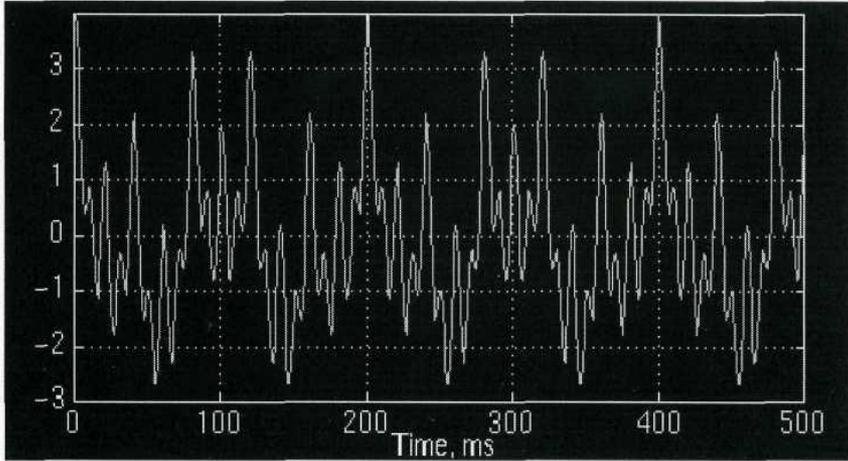
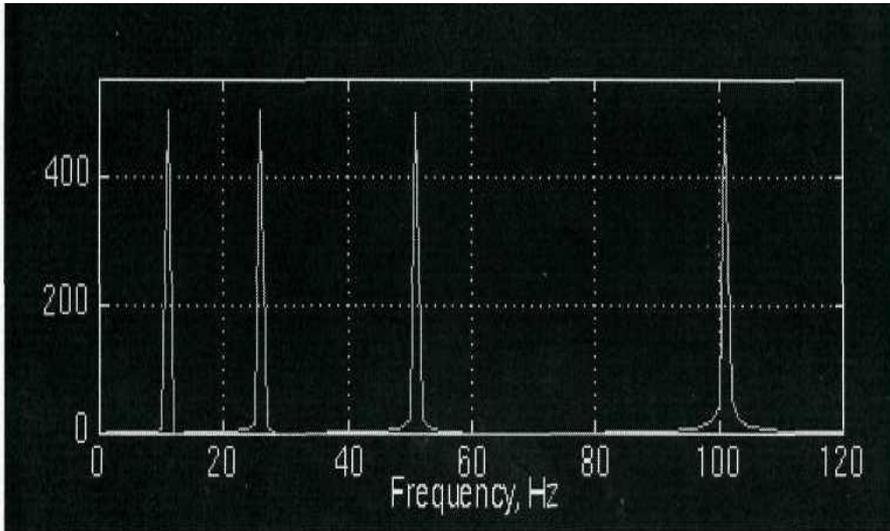


$$x(t) = \cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 25t) + \cos(2\pi 50t) + \cos(2\pi 100t)$$



Исходные данные – Σ 4х синусоид

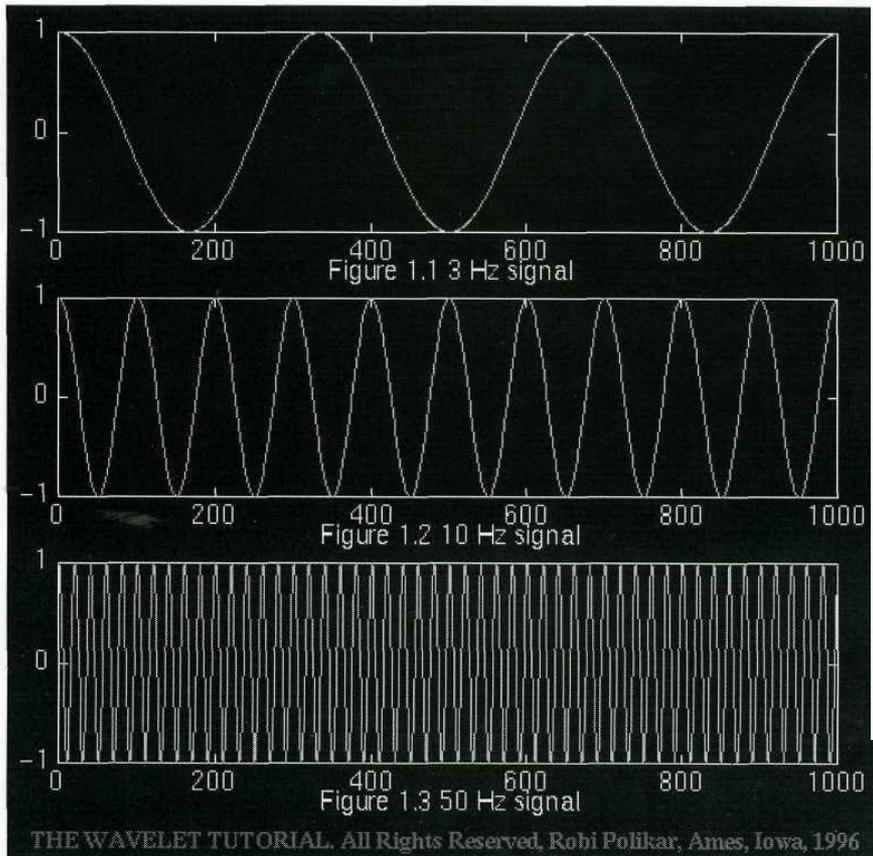
-



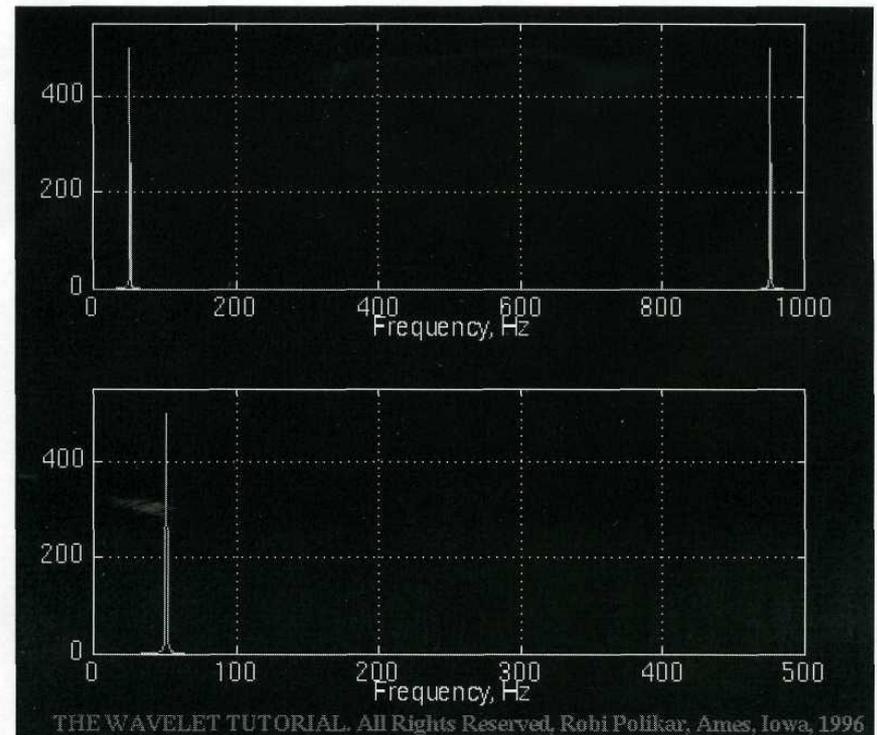
Результат ПФ (FT)

ВЕДЕНИЕ В ВЕЙЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

амплитудно-временное
представление сигнала
3Гц, 10Гц и 50Гц



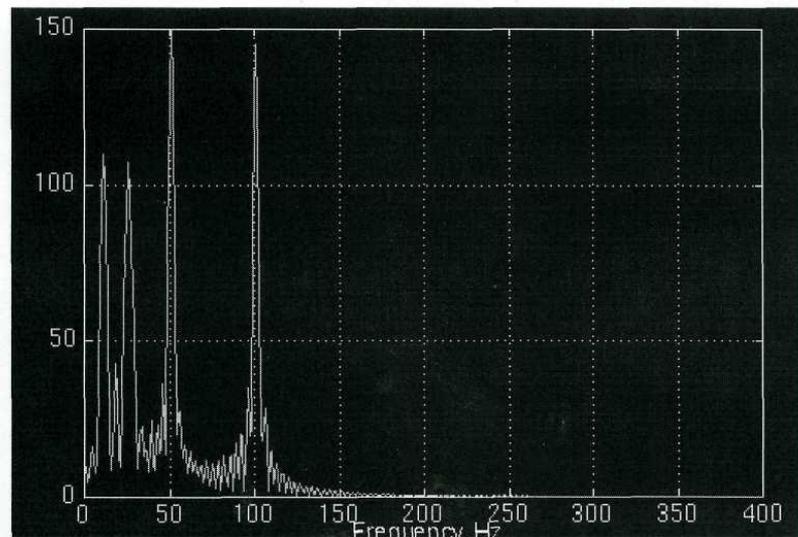
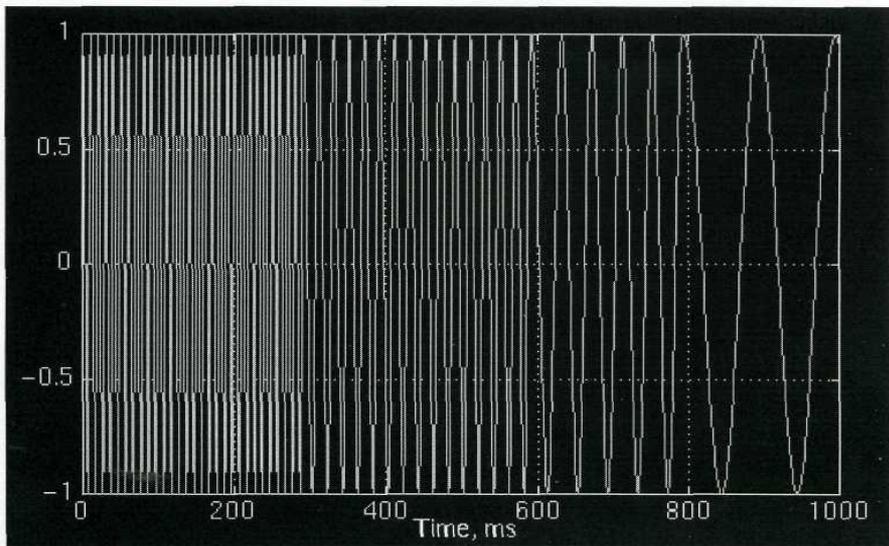
Частотный спектр наличие
тех или иных частот в сигнале
синусоида 50 Гц



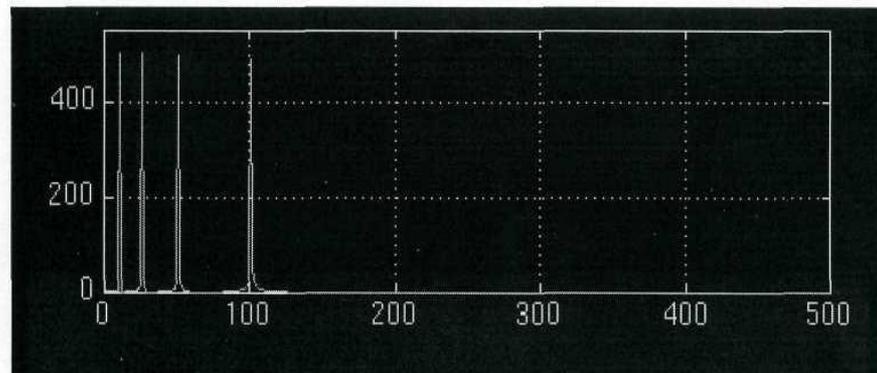
В какой момент времени возникла
та или иная частота (закончилась)
ПФ ответа не дает

Нестационарный сигнал в интервале времени от 0 до 300мс частота сигнала 100Гц, от 300 до 600мс - 50Гц, от 600 до 800мс - 25Гц и на последнем интервале - 10Гц.

ПФ этого сигнала



А здесь показано его ПФ:

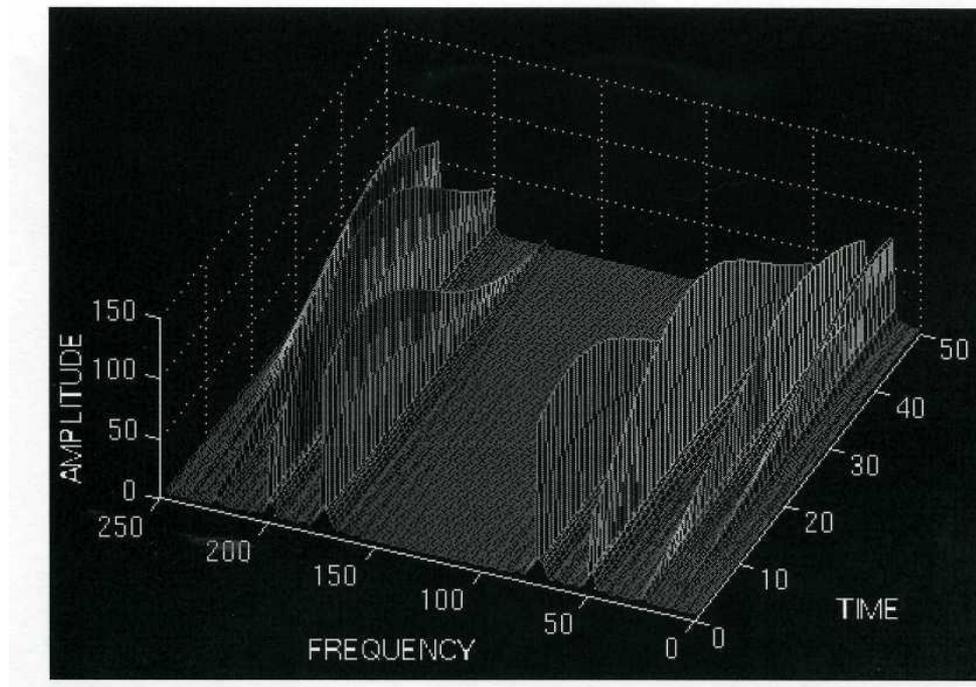


ПФ стационарного сигнала , см.

Нет временной локализации спектральных компонент, необходимо обратиться к ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ сигнала.

Проблемы ОПФ имеют свои корни в явлении, которое называется **принципом неопределенности Гейзенберга.**

Удастся получить хорошее разрешение по времени (плохое по частоте) на высоких частотах и хорошее разрешение по частоте (плохое по времени) на низких частотах.



НЕОБХОДИМОСТЬ получить частотно- временное представление о сигнале

- Уже в 1910 году А.Хаар опубликовал полную ортонормальную систему базисных функций с локальной областью определения (теперь они называются вейвлетами Хаара).
- Первое упоминание о вейвлетах появилось в литературе по цифровой обработке и [анализу](#) сейсмических сигналов (работы А. Гроссмана и Ж.Морле). В последнее время возникло и оформилось целое научное направление,
- Вейвлеты широко применяются для [фильтрации](#) Вейвлеты широко применяются для фильтрации и предварительной обработки данных, анализа состояния и [прогнозирования](#) Вейвлеты широко применяются для фильтрации и предварительной обработки данных, анализа состояния и прогнозирования ситуации на фондовых рынках, [распознавания образов](#) Вейвлеты широко применяются для фильтрации и предварительной обработки данных, анализа состояния и прогнозирования ситуации на фондовых рынках, распознавания образов, при обработке и [синтезе](#) Вейвлеты широко применяются для фильтрации и предварительной обработки данных, анализа состояния и прогнозирования ситуации на фондовых рынках, распознавания образов, при обработке и синтезе различных

Главная задача

- Такая Задача возникает всегда – , начиная от записи показаний датчика и кончая оцифрованной речью или изображением, когда требуется провести **многомасштабный анализ** ([multiscale analysis](#) анализ (multiscale analysis, [multiresolutional analysis](#)) , который заключается в том, чтобы взглянуть на сигнал сначала вплотную – под микроскопом, затем через лупу, потом посмотреть на него издалека.
- Это дает возможность - путем **последовательного огрубления (или уточнения) сигнала выявлять его локальные особенности (ударение в речи или характерные детали изображения) и подразделять их по интенсивности.**
- Кроме того, таким образом, обнаруживается динамика изменения сигнала в зависимости от масштаба. Если резкие скачки (например, аварийное отклонение показаний датчика) во многих случаях видны "невооруженным глазом", то взаимодействия событий на мелких масштабах, не всегда.
- Сосредоточившись только на мелких деталях, можно не заметить явлений, происходящих на **глобальном уровне.**

Введение в Вэйвлет преобразование (WT)

Идея применения вейвлетов для многомасштабного анализа заключается в том, что разложение сигнала производится по базису, образованному сдвигами и разномасштабными копиями функции-прототипа.

(WT по своей сути является фрактальным)

Фрактальное сжатие изображений — это алгоритм сжатия изображений потерями, основанный на применении систем итерируемых функций, (IFS). Т.е. применение к изображениям аффинных преобразований. Данный алгоритм известен тем, что в некоторых случаях позволяет получить очень высокие коэффициенты сжатия (лучшие примеры — до 500).

Аффинное преобразование — отображение

которое можно записать в виде:

$$f(x) = M \cdot x + v, \text{ обратимая матрица и}$$

$$x \rightarrow f(x) \\ v \in \mathbb{R}^n$$

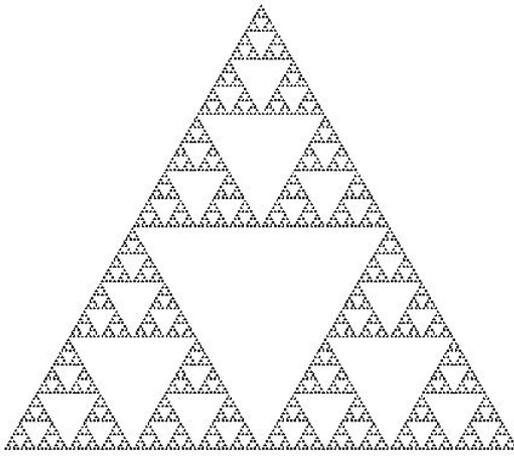


Рис. Треугольник Серпинского — изображение, задаваемое тремя аффинными преобразованиями

- Базисные функции называются вейвлетами (*wavelet*), если они определены на пространстве $L^2(\mathbf{R})$ (пространство комплекснозначных функций $f(t)$ на прямой с ограниченной энергией), колеблются вокруг оси абсцисс и быстро сходятся к нулю по мере увеличения абсолютного значения аргумента.



Свертка сигнала с одним из вейвлетов позволяет выделить характерные особенности сигнала в области локализации этого вейвлета, причем чем больший масштаб имеет вейвлет, тем более широкая область сигнала будет оказывать влияние на результат свертки.

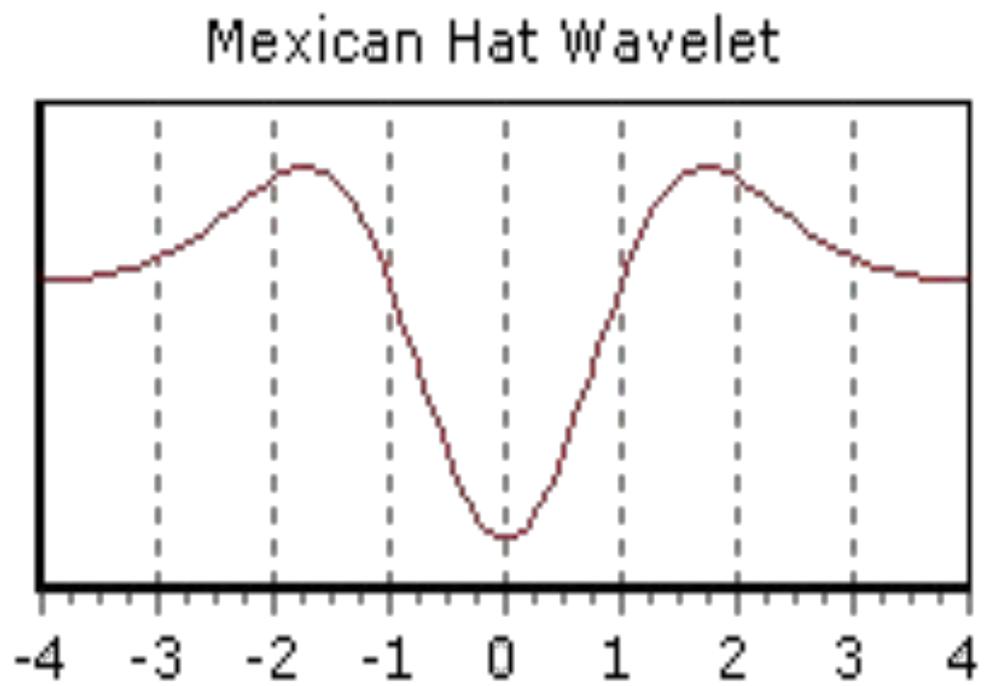


Рис. Вейвлет Мексиканское "Сомбреро"

- Чем лучше функция сконцентрирована во времени, тем больше она размазана в частотной области (принцип неопределенности).
-
- **Вэйвлеты позволяют хорошо локализовать низкочастотные детали сигнала в частотной области** (преобладающие гармоники), а высокочастотные – во временной (резкие скачки, пики и т.п.), и решить **Задачу –исследования** последовательности, называемой временным или динамическим рядом (наблюдения за изменением свойств системы через одинаковые промежутки времени- например, состояние атмосферы (температура, влажность, давление), электрокардиограмма (ЭКГ) пациента в больнице, курсы валют.
- Данные надо представить в каком-нибудь удобном для обработки виде
- Дискретное Фурье-преобразование позволяет свернуть большое число значений временного ряда в несколько коэффициентов, но при этом пропадает временная составляющая – из зависимости амплитуды от времени мы получаем зависимость амплитуды от частоты.

ПРЕИМУЩЕСТВО WT

- Состоит в том, что WT покрывает фазовую плоскость ячейками одинаковой площади, но разной формы (см рис.). Это позволяет помимо локализации низкочастотных деталей сигнала в частотной области (преобладающих гармоник), а высокочастотных – во временной (резкие скачки, пики и т.п.) исследовать поведение фрактальных функций – не имеющих производных ни в одной своей точке!

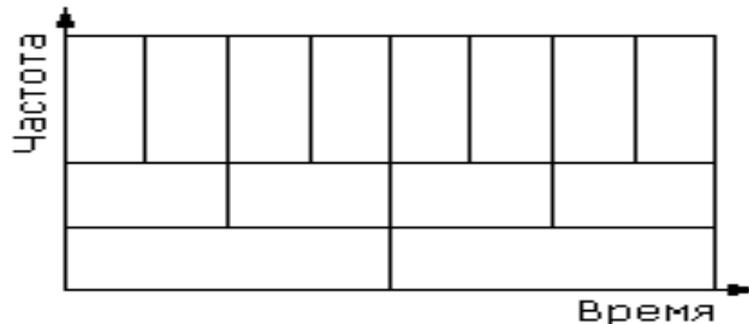


Рис. Фазовая плоскость вейвлет-преобразования

Основной отличительной особенностью WT - вейвлет-преобразований является новый базис разложения сигналов - вейвлетные функции. Свойства вейвлетов принципиально важны как для самой возможности разложения сигналов по единичным вейвлетным функциям, так и для целенаправленных действий над вейвлетными спектрами сигналов, в том числе с последующей реконструкцией сигналов по обработанным вейвлетным спектрам

- Вейвлеты могут быть **ортогональными, полуортогональными, биортогональными**. Вейвлетные функции могут быть симметричными, асимметричными и несимметричными, с компактной областью определения и не имеющие таковой, а также иметь различную степень гладкости.
- Некоторые вейвлет функции имеют аналитическое выражение, другие – быстрый алгоритм вычисления вейвлет-преобразования. Для практики желательно было бы иметь ортогональные симметричные и асимметричные вейвлеты,
- Наибольшее применение находят биортогональные вейвлеты.

БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- Различают вейвлеты по целевым задачам вейвлетных преобразований с позиций декомпозиции – реконструкции сигналов и с позиции полной информационной эквивалентности вейвлетного спектра сигналам временного (динамического, координатного) представления.
- **Определение вейвлета.** К вейвлетам относятся локализованные функции, которые конструируются из одного материнского вейвлета $\Psi(t)$ (или по любой другой независимой переменной) путем операций сдвига по аргументу (b) и масштабного изменения (a):
- $\Psi_{ab}(t) = (1/\sqrt{|a|}) \Psi((t-b)/a), \quad (a, b) \in \mathbb{R}, \quad \Psi(t) \in L^2(\mathbb{R}).$
- где множитель $(1/\sqrt{|a|})$ обеспечивает независимость нормы функций от масштабного числа 'a'.

• НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА

- $s(t) \in L^2(\mathbb{R}),$

- **CWT** применяется для качественного частотно-временного анализа, по смыслу соответствует преобразованию Фурье с заменой гармонического базиса $\exp(-j\omega t)$ на вейвлетный $\Psi((t-b)/a):$

- $C(a, b) = \langle s(t), \psi_{ab}(t) \rangle = (1/\sqrt{|a|}) s(t) \psi((t-b)/a),$
- $(a, b) \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

Вейвлетный масштабно-временной спектр $C(a,b)$ в отличие от фурье-спектра является **функцией двух аргументов: масштаба вейвлета 'a' (в единицах, обратных частоте), и временного смещения вейвлета по сигналу 'b' (в единицах времени)**, при этом параметры 'a' и 'b' могут принимать любые значения в пределах областей их определения.

Для количественных методов анализа (декомпозиция сигналов с возможностью последующей линейной реконструкции сигналов из обработанных вейвлет-спектров) в качестве вейвлетных базисов можно использовать любые локализованные функции $\psi(t)$, :

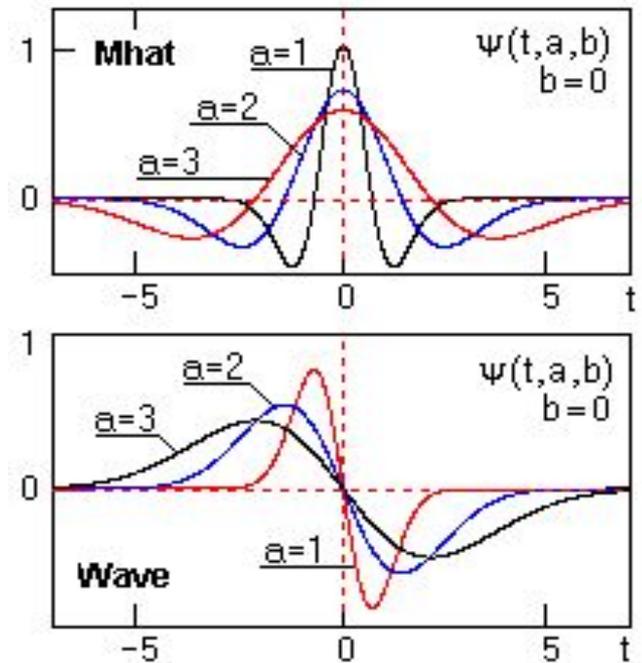


Рис. Простейшие неортогональные вейвлеты четного (Mhat) и нечетного (Wave) типов.

- Если $\{\psi_{ab}(t)\}$ и $\{\psi_{ab}^{\#}(t)\}$ функции-двойники и могут образовывать парные базисы функционального пространства $L^2(\mathbb{R})$ то они позволяют представить любую произвольную функцию в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ в виде ряда:
- $s(t) = \sum_{(a,b) \in I} C(a,b) \psi_{ab}^{\#}(t)$, $(a, b) \in I$,
- Пара двойников формирует семейства $\{\psi_{mk}(t)\}$ и $\{\psi_{zp}^{\#}(t)\}$, удовлетворяющие условию биортогональности на целых числах I :
- $\langle \psi_{mk}(t), \psi_{zp}^{\#}(t) \rangle = d_{mz} \cdot d_{kp}$, $m,k,z,p \in I$,
- возможно разложение сигналов на вейвлетные ряды с обратной формулой реконструкции.
- **СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТА**,
- **Локализация**. Вейвлет должен быть непрерывным, интегрируемым, иметь компактный носитель и быть локализованным как во времени (в пространстве), так и по частоте.

Свойства вейвлета,

- Если вейвлет в пространстве сужается, то его "средняя" частота повышается, спектр вейвлета перемещается в область более высоких частот и расширяется. Этот процесс должен быть линейным – сужение вейвлета вдвое должно повышать его "среднюю" частоту и ширину спектра также вдвое
- Вейвлетную функцию можно считать хорошо локализованной при выполнении условий:
- $\Psi(t) \leq C/(1+|t|)^{1+\epsilon}$, $\Psi(f) \leq C/(1+|f|)^{1+\epsilon}$, $C=\text{const}$, при $\epsilon > 0$.
- Нулевое среднее значение, т.е. выполнение условия для нулевого момента:
- $\int \Psi(t) dt = 0$,
- Это обеспечивает выделение локальных особенностей сигналов в пределах вейвлетного носителя на уровне региональных изменений и тренда, нулевого усиления постоянной составляющей сигналов, нулевого значения частотного спектра вейвлета при $\omega=0$, и локализацию спектра вейвлета в виде полосового фильтра с центром на определенной (доминирующей) частоте ω_0 .

Свойства вейвлета,

- Ограниченность. Необходимое и достаточное условие:
- $\|\Psi(t)\|^2 = \int |\Psi(t)|^2 dt < \infty$
- Автомодельность базиса или самоподобие
- Форма всех базисных вейвлетов $\Psi_{ab}(t)$ должна быть подобна материнскому вейвлету $\Psi(t)$, т.е. должна оставаться одной и той же при сдвигах и масштабировании (растяжении/сжатии), иметь одно и то же число осцилляций.
- WT несет избыточную информацию о сигнале, так как каждая точка фазовой плоскости оказывает влияние на его результат.
- Для точного восстановления сигнала достаточно знать его в WT на некоторой довольно редкой решетке в фазовой плоскости (например, только в центре каждой ячейки на **Фазовой плоскости WT**)
- Идея преобразования - масштабировать вейвлет в некоторое постоянное (например, 2) число раз, и сместить его во времени на фиксированное расстояние, зависящее от масштаба. При этом все сдвиги одного масштаба должны быть попарно ортогональны – такие вейвлеты называются ортогональными. При таком преобразовании выполняется свертка сигнала с некоторой функцией (так называемой
- **скейлинг-функцией**)

wavelet означает маленькая волна **WT** А. Хаар

Термин вейвлет-анализ по смыслу аналогичен термину Фурье-анализ. В обоих случаях речь идет о представлении исследуемого процесса в виде линейной комбинации различных функций, именуемых базисом соответствующего преобразования.

Для входного сигнала, представленного массивом $2n$ чисел, вейвлет-преобразование (*WT*) Хаара просто группирует элементы по 2 и образует от них суммы и разности. Группировка сумм проводится рекурсивно (в случае чётной длины последовательности сумм) для образования следующего уровня разложения. В итоге получается $2n-1$ разность и 1 общая сумма..

Слово вейвлет означает маленькая волна. Под маленькой понимается то, что эта функция (окно) имеет конечную ширину (компактный носитель). Слово «волна» отражает тот факт, что вейвлет-функция осциллирует.

Термин «материнский» означает, что функции с различной шириной носителя, используемые в преобразовании, порождаются одной базовой функцией - материнским вейвлетом. То есть материнский вейвлет является прототипом для всех оконных функций.

Термин сдвиг используется здесь в том же смысле, что и при ПФ: он относится к местоположению окна, и окно движется вдоль сигнала. Этот термин относится, таким образом, к временной информации, присутствующей в результате преобразования.

В случае WT мы не имеем частотного параметра, как это было при ОПФ. Вместо него здесь имеется параметр масштаба, который можно определить как величину, обратную частоте.

Для преобразования Фурье базисом являются функции $W_n(t)$, полученные из функции FT

$$\begin{array}{ccc} \text{FT} & & \text{WT} \longrightarrow \\ w(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, & \longrightarrow & \Psi_n(t) = \Psi(nt). \\ w(t) \text{ имеет период } 2\pi. & & \end{array}$$

FT широко используется для спектрального анализа сигналов, однако имеет ряд недостатков

а) исходный сигнал заменяется на периодический, с периодом равным длительности исследуемого образца,

б) FT плохо работает при изменении параметров процесса со временем (нестационарности), поскольку дает усредненные коэффициенты для всего исследуемого образца

Как для оконного Фурье преобразования (**ОПФ**) в случае непрерывного (**CFT**) сигнал перемножается с функцией (вейвлетом), также как и с оконной функцией при ОПФ, и преобразование выполняется отдельно для разных участков времени сигнала.

Однако существует две существенные разности между **ОПФ** и НВП (**CFT**) : Ширина окна изменяется, так что преобразование вычисляется для каждой спектральной компоненты, что является наиболее важным свойством вейвлет-преобразования. (в формуле $a \rightarrow s, b \rightarrow \tau$)

$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt$$

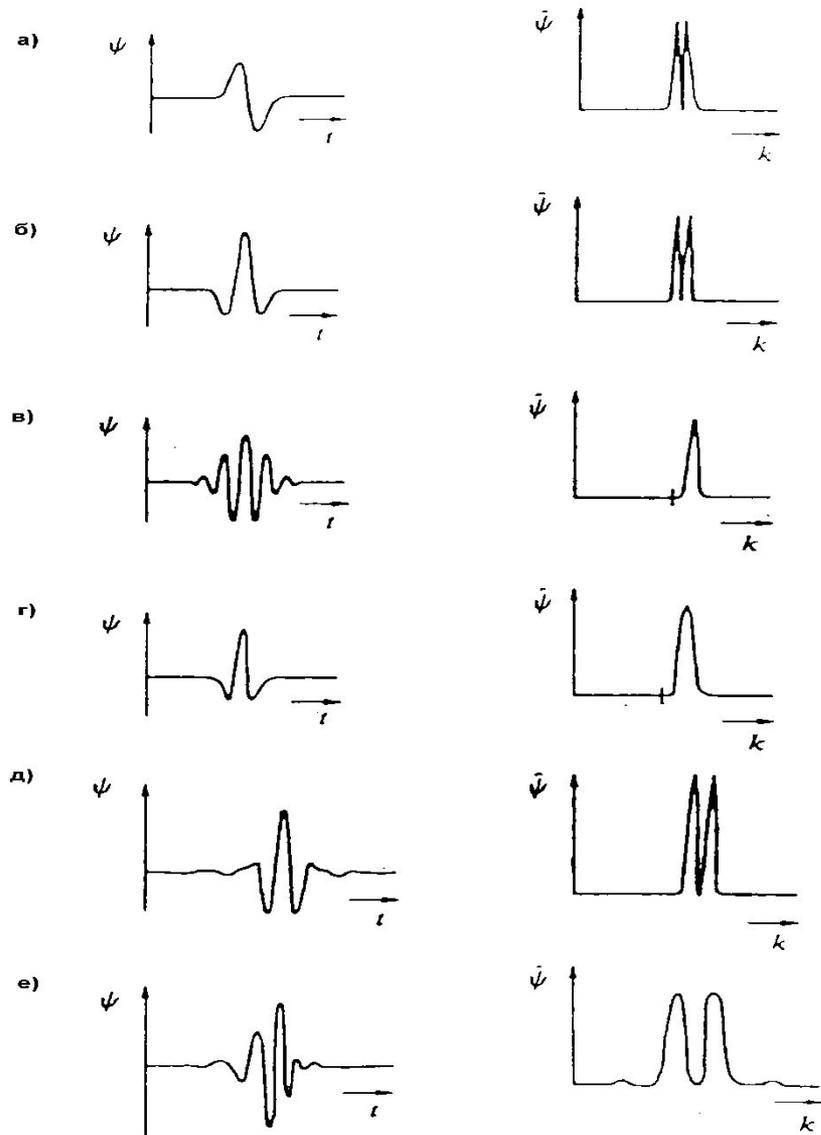
Непрерывное вейвлет-преобразование определяется следующим образом Как видно из равенства, преобразованный сигнал есть функция двух переменных, **tau** и **s**, параметры сдвига и масштаба Слово вейвлет означает маленькая волна. Под маленькой понимается то, что эта функция (окно) имеет конечную ширину (компактный носитель).

Слово «волна» отражает тот факт, что вейвлет-функция осциллирует. Термин «материнский» означает, что функции с различной шириной носителя, используемые в преобразовании, порождаются одной базовой функцией - материнским вейвлетом.

Масштаб определяется как величина, обратная частоте.

Вейвлет-преобразование (WT) в большой степени позволяет преодолеть 14 -17 перечисленные недостатки FT, поскольку базисные функции WT обладают свойством *временной локализации*, обладают конечной энергией (нормой):

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$



Часто используемые вейвлеты:

(а)WAVE, (б)МНАТ - мексиканская шляпа, (в) Morlet - Морле, (г)Paul - Пауля, (д) LMB, (е)Daubechies - Добечи. Вейвлеты (в) и (г) являются комплексными.

Временное представление некоторых вейвлетов и соответствующие им Фурье-образы.

представляется в виде :

$$f(t) = c_0 \psi(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{jk} \varphi_{jk}(t)$$

$\Psi(t)$ - материнский вейвлет ; $\{\varphi_{jk}(t)\}$ - базис WT функции, полученные из материнского вейвлета $j(t)$

путем двух основных операций:

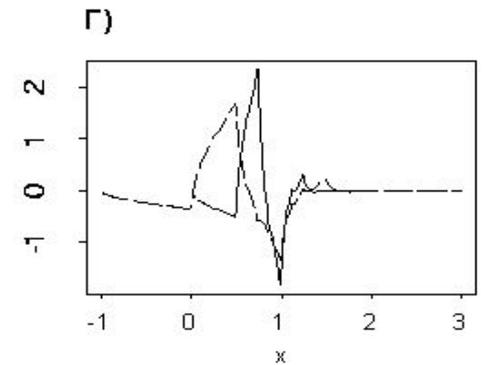
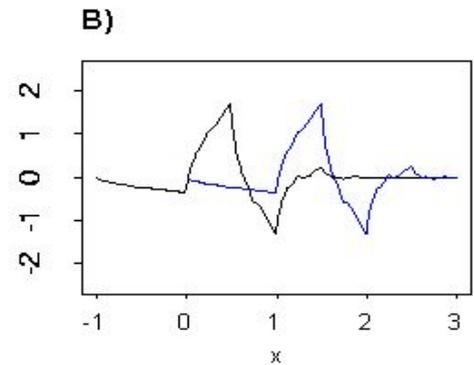
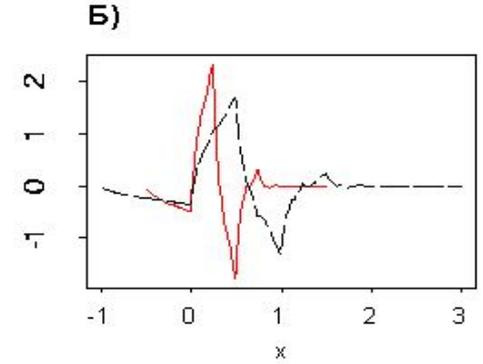
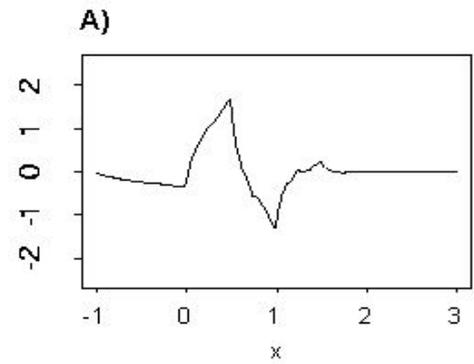
временное сжатие (scaling) в 2^j раз

и сдвиг (shifting), на $2^{-j} k$

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$$

$$\varphi_{10}(t) = \sqrt{2} \varphi(2t)$$

- а) материнский вейвлет,
- б) сжатый! (scaled) вейвлет,
- в) сдвинутый! (shifted) вейвлет,
- г) вейвлет, подвергнутый комбинированному преобразованию (scaled and shifted)



Преобразования вейвлета

WT

Идея применения вейвлетов для многомасштабного анализа заключается в том, что **разложение сигнала производится по базису, образованному сдвигами и разномасштабными копиями функции-прототипа** (то есть вейвлет-преобразование по своей сути является фрактальным).



Пример многомасштабного анализа изображения

Вычислительная процедура дискретного WT (DWT) состоит в вычислении временной свертки сигнала с $\{\varphi_{jk}(t)\}$

Длина вейвлета для каждого последующего масштаба уменьшается в 2 раза. Для DWT используется вычислительная процедура быстрого преобразования

Для масштаба $j=1$ определяется 2 коэффициента: C_{10} и C_{11} , для $j=2$ - 4 коэффициента и т.д., поэтому вычислительный алгоритм DWT называют *пирамидальным алгоритмом*.

- Для удаления шума производят DWT, обрабатывают полученный образ и производят обратное вейвлет-преобразование (IDWT). Алгоритм IDWT аналогичен алгоритму DWT
- Необходимым условием для возможности осуществить восстановление сигнала по его DWT путем обратного преобразования является ортогональность базиса. К ортогональным относится базис на основе вейвлета Добечи.
- **ОТОБРАЖЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**
- Результатом вейвлет-преобразования одномерного числового ряда (сигнала) является двумерный массив значений коэффициентов $C(a,b)$. Распределение этих значений в пространстве (a,b) - временной масштаб, временная локализация, дает информацию об изменении во времени относительного вклада в сигнале вейвлетных компонент разного масштаба и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, масштабно-временным (частотно-временным) спектром или просто вейвлет-спектром (wavelet spectrum). Спектр $C(a,b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве.
- Способы визуализации спектра могут быть самыми различными

Отображение преобразования

Наиболее распространенный способ – проекция на плоскость ab с изолиниями (изоуровнями), что позволяет проследить изменения коэффициентов на разных масштабах во времени, а также выявить картину локальных экстремумов этих поверхностей ("холмов" и "впадин"), так называемый "скелет" (skeleton) структуры анализируемого процесса

MHAT-вейвлет , вычисляется по второй производной ($n=2$)

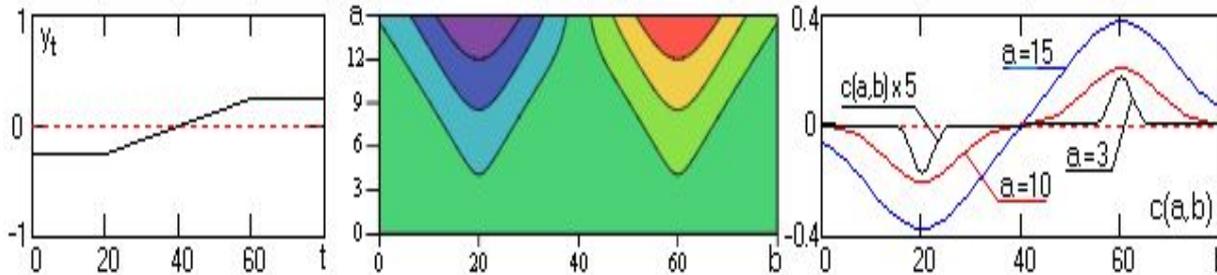


Рис. Сигнал, вейвлетный Mhat - спектр и масштабные сечения спектра.

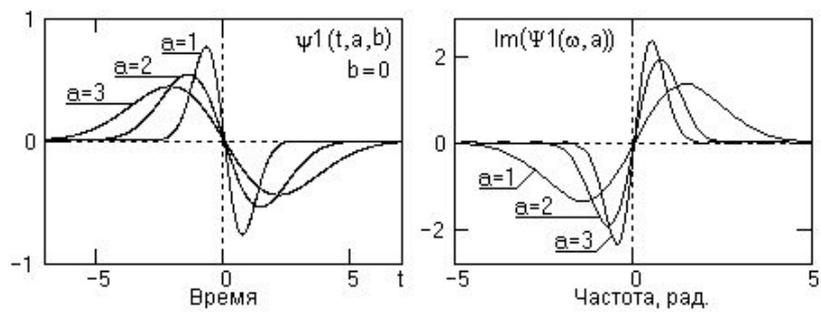
По вертикальным сечениям (сечениям сдвига b) вейвлет-спектр отражает компонентный состав сигнала (из данного комплекта вейвлетов) в каждый текущий момент.

Значения коэффициентов в каждой текущей временной точке по масштабным сечениям тем больше, чем сильнее корреляция между вейвлетом данного масштаба и поведением сигнала в окрестностях этой точки. Соответственно, сечения по параметру 'a' демонстрируют изменения в сигнале компоненты данного масштаба 'a' со временем.

- Для конструирования многих вейвлетов часто используются производные функции Гаусса, которые имеют наилучшую локализацию как во временной, так и в частотной областях. В общей форме уравнение базового вейвлета

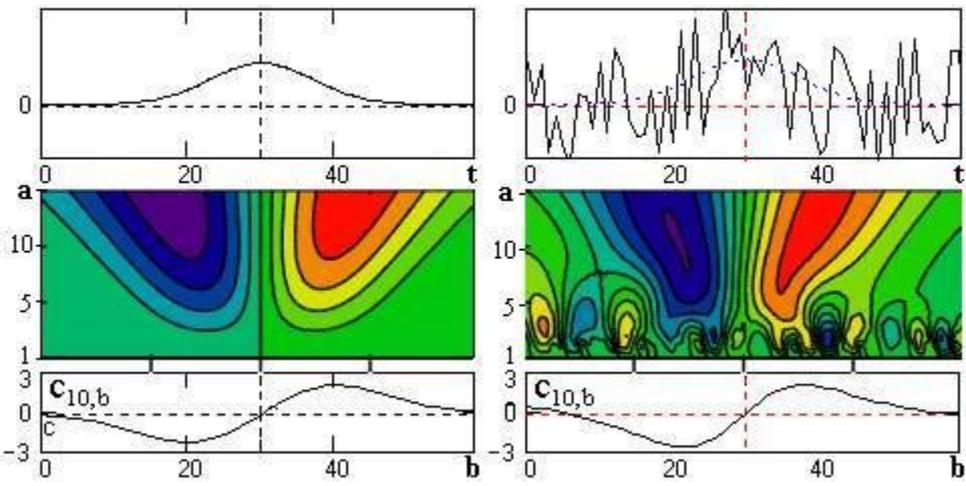
$$\Psi_n(x) = (-1)^{n+1} d^n[\exp(-x^2/2)]/dx^n, \quad n \geq 1$$

WAVE-вейвлет вейвлет (вычисляется по первой производной (n=1))



Вейвлет Wave.

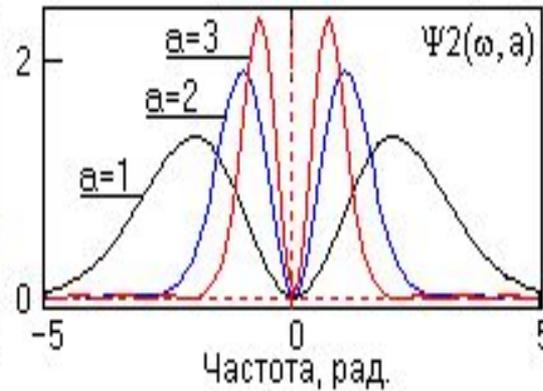
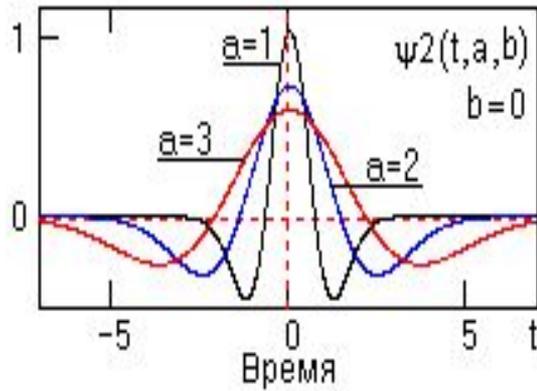
Пример применения вейвлета для анализа двух однотипных сигналов, один из которых осложнен шумами с мощностью на уровне мощности самого сигнала.



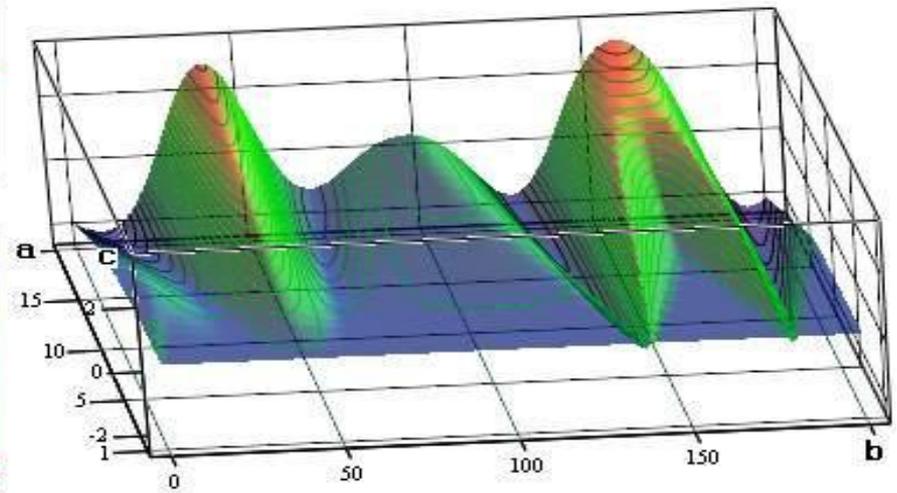
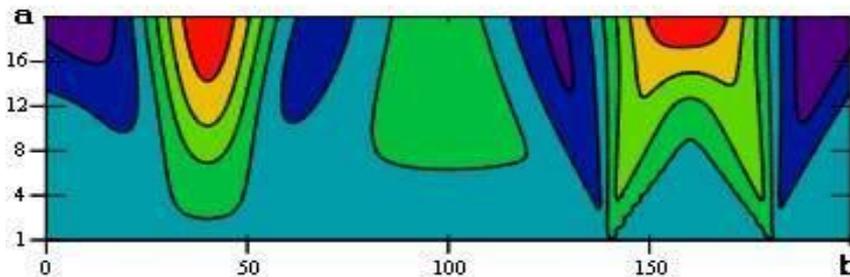
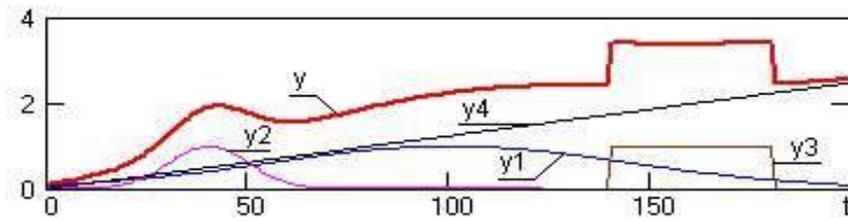
n-го порядка позволяют анализировать более тонкие высокочастотные структуры сигналов, подавляя низкочастотные компоненты.

Вейвлет МНАТ.

(Вторая производная)



Вейвлет МНАТ.



- Использование вейвлета для анализа сложного сигнала $y(t)$. Модель сигнала образована суммой сигналов разной структуры. Сигналы y_1 - y_2 представляют собой функции Гаусса разного масштабного уровня, сигнал y_3 - прямоугольный импульс, сигнал y_4 задан в виде тренда с постоянным значением.

СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- Получение объективной информации о сигнале базируется на свойствах вейвлет-преобразования, общих для вейвлетов всех типов.

Свойства WT

*** Линеинность** $TW[a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)] = a \cdot TW[s_1(t)] + b \cdot TW[s_2(t)]$.

TW векторной функции есть вектор с компонентами TW каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности

*** Инвариантность относительно сдвига**

Сдвиг сигнала во времени на t_0 приводит к сдвигу вейвлет-спектра также на t_0 : $TW[s(t-t_0)] = C(a, b-t_0)$.

*** Инвариантность относительно масштабирования**

$TW[s(t/a_0)] = (1/a_0) \cdot C(a/a_0, b/a_0)$.

*** Дифференцирование**

$d^n\{TW[s(t)]\}/dt^n = TW[d^n(s(t))/dt^n]$.

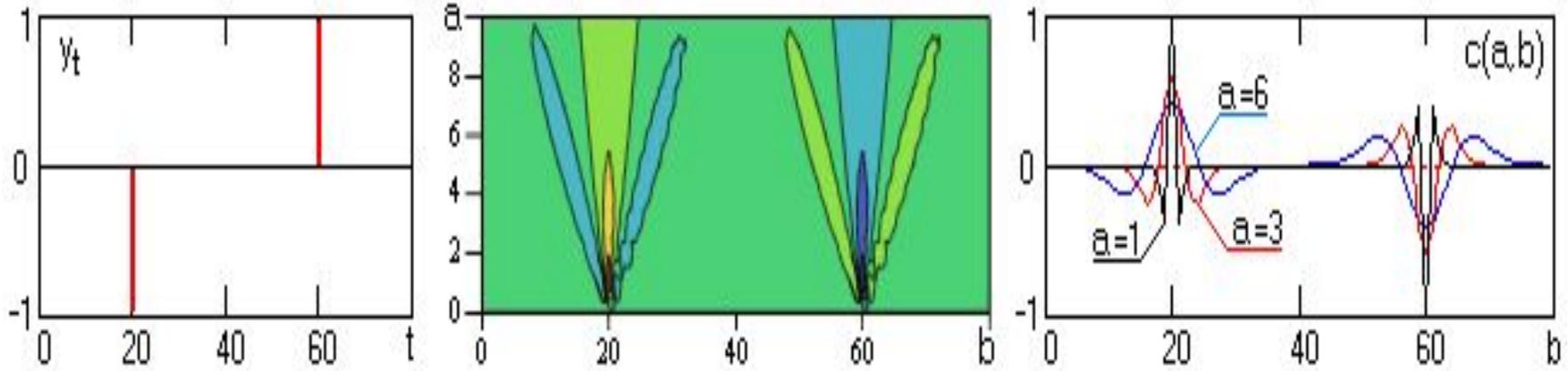
$TW[d^n(s(t))/dt^n] = (-1)^n s(t) [d^n(y(t))/dt^n] dt$.

- **Аналог теоремы Парсеваля** для ортогональных и биортогональных вейвлетов
- Сигнал может вычисляться через коэффициенты вейвлет-преобразования.
- $s_1(t) \cdot s_2^*(t) = C_y^{-1} a^{-2} C(a,b) C^*(a,b) da db$
- **ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ СИГНАЛОВ.**
- Вейвлет-преобразование, выполняемое при анализе сигналов для выявления в них каких-либо особенностей и места их локализации без обратной реконструкции, допускает применение любых типов вейвлетов, как ортогональных, так и неортогональных.
- Чаще всего для этих целей используются симметричные вейвлеты.
- **Результаты применения вейвлета Mhat для анализа сигналов простых форм. Вычисления выполнены с вейвлетом**

$$\psi(t, a, b) = \frac{1.031}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] - 2\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] \right\}$$

- (по формуле): $c(a,b) = s(t) \Psi(t,a,b)$, с шагом $\Delta t = \Delta b = \Delta a = 1$.

WT ПРОСТЫХ СИГНАЛОВ



Импульсы Кронекера (положительный и отрицательный), вейвлет-спектр импульсов и сечения спектра на трех значениях параметра 'a'

На сечениях спектра видно, что **свертка единичных импульсов с разномасштабными вейвлетами повторяет форму вейвлетов**, как это и положено при операции свертки.

Соответственно, линии максимальных экстремумов на сечениях ("хребты" и "долины", в зависимости от полярности) **определяют временное положение импульсов**, а боковые экстремумы противоположной полярности образуют характерные лепестки в конусе угла влияния, который хорошо выражен.

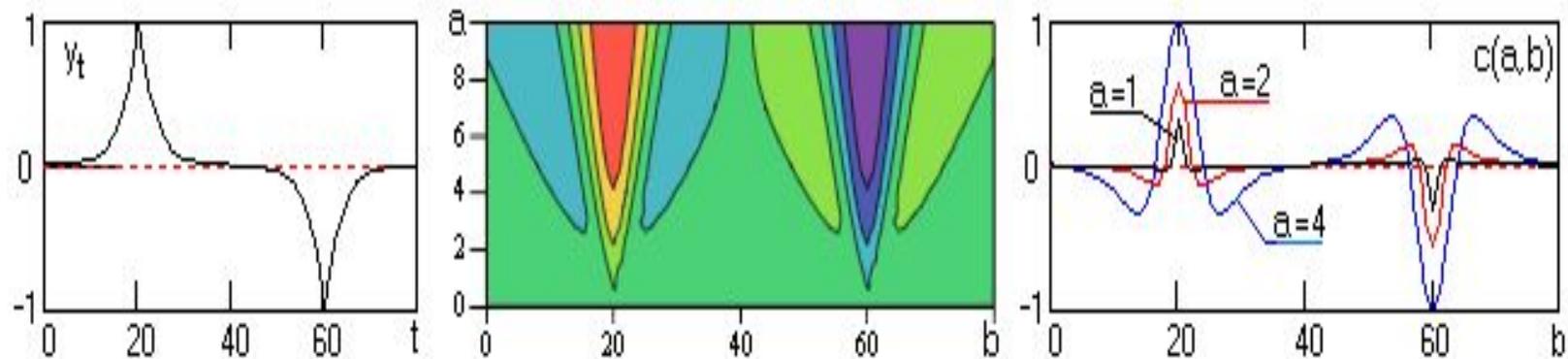


Рис. Преобразование функций Лапласа.

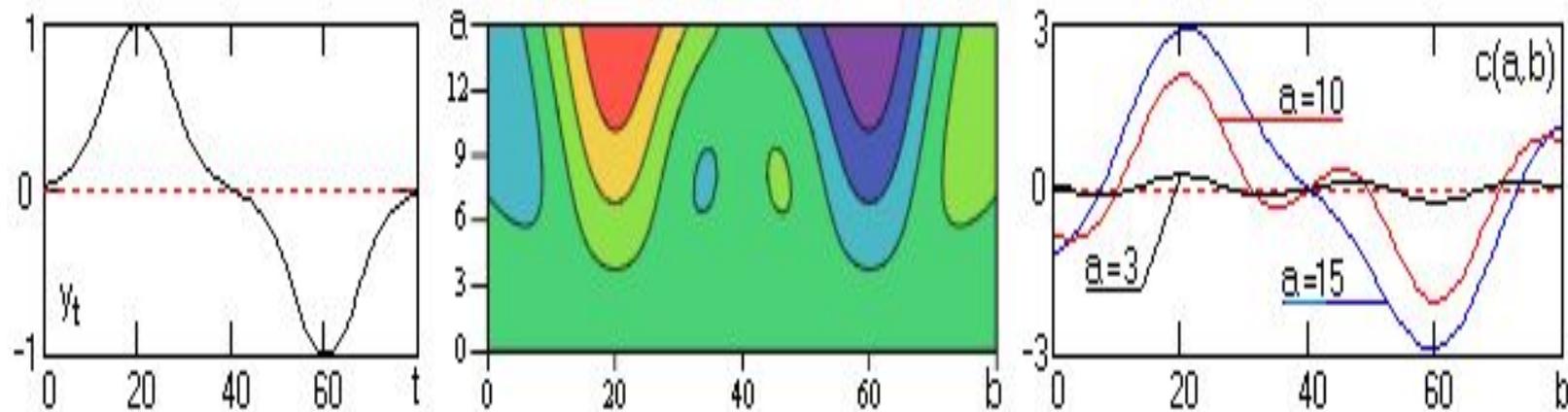
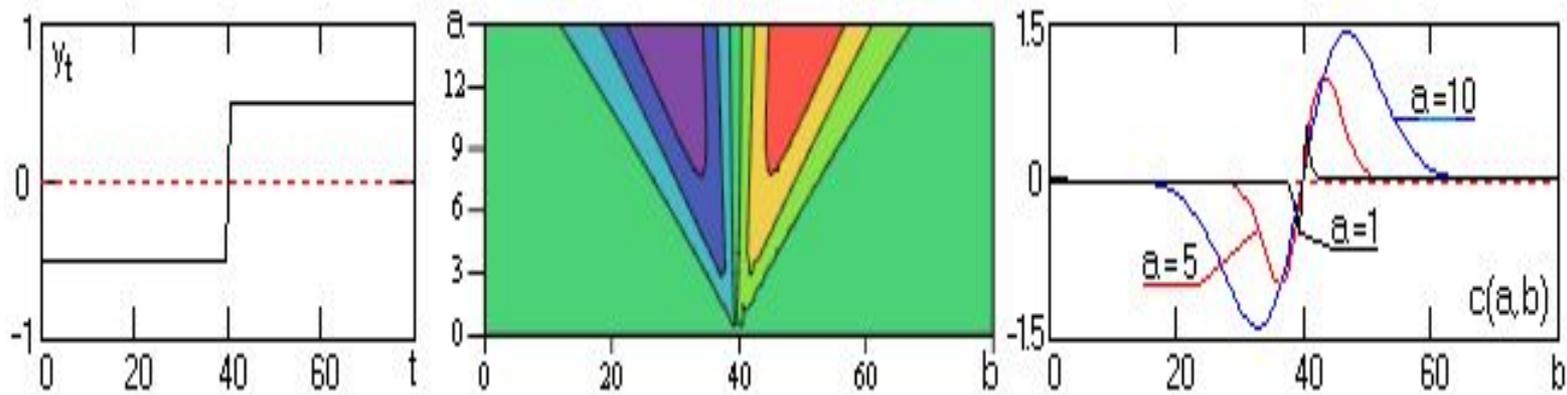
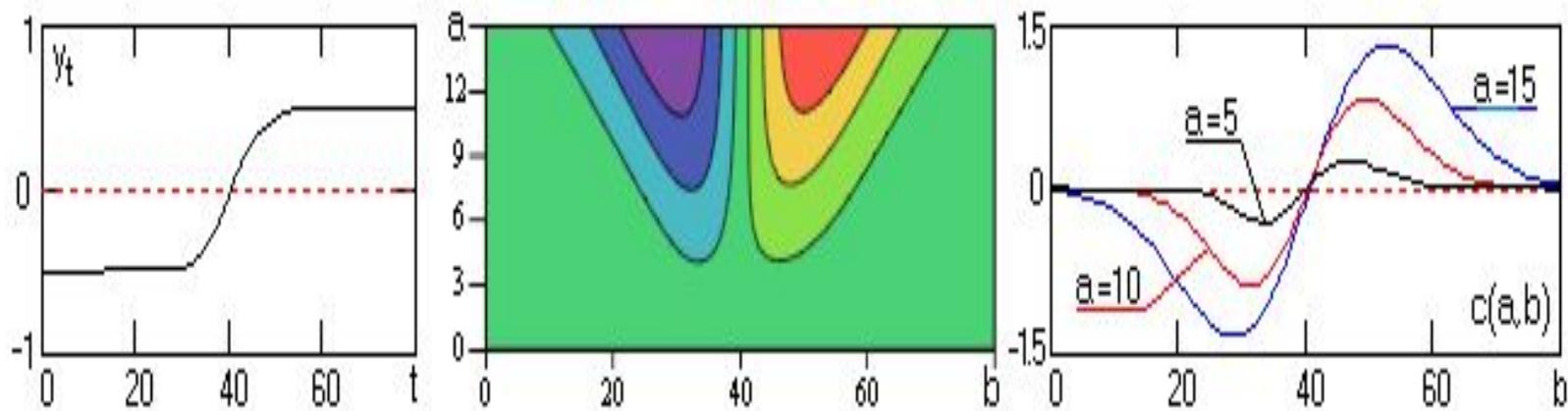


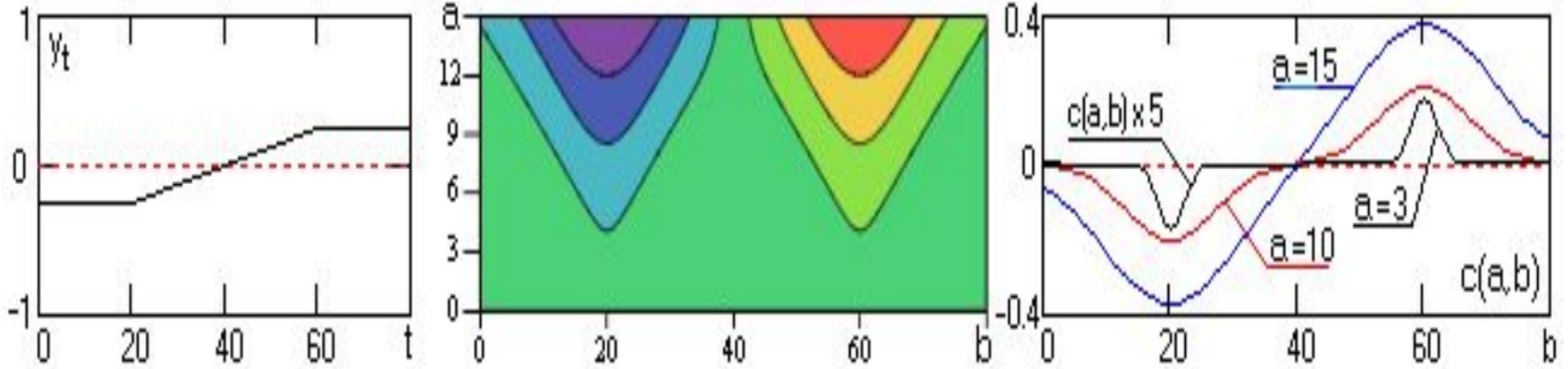
Рис. Преобразование функций Гаусса.



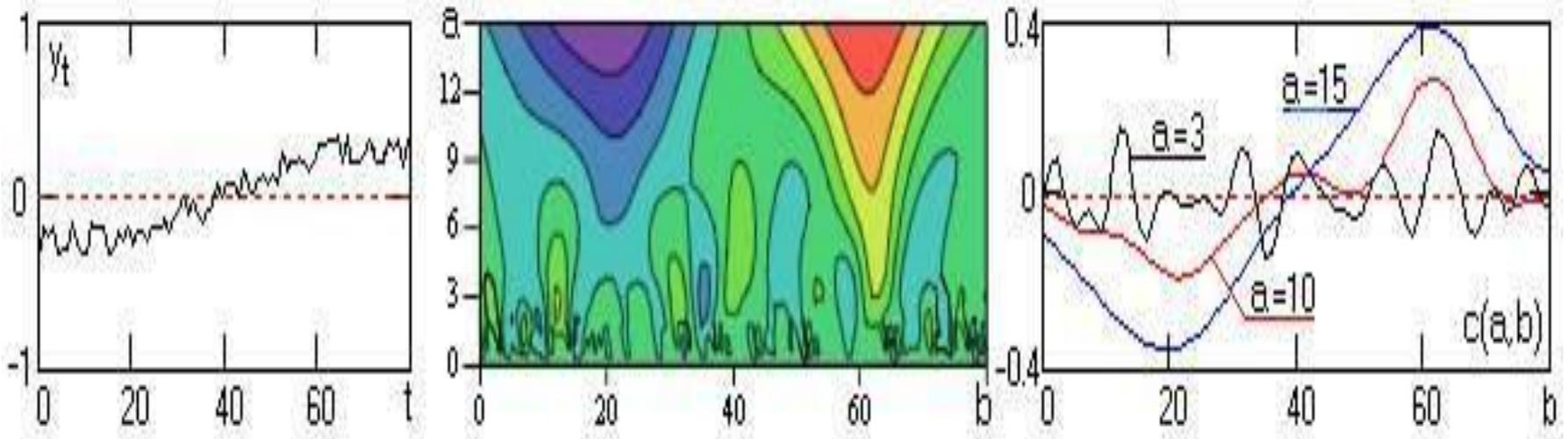
Преобразование перепада постоянного значения функций



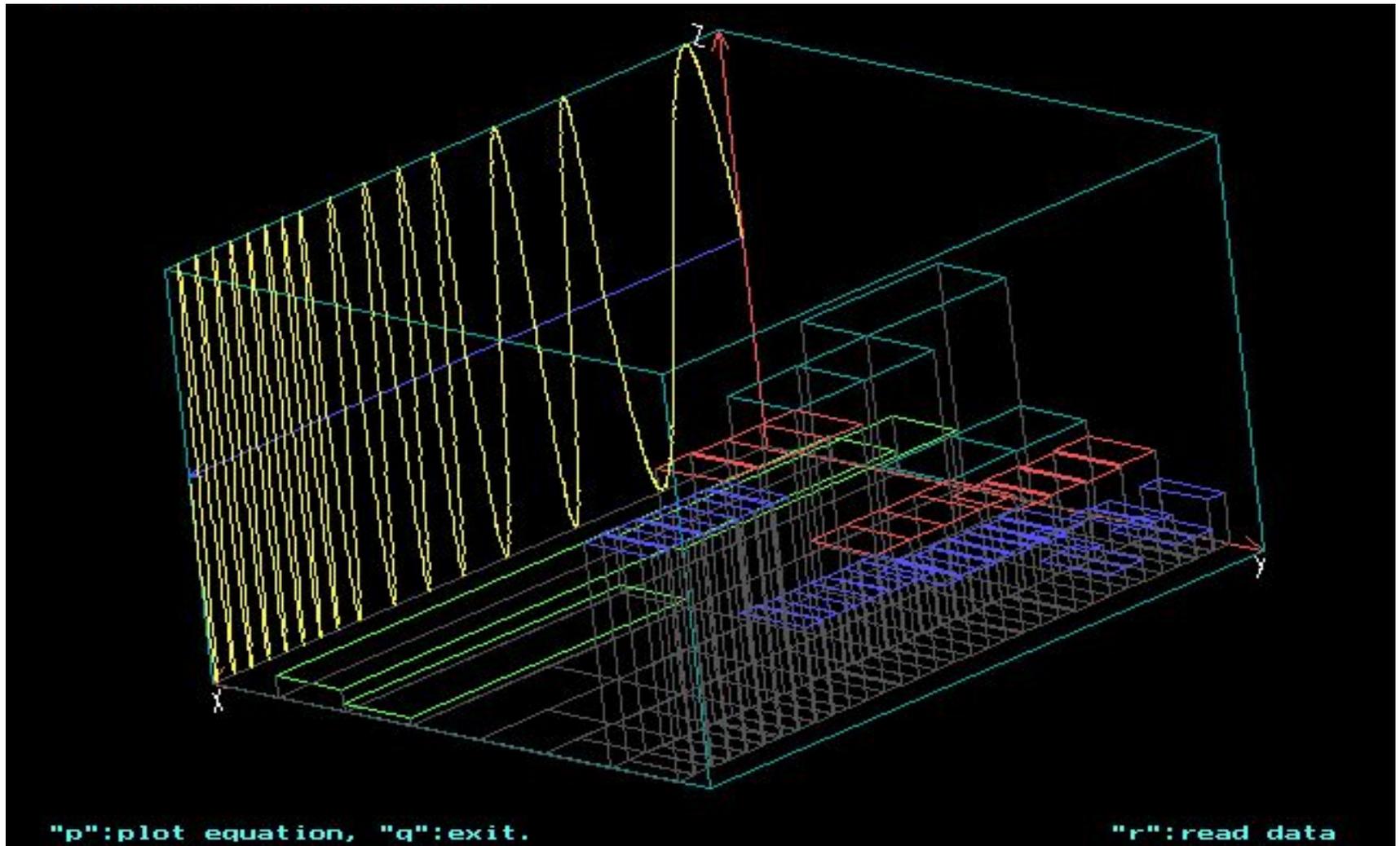
- ИЗЛОМЫ



- спектрограммы уверенно фиксируют место изломов максимумами (минимумами) значений коэффициентов $c(a,b)$,



На фоне шумов



3D представление результатов обработки сигнала после преобразования

Области применения WT

Обработка экспериментальных данных. Вейвлет-преобразование дает наиболее наглядную и информативную картину результатов эксперимента, позволяет очистить исходные данные от шумов и случайных искажений, и даже "на глаз" подметить некоторые особенности данных и направление их дальнейшей обработки и анализа. Кроме того, вейвлеты хорошо подходят для анализа нестационарных сигналов, возникающих в медицине, анализе фондовых рынков и других областях

Обработка изображений. Используя вейвлет-преобразование, мы можем сгладить или выделить некоторые детали изображения, увеличить или уменьшить его, выделить важные детали и даже повысить его качество!

Сжатие данных. Особенностью ортогонального многомасштабного анализа является то, что для достаточно гладких данных полученные в результате преобразования детали в основном близки по величине к нулю и, следовательно, очень хорошо сжимаются обычными статистическими методами. Огромным достоинством вейвлет-преобразования является то, что оно не вносит дополнительной избыточности в исходные данные, и сигнал может быть полностью восстановлен с использованием тех же самых фильтров.

Фильтрация сигналов

DWT сигнала x получают применением набора фильтров. Сначала сигнал пропускается через низкочастотный (low-pass) фильтр с импульсным откликом g , и получается свёртка:

$$y[n] = (x * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n - k]$$

Одновременно сигнал раскладывается с помощью высокочастотного (high-pass) фильтра h . В результате получают детализирующие коэффициенты (после ВЧ-фильтра) и коэффициенты аппроксимации (после НЧ-фильтра)

. Каждый из получившихся сигналов представляет половину частотной полосы исходного сигнала, так что частотное разрешение удвоилось.

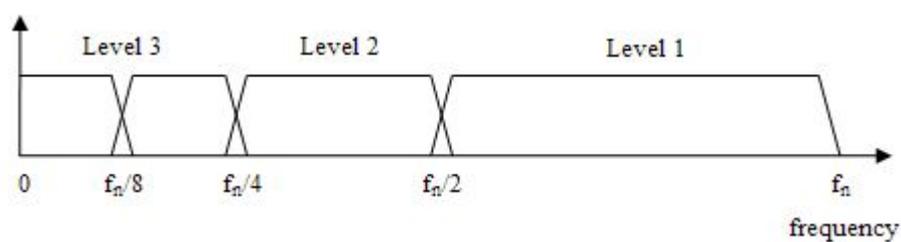


Рис. Представление ДВП в частотной области

Кроме того, отделение в результате преобразования деталей от основного сигнала позволяет очень просто реализовать сжатие с потерями – достаточно просто отбросить детали на тех масштабах, где они незначительны!

Изображение, обработанное вейвлетами, можно сжать в 3-10 раз без существенных потерь информации (а с допустимыми потерями – до 300 раз!).

Вейвлет-преобразование положено в основу стандарта сжатия данных MPEG4.



а) DCT



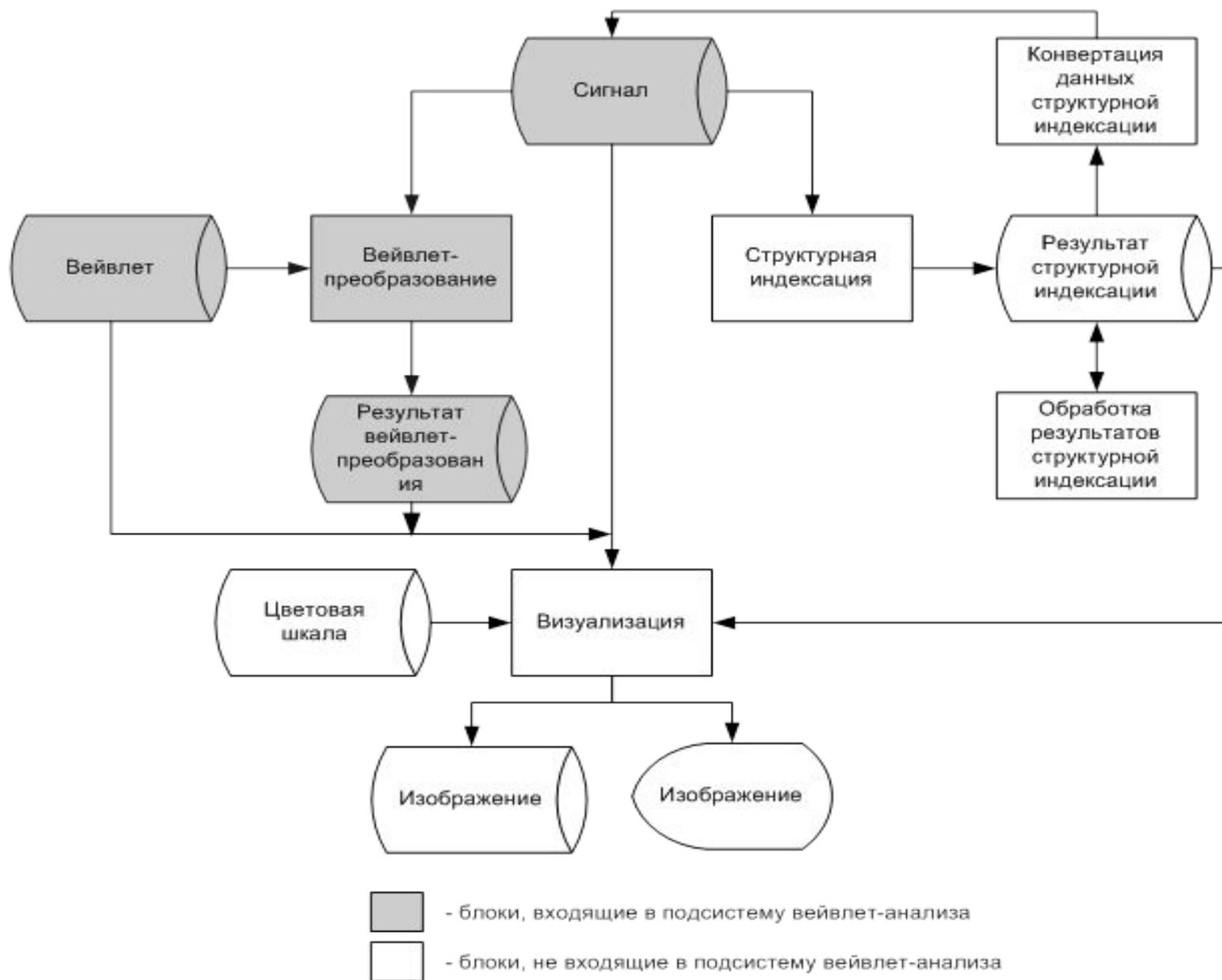
б) Оригинал



в) DWT

Параметр масштаба в вейвлет-анализе имеет аналогию с масштабом географических карт. Большие значения масштаба соответствуют малому количеству деталей, глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали. Аналогично, в терминах частоты, низкие частоты соответствуют глобальной информации о сигнале (которая содержится на всей его протяженности), а высокие частоты - детальной информации, скрытым особенностям, которые имеют обычно малую протяженность.

В определении вейвлет-преобразования коэффициент масштаба стоит в знаменателе. Поэтому, $s > 1$ расширяет сигнал, а $s < 1$ сжимает его.

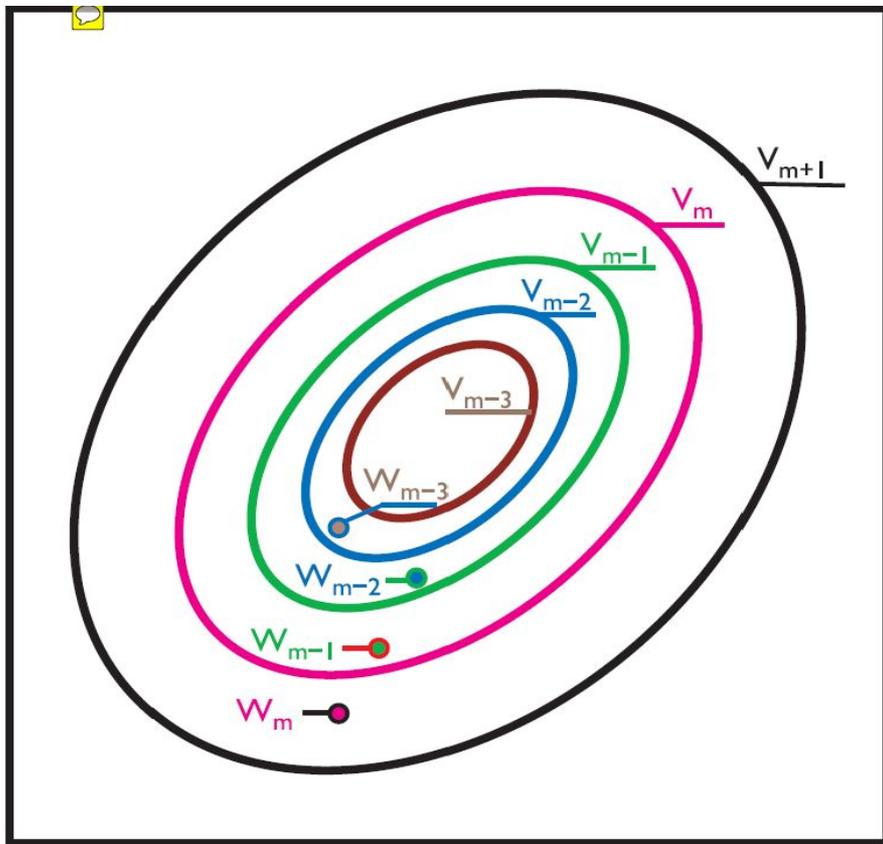


Многомасштабный анализ

- **Представление формы сигнала путем суммирования его грубой аппроксимации с добавлением детализирующих локальных уточнений на различных временных интервалах — основа его кратномасштабного анализа (Multiresolution Analysis).**
- **Сигнал в виде совокупности его последовательных приближений. , при анализе изображений из некоторой базы данных можно сначала передать грубую его версию, а затем последовательно ее уточнять. При сжатии изображений очень часто без визуальной потери качества можно убирать из изображения незначимые мелкомасштабные детали.**
- **Для реализации таких возможностей обычно используют ортогональные вейвлет**

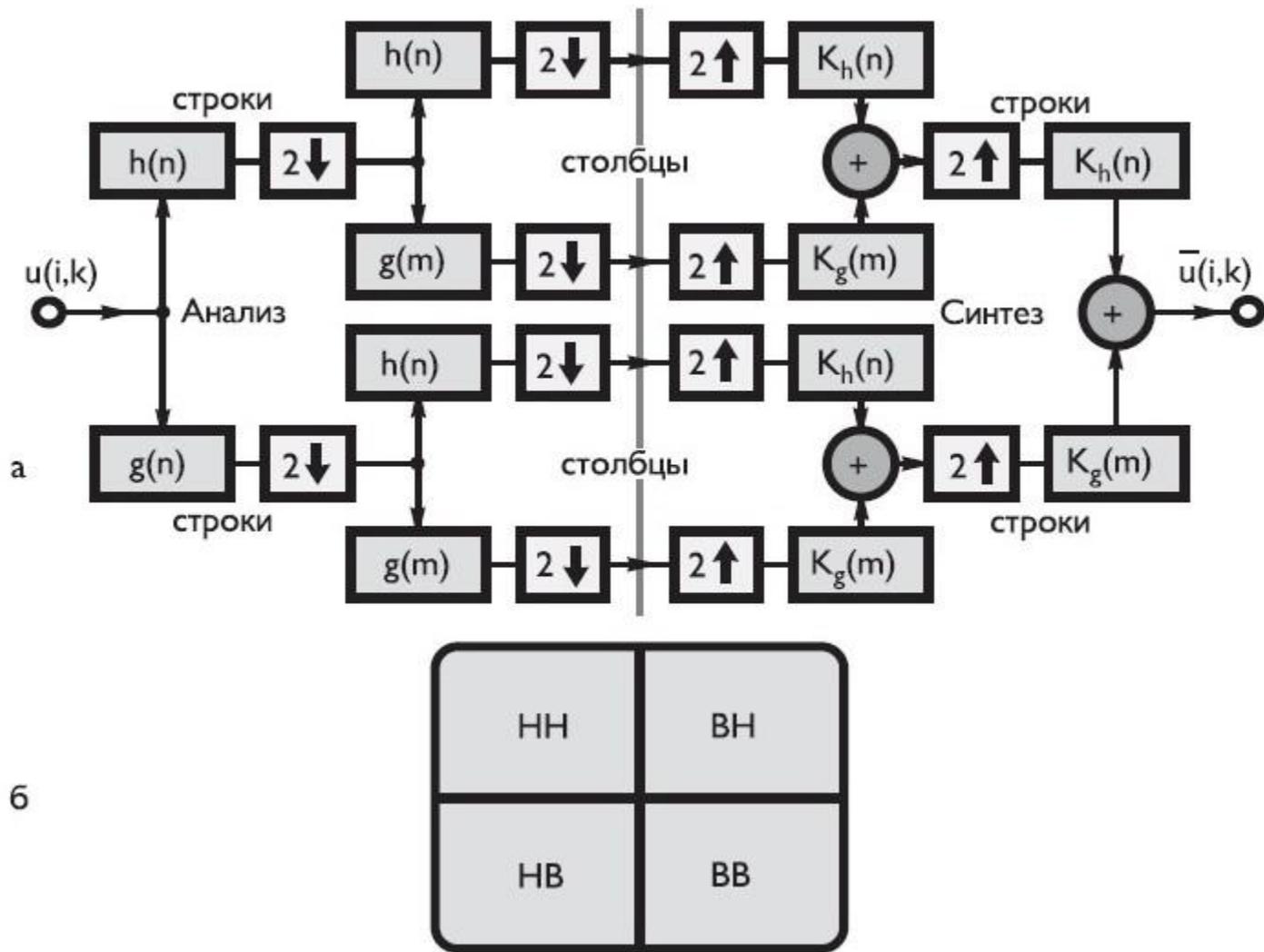
- Такие вейвлеты могут быть реализованы, основываясь на представлении некоторого пространства сигналов V в виде системы вложенных подпространств V_m , отличающихся друг от друга только перемасштабированием независимой переменной. Ортогональный кратномасштабный анализ сигналов базируется на следующих исходных предпосылках:
- пространство $L^2(\mathbb{R})$ определяется как иерархически вложенные подпространства $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, которые не пересекаются и объединение для пространства V_0 существует функция $\phi(t) \in V_0$, целочисленные сдвиги
- которой по аргументу образуют ортонормированный базис пространства
- V_0 : $\phi_{0,k} = \phi(t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),
- и условие нормировки этой масштабирующей (скейлинг) функции определяется соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1.$$



$$\varphi_{m,k}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - k), m, k \in I.$$

Сигналы $V_m(t)$ являются ортогональными проекциями исходного сигнала $u(t)$ на подпространства V_m , что реализует возможность анализа сигнала на различных временных диапазонах



Блок-схема вейвлет-преобразований двумерного сигнала (а) и формат преобразованного изображения (б)



Варианты двумерного разложения изображений

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММЕ (ЭКГ)



Рис. 1. Съем электрокардиограммы

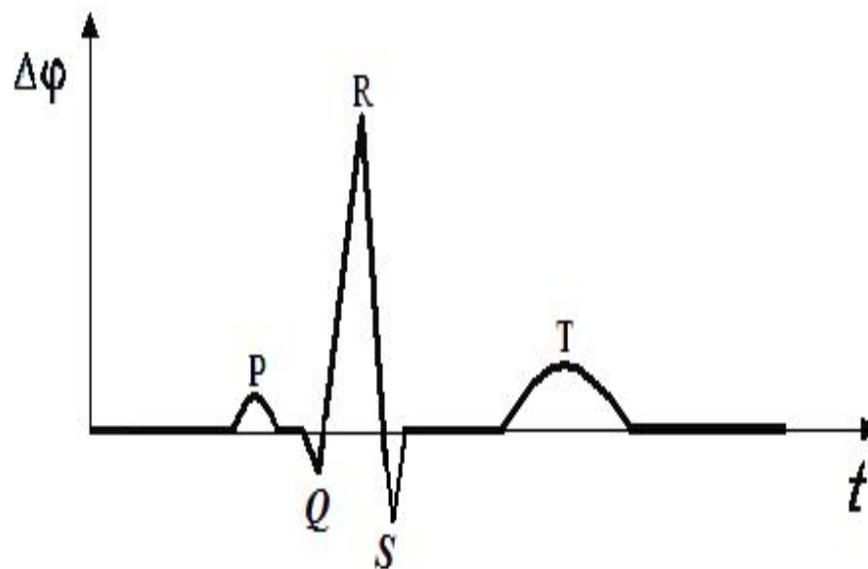
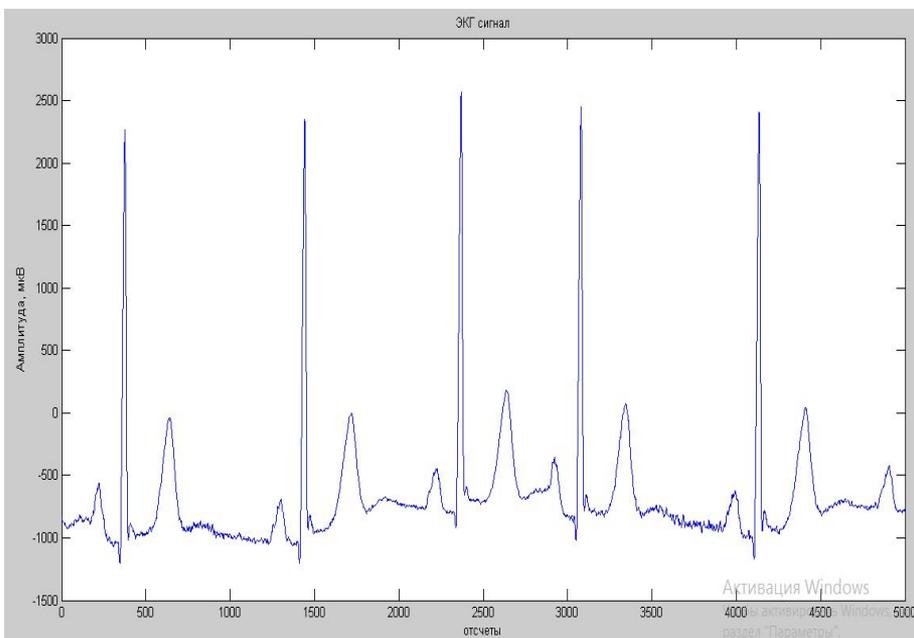


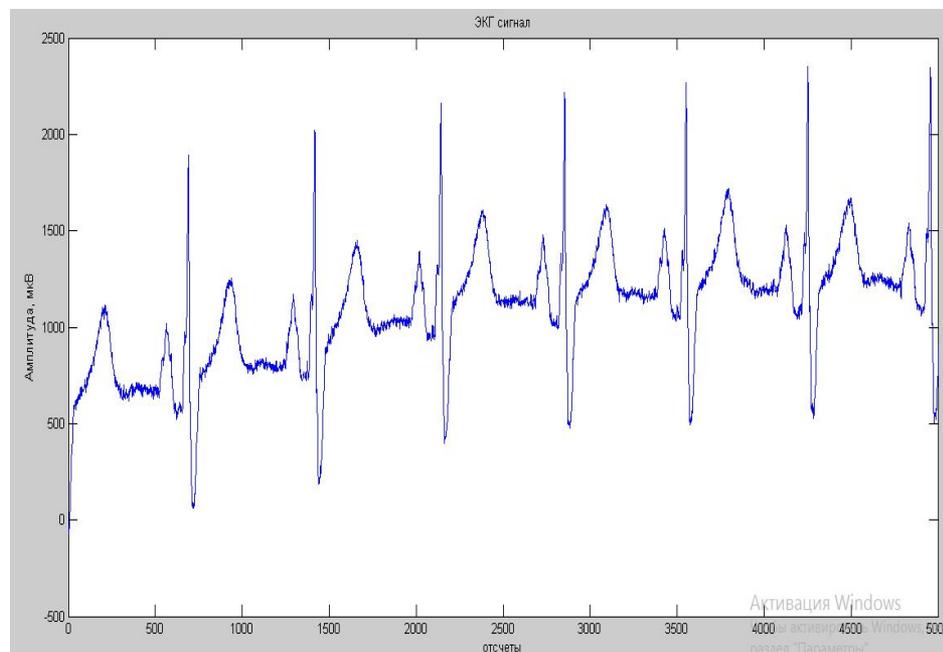
Рис. 2. Основные зубцы одиночного кардиоцикла

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЭКГ

WFDBMAT – функция для получения из файла с расширением .dat, файла с расширением .mat.



ЭКГ пациента без патологий (II стандартное отведение)



ЭКГ пациента с инфарктом передней стенки миокарда (II стандартное отведение)

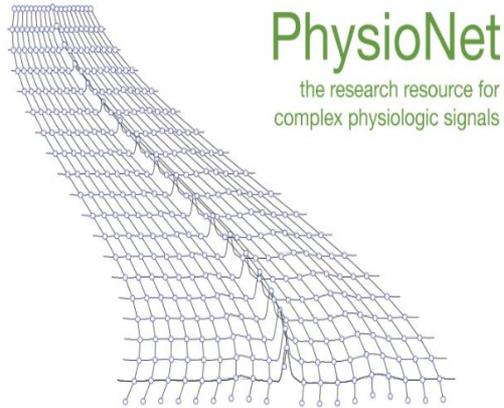
ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Вейвлет-преобразование (ВП) одномерного сигнала – это его представление в виде обобщенного ряда Фурье по системе базисных функций

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-a}{b}\right),$$

сконструированных из обладающего определенными свойствами материнского (исходного) вейвлета за счет операций сдвига во времени (b) и изменения масштаба (a).

PHYSIONET.ORG



База физиологических сигналов
Physionet.org

Name	Last modified	Size	Description
Parent Directory		-	
CONTROLS	2006-04-24 16:25	1.6K	
MD5SUMS	2016-03-22 15:25	395	
RECORDS	2004-09-25 10:15	11K	list of record names
SHA1SUMS	2016-03-22 15:25	467	
SHA256SUMS	2016-03-22 15:25	683	
patient001/	2004-08-03 18:00	-	
patient002/	2004-08-03 18:00	-	

БД РТВ Diagnostic ECG
Database

База ЭКГ РТВ Diagnostic ECG Database

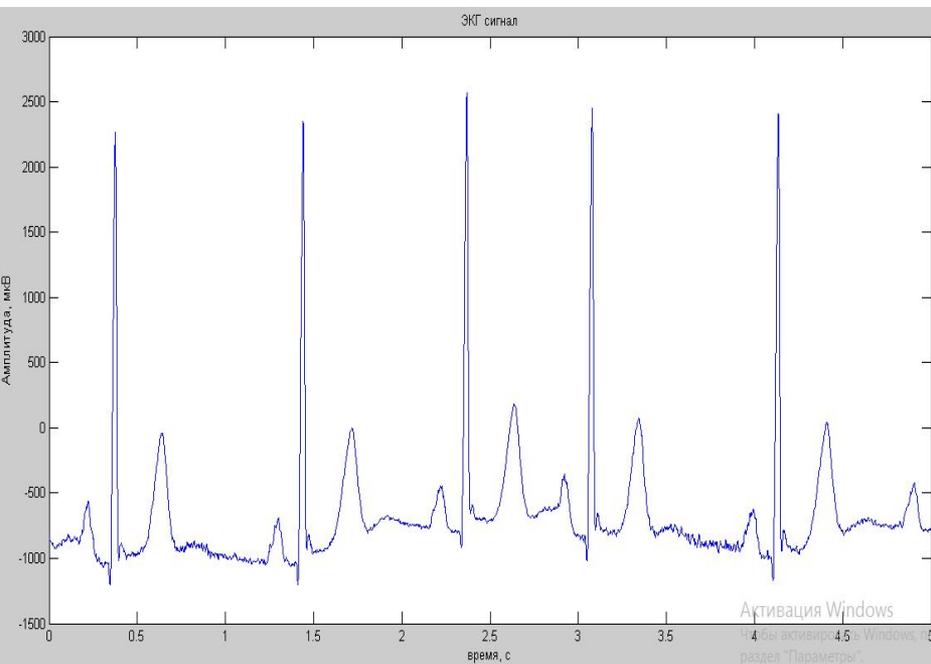
- Инфаркт миокарда (Myocardial infarction) - 148
- Кардиомиопатия/Паралич сердца (Cardiomyopathy/Heart failure) - 18
- Нарушение проводимости (Bundle branch block) - 15
- Аритмия (Dysrhythmia) - 14
- Гипертрофия миокарда (Myocardial hypertrophy) - 7
- Нарушение работы клапанов (Valvular heart disease) - 6

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЭКГ

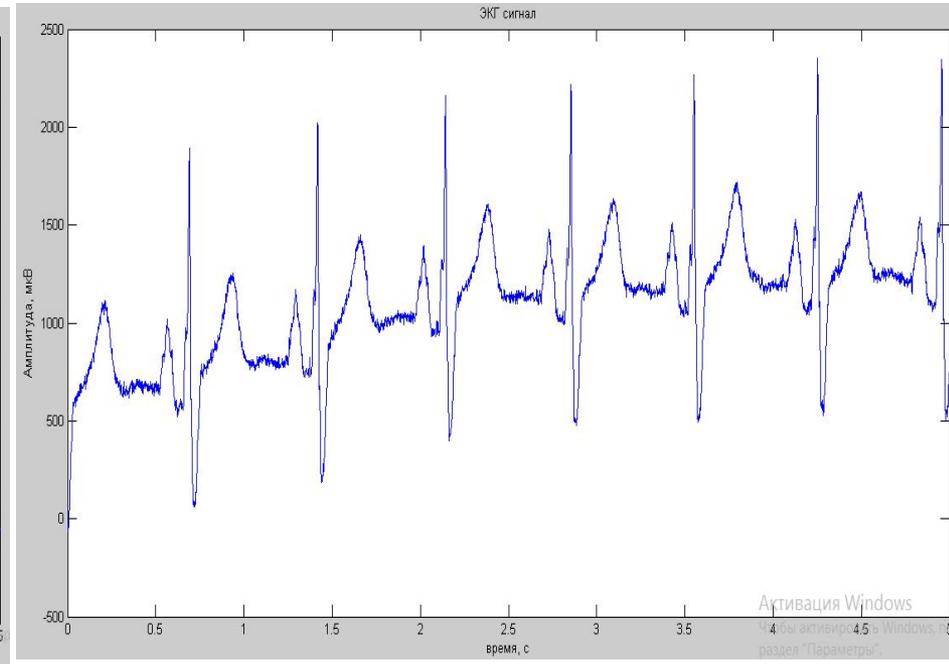
Size(A) – функция для определения количества отсчетов в массиве A.

Size(A)= Size(B)=115200; Fд=1000Гц;

1/1000=0,001с. Следовательно, $115200 \cdot 0,001 \text{с} = 115,2 \text{с}$



ЭКГ пациента без патологий
(II стандартное отведение)

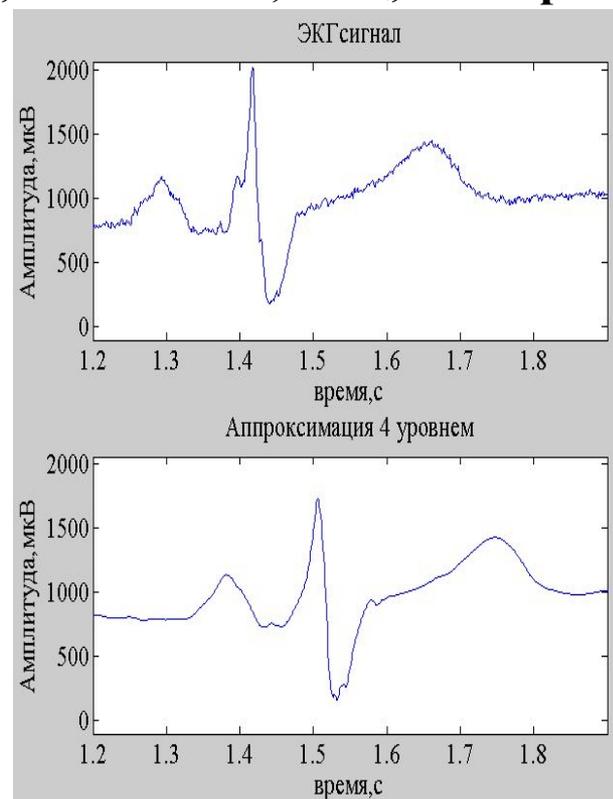
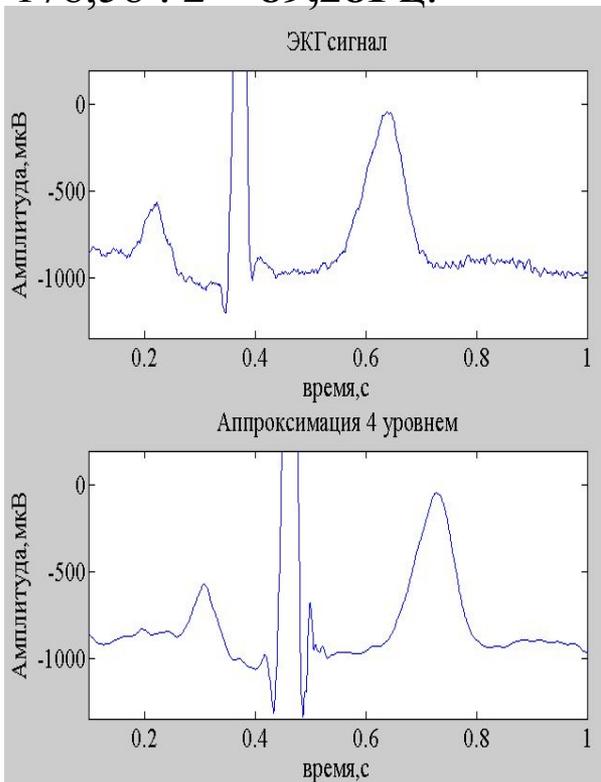


ЭКГ пациента с инфарктом передней
стенки миокарда (II стандартное
отведение)

ОЧИСТКА ЭКГ ОТ ШУМОВ

Центральная частота db4 - 0,7143Гц, $F_d=1000$ Гц .

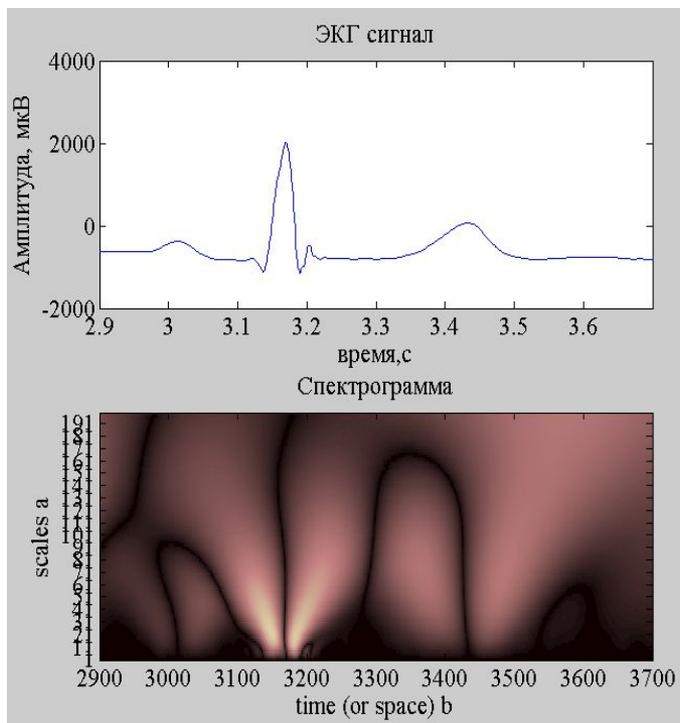
Центральная частота db4, для **первого** уровня разложения: $0,7143 \cdot 1000 = 714,30$ Гц,
второго – $714,30 : 2 = 357,15$ Гц, **третьего** – $357,15 : 2 = 178,58$ Гц, **четвертого** –
 $178,58 : 2 = 89,28$ Гц.



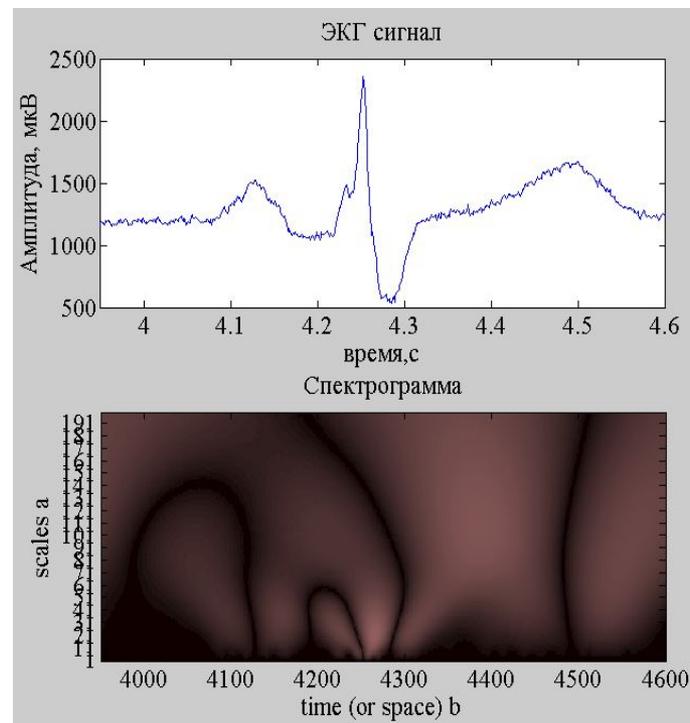
Фрагмент исходного ЭКГ сигнала пациента с инфарктом передней стенки миокарда (II стандартное отведение) и тот же фрагмент сигнала после очистки от шумов

Фрагмент исходного ЭКГ сигнала пациента с инфарктом передней стенки миокарда (II стандартное отведение) и тот же фрагмент сигнала после очистки от шумов

НЕПРЕРЫВНОЕ ВП ОДИНОЧНОГО КАРДИОЦИКЛА

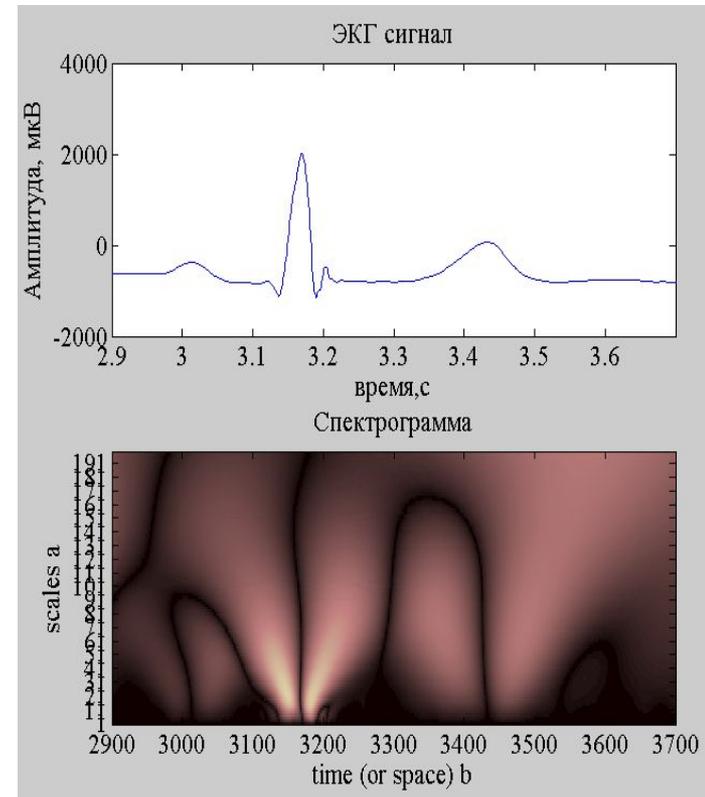
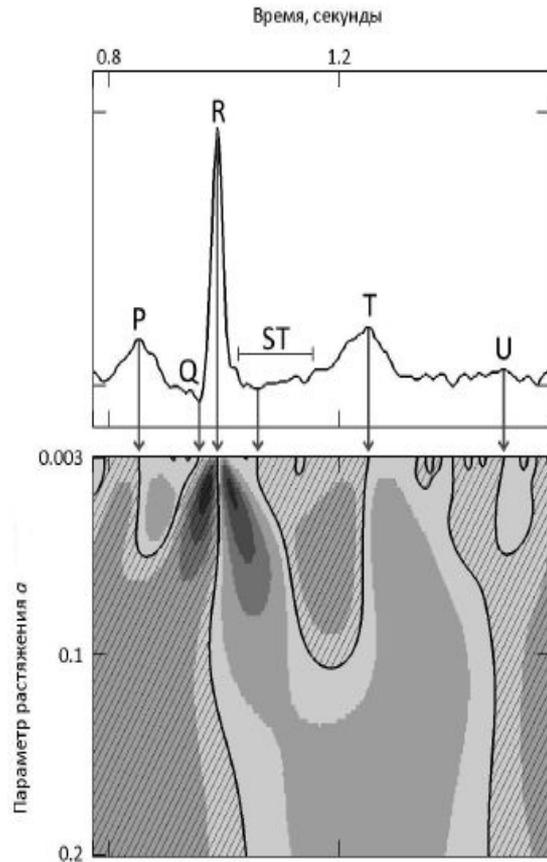


Одиночный кардиоцикл пациента без патологий (II стандартное отведение) и соответствующий вейвлет-спектр



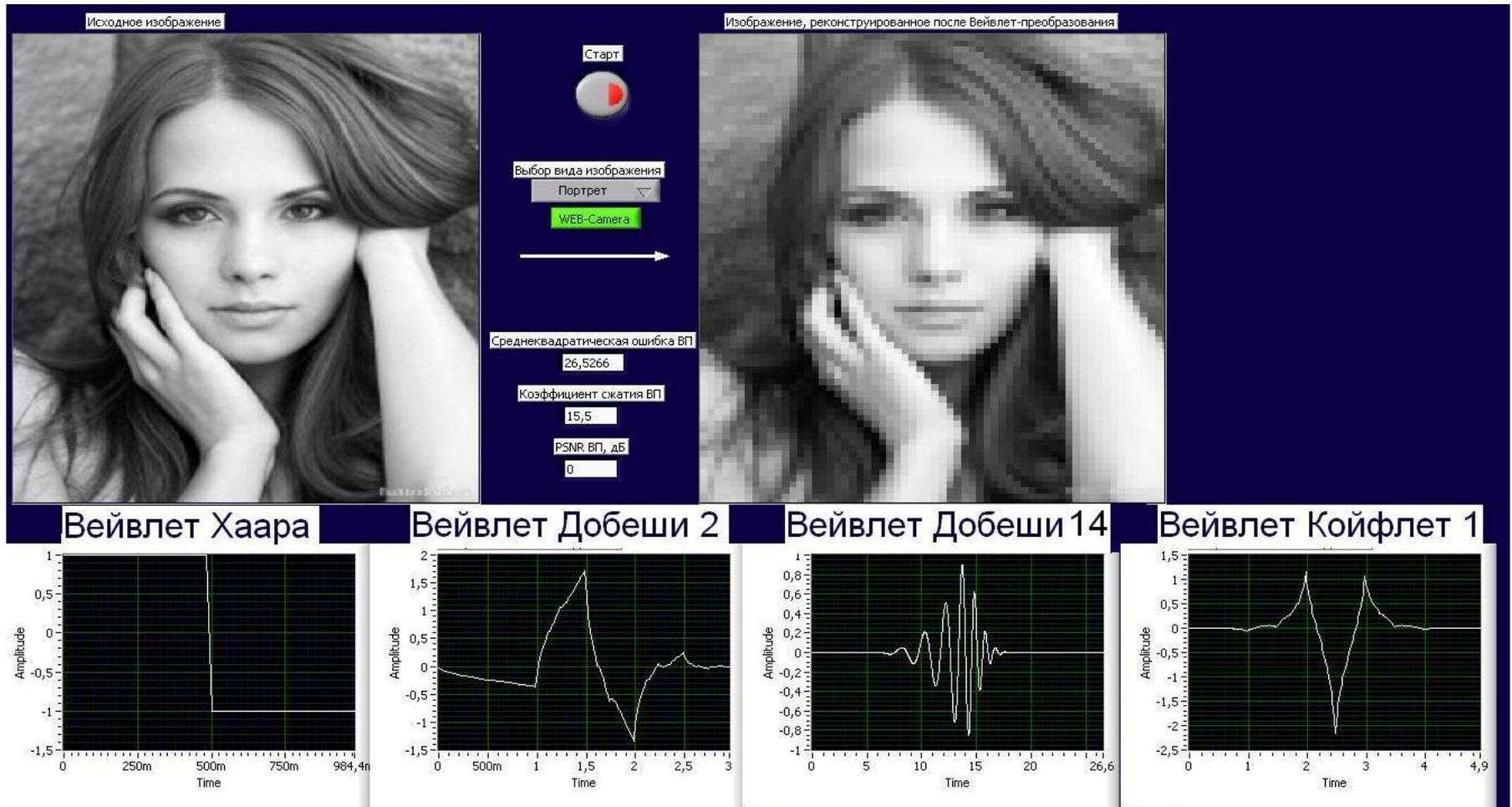
Одиночный кардиоцикл пациента с инфарктом передней стенки миокарда (II стандартное отведение) и соответствующий вейвлет-спектр

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ



Одиночный кардиоцикл пациента без патологий (II стандартное отведение) и соответствующий вейвлет-спектр,

. Одиночный кардиоцикл пациента без патологий (II стандартное отведение) и соответствующий вейвлет-спектр



Лабораторная работа « Сравнение DCT и DWT »

