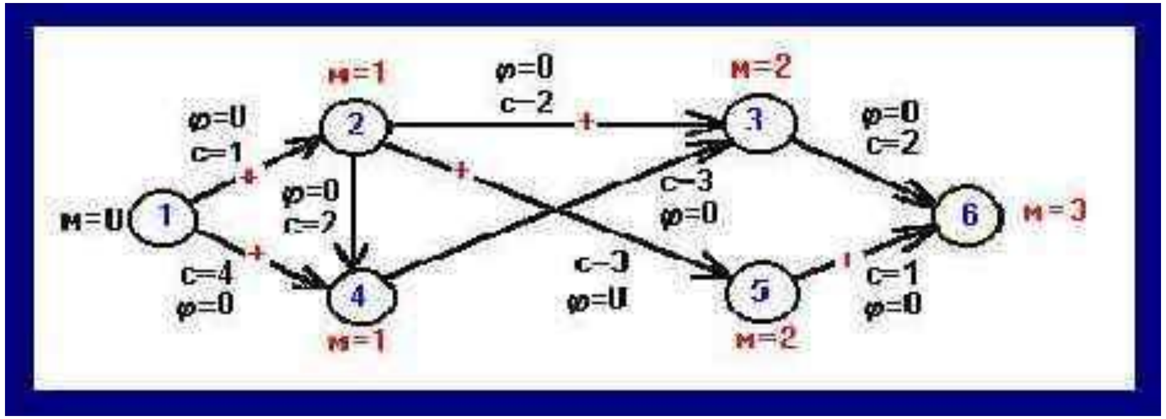


Алгоритм Форда-Фалкерсона

- b) находим непомеченную вершину W, смежную помеченной вершине V. Если поток по соединяющей вершины V-W дуге меньше пропускной способности этой дуги, то происходит помечивание, иначе переходим к рассмотрению следующей вершины. Если вершина W является образом помеченной вершины V, то происходит **прямое помечивание**: вершина W получает метку, равную номеру вершины V, соединяющая вершины V-W дуга получает метку “ + ” и мы переходим к рассмотрению следующей вершины. Если вершина W не имеет ни одного помеченного прообраза, то происходит **обратное помечивание**: вершина W получает метку, равную номеру вершины V (являющейся в данном случае её образом), соединяющая вершины W-V дуга получает метку “ - ” и мы переходим к рассмотрению следующей вершины. Процесс помечивания продолжается до тех пор, пока все удовлетворяющие этим условиям вершины не получат метку.

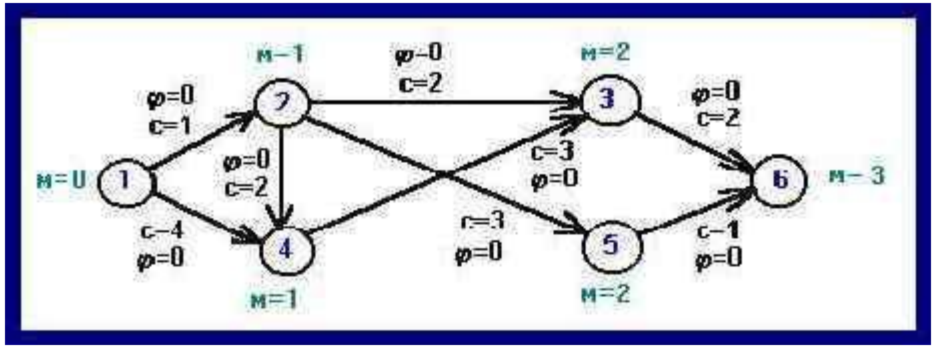
Алгоритм Форда-Фалкерсона

- Прямое помечивание: Пусть w – непомеченная, а v – помеченная вершины. Тогда вершине w ∈ Г (v), такой что φ (v, w) < c (v, w) присвоить метку, равную номеру вершины v, а дуге (v, w) знак “ + ”



Алгоритм Форда-Фалкерсона

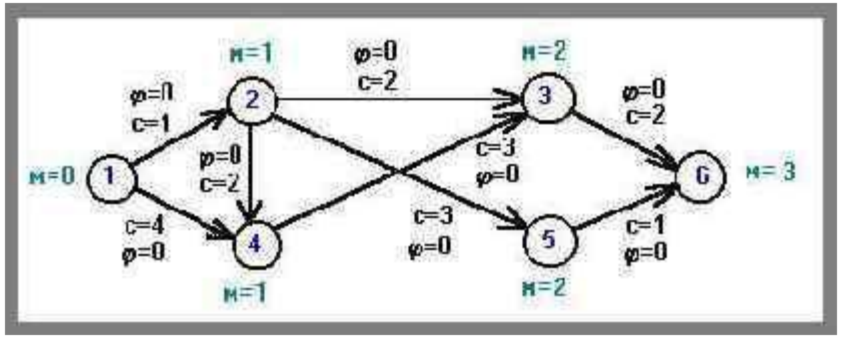
- Обратное помечивание: вершине w ∈ Г-(v), такой что φ (v, w) > 0, присвоить метку, равную номеру вершины v, а дуге (w, v) – знак “ - ”. Таких вершин на этом шаге не найдено.



Алгоритм Форда-Фалкерсона

4. Если в результате процедуры помечивания вершина-сток метки не получила, то текущий поток - максимальный, задача решена. В противном случае, перейти к пункту 5.

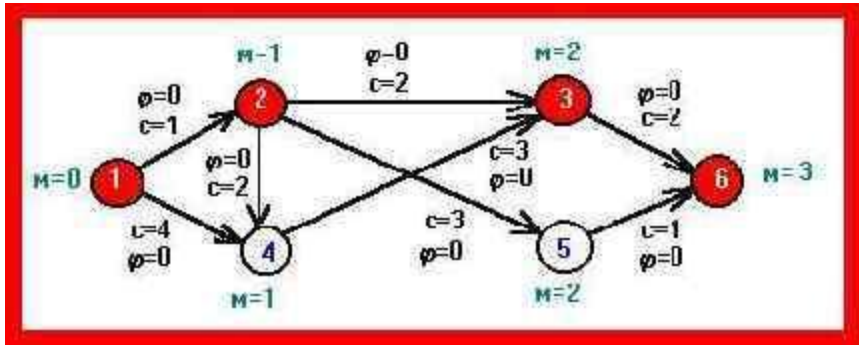
- Вершина №6 (сток) получила метку. Значит, максимальный поток еще не найден. Продолжаем решение.



Алгоритм Форда-Фалкерсона

5. Рассмотреть последовательность вершин L = (U0, . . . , v0), метка каждой из которых равна номеру следующей за ней вершины, и множество дуг M, соединяющих соседние вершины из L.

- Рассмотрим последовательность вершин λ-(v6,v,…,vi,v1), каждая из которых имеет метку, равную номеру следующей вершины и последовательность дуг μ, соединяющих соседние вершины из λ: λ-(v6,v,…,vi,v1).



Алгоритм Форда-Фалкерсона

- Построить новый поток по схеме:
- Если дуга принадлежит множеству М и имеет знак “ + ”, то новый поток по этой дуге = старый поток по этой дуге + К
- Если дуга принадлежит множеству М и имеет знак “ - ”, то новый поток по этой дуге = старый поток по этой дуге – К
- Если дуга не принадлежит множеству М, то новый поток по дуге = старый поток по этой дуге.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

Зададим новый поток по правилу: Если $(\gamma \notin \mu) \Rightarrow \varphi^*(\gamma)=\varphi(\gamma)$;

Если $(\gamma \in \mu$ и имеет знак '+') $\Rightarrow \varphi^*(\gamma)=\varphi(\gamma)+K$;

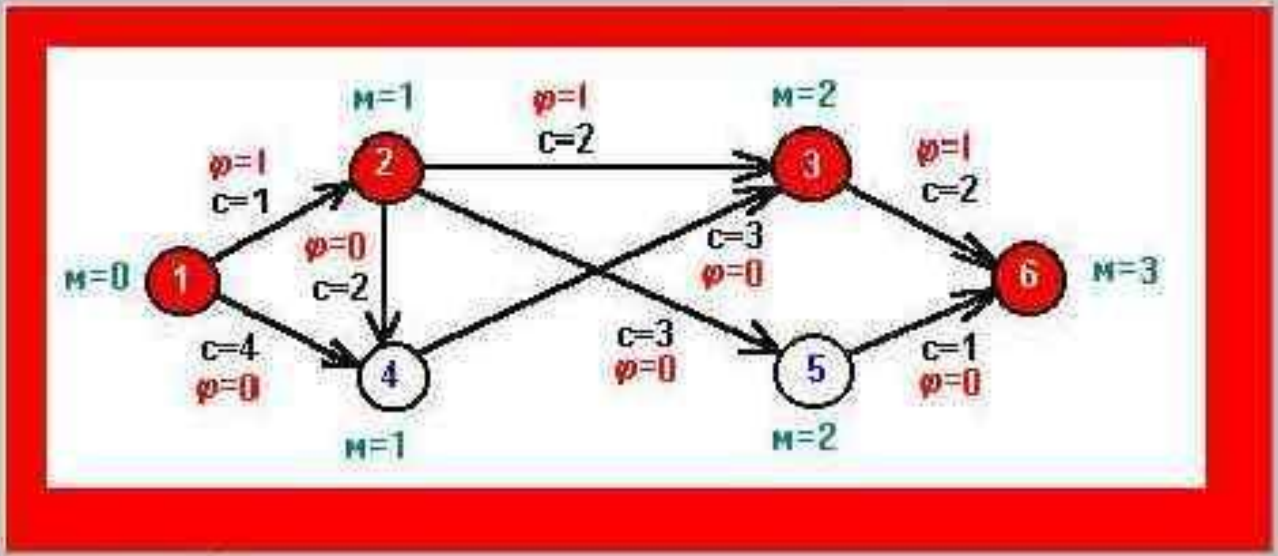
Если $(\gamma \in \mu$ и имеет знак '-') $\Rightarrow \varphi^*(\gamma)=\varphi(\gamma)-K$;

Где $K=\min\{K1, K2\}$,

$K1=\min\{c(\gamma) - \varphi(\gamma)\}$, $\gamma \in \mu$ и имеет знак '+'

$K2=\min\{\varphi(\gamma)\}$, $\gamma \in \mu$ и имеет знак '-'

В нашем случае K1=1, K=1, новый поток показан на рисунке:



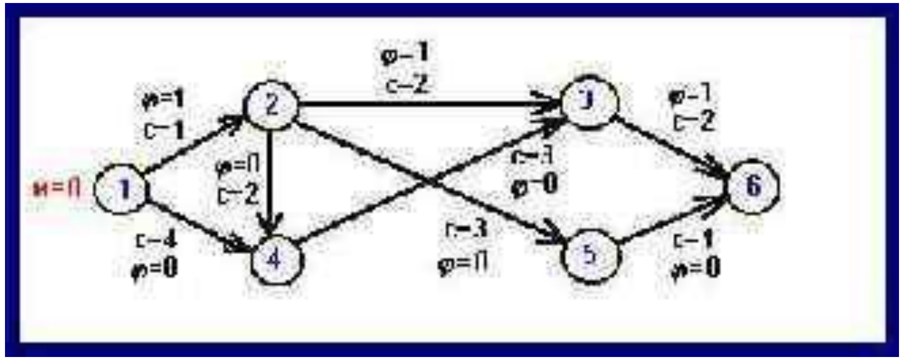
Переход к пункту 3.1.

Схема нахождения К

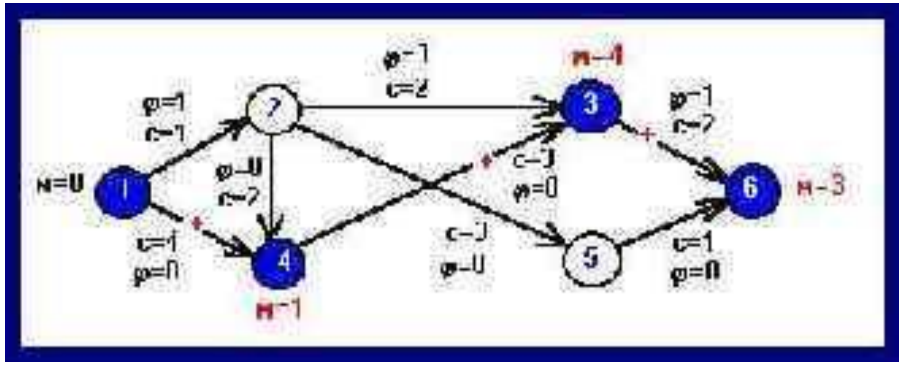
- К = min{ К1; К2 }, где
- Для нахождения К1 рассматриваются все дуги, принадлежащие множеству М и имеющие знак “ + ” и для каждой такой дуги вычисляется разность между пропускной способностью дуги и потоком по этой дуге. Затем из этих значений разностей выбирается минимальное значение и присваивается К1.
- Для нахождения К2 рассматриваются все дуги, принадлежащие множеству М и имеющие знак “ - ”. Затем из этих дуг выбирается дуга с минимальным потоком и значение потока по этой дуге присваивается К2.
- Перейти к п. 3.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

- Вершине №1 (истоку) присвоить метку “ 0 ”.

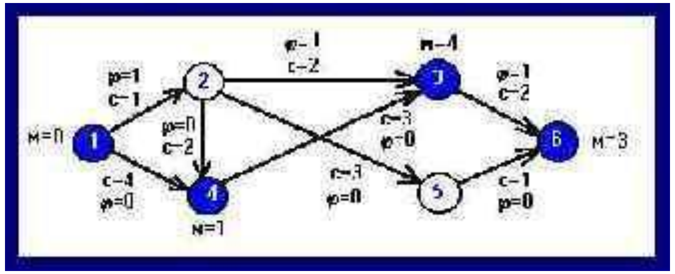


- Прямое помечивание.

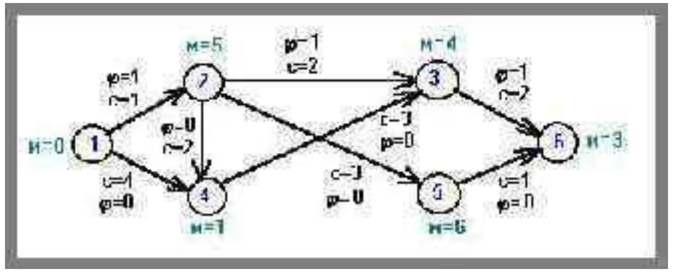


Алгоритм Форда-Фалкерсона

- Обратное помечивание – соответствующих вершин не найдено.

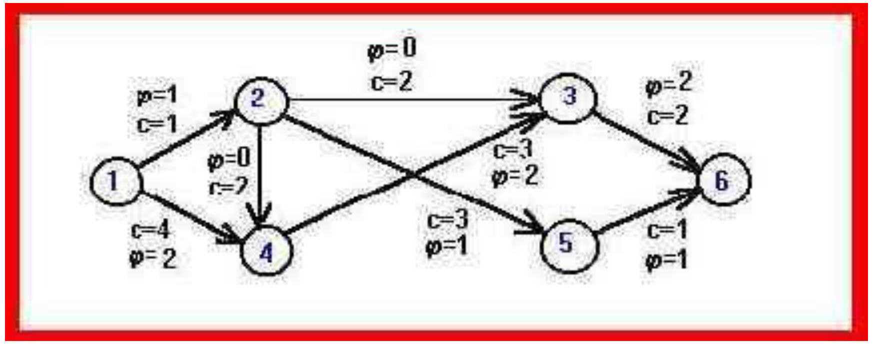


- Вершина №6 (сток) получила метку. Значит, максимальный поток еще не найден. Продолжаем решение.



Алгоритм Форда-Фалкерсона

- Вершина №6 (сток) не получила метку. Значит, задача решена.
- Максимальный поток найден.



Дисциплина: «МДК 01.03. Математическое моделирование»

Тема «Задача о максимальном потоке и алгоритм Форда–Фалкерсона»

Преподаватель спец. дисциплин Радунцева Александра Антоновна