Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
лицей № 6 городского округа Тольятти

Метод рационализации при решении неравенств

урок повторения по алгебре
в 11 профильном классе

Подготовила
Овчинникова Наталья Александровна,
учитель математики высшей категории
МБУ лицея №6 г. о. Тольятти

Метод рационализации неравенств известен около 50 лет, встречался под названиями:

- метод декомпозиции;
- метод замены множителей;
- обобщение метода интервалов

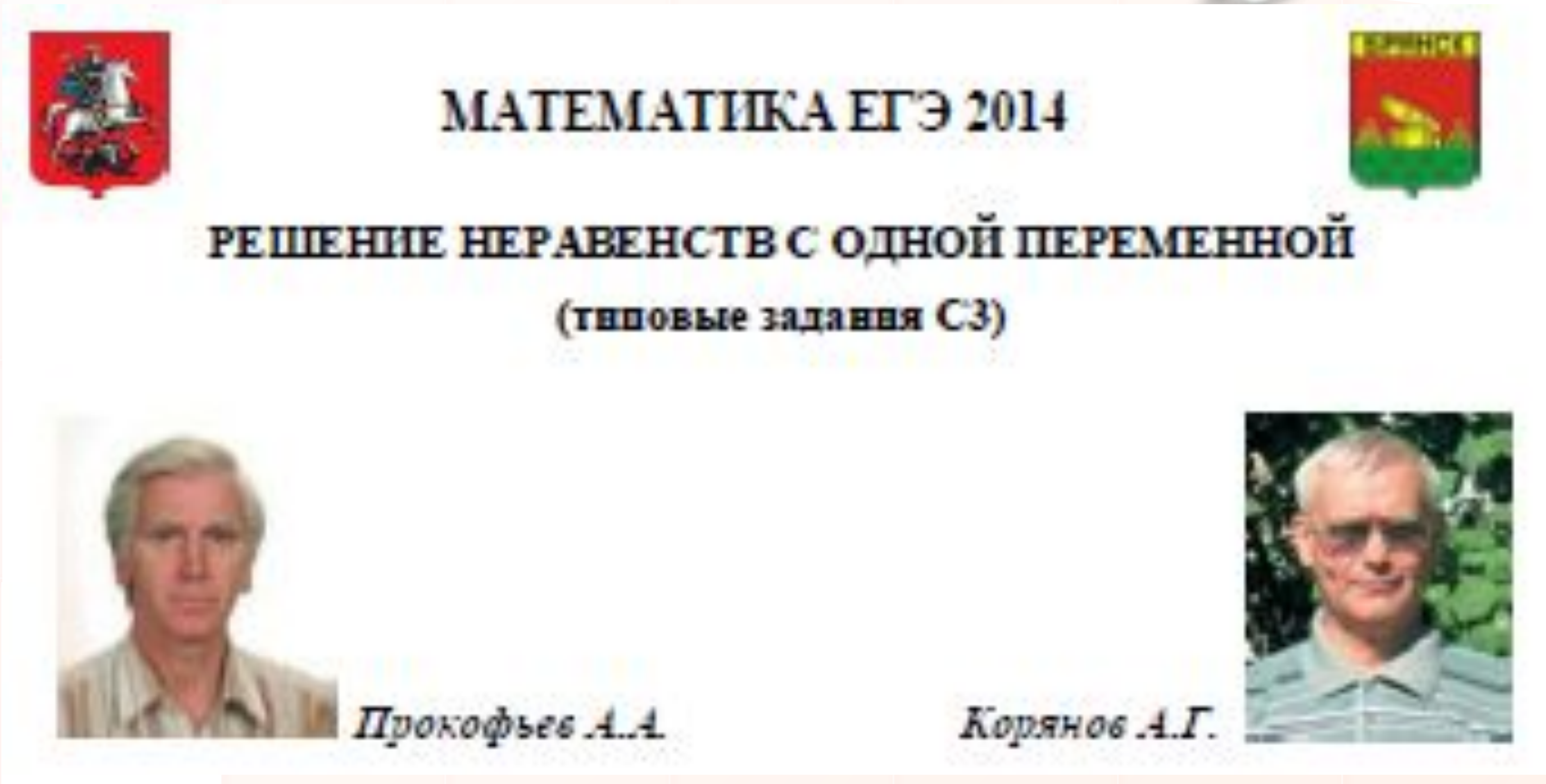
Данный метод позволяет
с помощью условий равносильности
сводить решение целых классов
сложных неравенств
к решению
простых рациональных неравенств
классическим методом интервалов.

Идея метода рационализации состоит в использовании свойств монотонной функции.

Доказательства равносильных переходов приведены в пособии:

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2014. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (типовые задания С3)

Прокофьев А.А., Корянов А.Г.



МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2014

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(типовые задания С3)

Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.

http://alexlarin.net/ege/2014/C3-2014.pdf

Суть метода рационализации заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x) (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство G(x)$\vee$ 0 равносильно неравенству F(x)$\vee$ 0 в области определения выражения F(x).

где $\vee$ - один из знаков <, >, ≤, ≥

Метод рационализации используют и при решении неравенств вида:

$$F(x)=\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_l(x)}\vee 0$$

Любой из множителей можно заменять на совпадающий с ним по знаку

Таблица замены множителей

№	Выражение F	Выражение G
1.	$\log_h f \vee \log_h g$	$(h-1)(f-g)\vee 0$
2.	$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1)\vee 0$
3.	$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g)\vee 0$
4.	$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$
5.	$\lvert f\rvert \vee \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)\vee 0$

$\vee$ - один из знаков $<$, $>$, $\leq$, $\geq$

Пример 1

$$\log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4}\geq -4$$

$$\begin{cases} 5-x>0 \\ 5-x\neq 1 \\ x+2>0 \\ (5-x-1)(x+2-1)\geq 0 \end{cases}$$

$$\log_{5-x}(x+2)-4\geq -4$$

$$\log_{5-x}(x+2)\geq 0$$

$$Ответ:[-1;4)$$

Пример 2

$$\log_x(3-x)\cdot\log_x(4-x)-\log_x\left(x^2-7x+12\right)+1\geq 0$$

Решение :

$$\log_x(3-x)\cdot\log_x(4-x)-\log_x(3-x)-\log_x(4-x)+1\geq 0$$

$$(\log_x(3-x)-1)\cdot(\log_x(4-x)-1)\geq 0$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 3-x>0 \\ (x-1)^2(3-x-1)(4-x-1)\geq 0 \end{cases}$$

Ответ : $(0;1)\cup(1;1{,}5]\cup[2;3)$

Пример 3

$$\log_{2x^2-x}(3x-1)\cdot\log_{2x-x^2}(3-2x)\geq 0$$

$$\begin{cases} 2x^2-x>0 \\ 2x^2-x\neq 1 \\ 3x-1>0 \\ 2x-x^2>0 \\ 2x-x^2\neq 1 \\ 3-2x>0 \\ (2x^2-x-1)(3x-1-1)(2x-x^2-1)(3-2x-1)\geq 0 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ}:\left[\frac{2}{3};1\right)\cup(1;1,5)$$

Пример 4

$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2$$

$$\begin{cases} |x+2|>0 \\ |x+2|\ne 1 \\ 4+7x-2x^2>0 \\ \left(|x+2|-1\right)\left(4+7x-2x^2-(x+2)^2\right)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -2, x \neq -1, x \neq -3 \\ -0{,}5 < x < 4 \\ (x+2-1)(x+2+1)\left(3x-3x^2\right) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}5 < x < 4 \\ -3x(x+1)(x+3)(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ}: (-0{,}5;0] \cup [1;4)$$

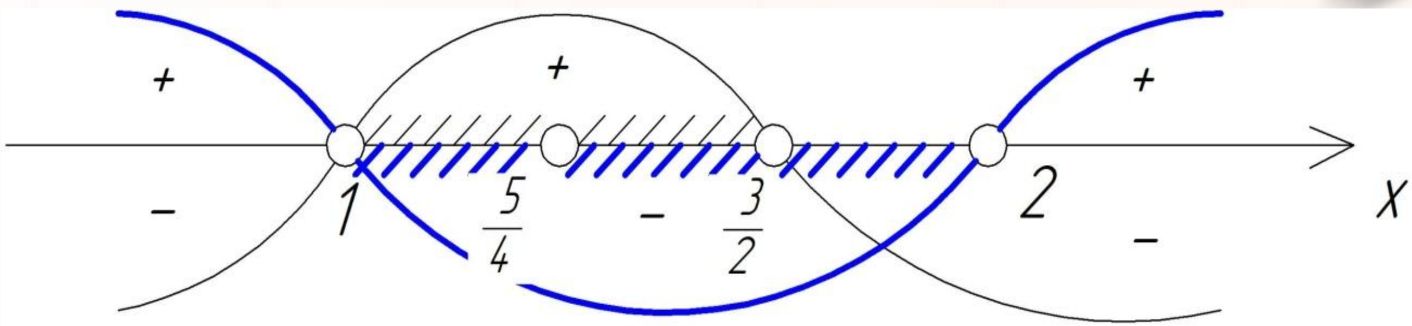
Пример 5

$$\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5|>0$$

Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases} (-4x^2+12x-8-1)(|4x-5|-1)>0 \\ -4x^2+12x-8>0 \\ -4x^2+12x-8\neq 1 \\ 4x-5\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(2x-3)^2((4x-5)^2-1)>0 \\ (x-1)(x-2)<0 \\ x\neq \dfrac{5}{4}, x\neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$



Окончательно получаем, что решением являются все ***x*** такие, что

$$x \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$$

Ответ: $x \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$

Пример 6

$$\left(x^2+2x-2\right)^{2x^2-x-1}<\left(x^2+2x-2\right)^{9-x^2}$$

$$\begin{cases} x^2+2x-2>0 \\ \left(x^2+2x-2-1\right)\left(2x^2-x-1-9+x^2\right)<0 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ}:\left(-3;-1-\sqrt{3}\right)\cup(1;2)$$

Пример 7

Для каждого значения параметра $\boldsymbol{a}$ **найти решения неравенства**

$$x^{\sin x}\log_a x + x^a \log_a \frac{a}{x} < x^{\sin x},$$

удовлетворяющие условию $x < \dfrac{\pi}{2}$

Решение:

$$x^{\sin x}\log_a x + x^a\log_a \frac{a}{x} < x^{\sin x}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

$$x^{\sin x}\log_a x + x^a\cdot\left(\log_a a - \log_a x\right) - x^{\sin x} < 0$$

$$x^{\sin x}\log_a x + x^a - x^a\log_a x - x^{\sin x} < 0$$

$$\left(\log_a x - 1\right)\left(x^{\sin x} - x^a\right) < 0$$

$$(a-1)(x-a)(x-1)(\sin x - a) < 0$$

Список используемых источников:

1. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. *Материала курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»: лекции 1 – 4 . М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2012*

https://edu.1september.ru/distance/

Список используемых источников:

2. Коропец З.Л. , Коропец А.А. , Алексеева Т.А.
Математика. Нестандартные методы решения неравенств и их систем.
Орел, 2012

3. Прокофьев А.А. Корянов А.Г.
Математика ЕГЭ 2014.
Решение неравенств с одной переменной (типовые задания С3)
http://alexlarin.net/ege/2014/C3-2014.pdf