Метод координат в пространстве

или задача С2

для тех, кто «не видит».

Что это?

- Задача С2 стереометрическая задача средней сложности, посильной для большинства успевающих выпускников.
- Полное правильное решение задачи С2 оценивается 2 баллами.
- Метод и форма записи решения могут быть произвольными, но решение должно быть математически грамотным, полным и обоснованным.
- При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, допущенных или рекомендованных Министерством образования и науки РФ.

Почему?

- только 4 % выпускников справляются со стереометрической задачей!

Что спрашивают?

- расстояние от точки до прямой;
- расстояние от точки до плоскости;
- расстояние между скрещивающимися прямыми;
- угол между прямой и плоскостью
- угол между плоскостями;
- угол между скрещивающимися прямыми.

Причины затруднений?

- неумение ориентироваться в геометрических понятиях, теоремах, признаках;
- неумение делать нужные построения и ОБОСНОВАНИЯ;
- затруднение в том, чтобы увидеть расположение объектов на искаженном рисунке.

Цель ?

- научиться самим и научить детей решать задачи на вычисление углов и расстояний в стереометрии с помощью координатно-векторного метода.

В чем суть ?

- введение (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат;
- исчисление образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Достоинство?

- применение метода избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций;
- избавляет от необходимости проводить сложные обоснования взаимных расположений объектов;
- Предполагает лишь знание формул и умение считать!

Что предлагает учебник?

- Простейшие задачи в координатах;
- Вычисление угла или косинуса угла между векторами или прямыми;
- Вычисление синуса угла между прямой и плоскостью, причем алгоритм написания уравнения плоскости непонятен!

- 2 задачи на куб, когда координаты не заданы.

Чем «расширить горизонты»?

- Применять можно практически в любом многограннике (чаще дают правильный);
- Научить писать уравнение плоскости через определители;
- Дать формулы для решения задач.

Алгоритм?

- Ввести прямоугольную систему координат;
- Найти координаты точек, необходимых для решения задачи;
- Написать уравнение плоскости (если необходимо);
- Найти координаты векторов, необходимых для решения задачи;
- Применить нужную формулу.

Это должен знать каждый?

1. **Нахождение расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ *, где d=AB, A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)*

2. **Нахождение координаты середины *C(x; y; z)* отрезка *AB*,**

A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

3. **Нахождение косинуса, а, следовательно, и самого угла, между двумя векторами, заданными своими координатами.**

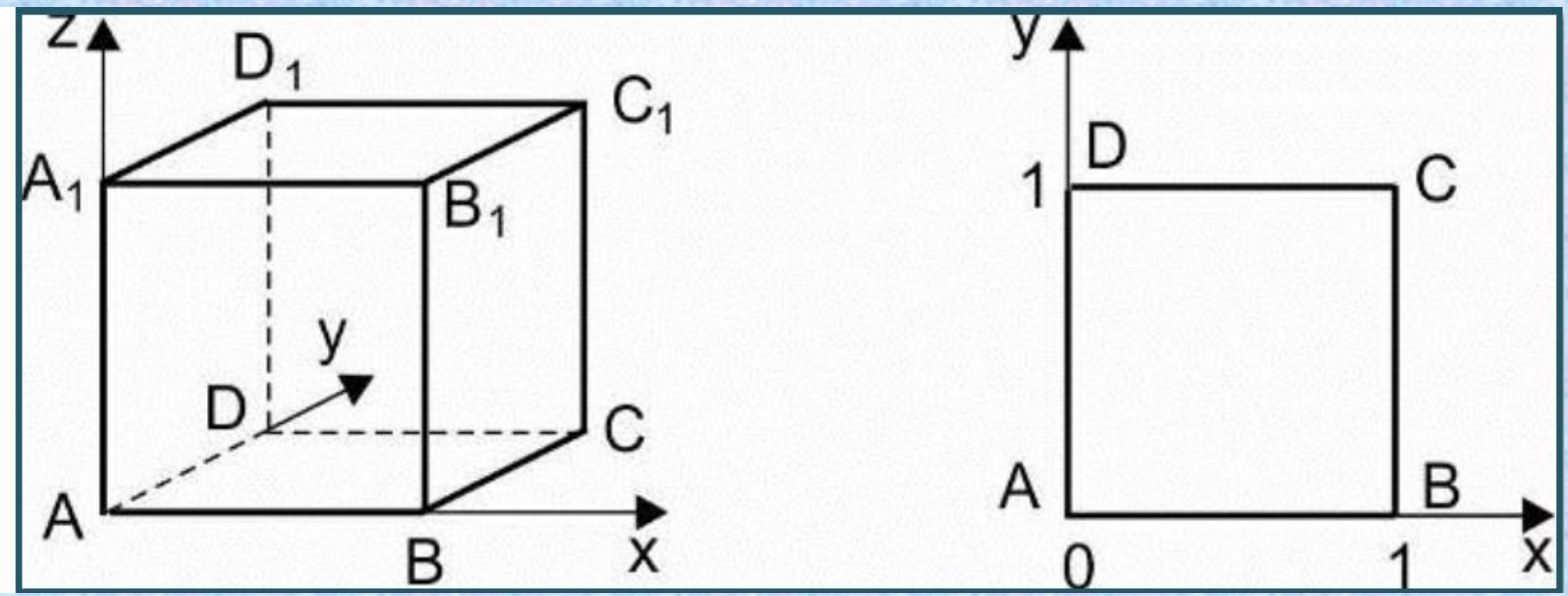
$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

где $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$.

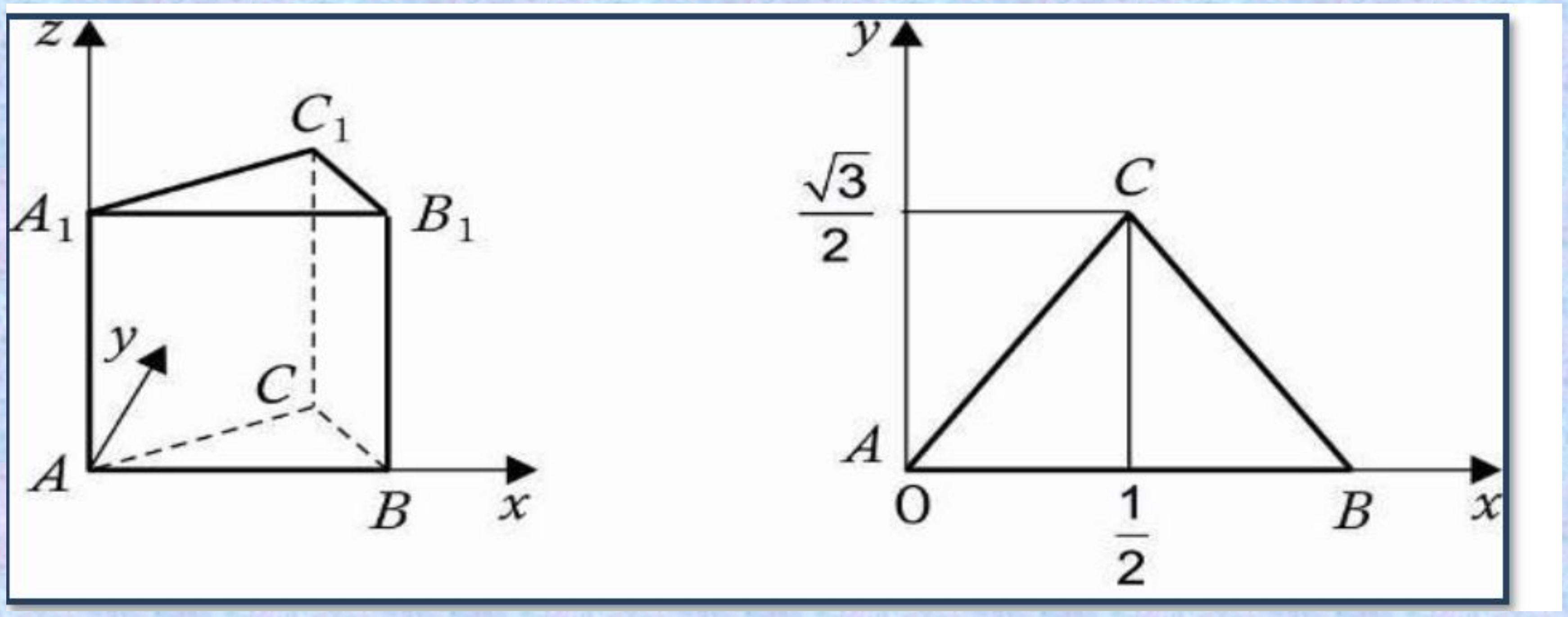
4. Координаты *x*, *y*, *z* точки *M*, которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ, определяется по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

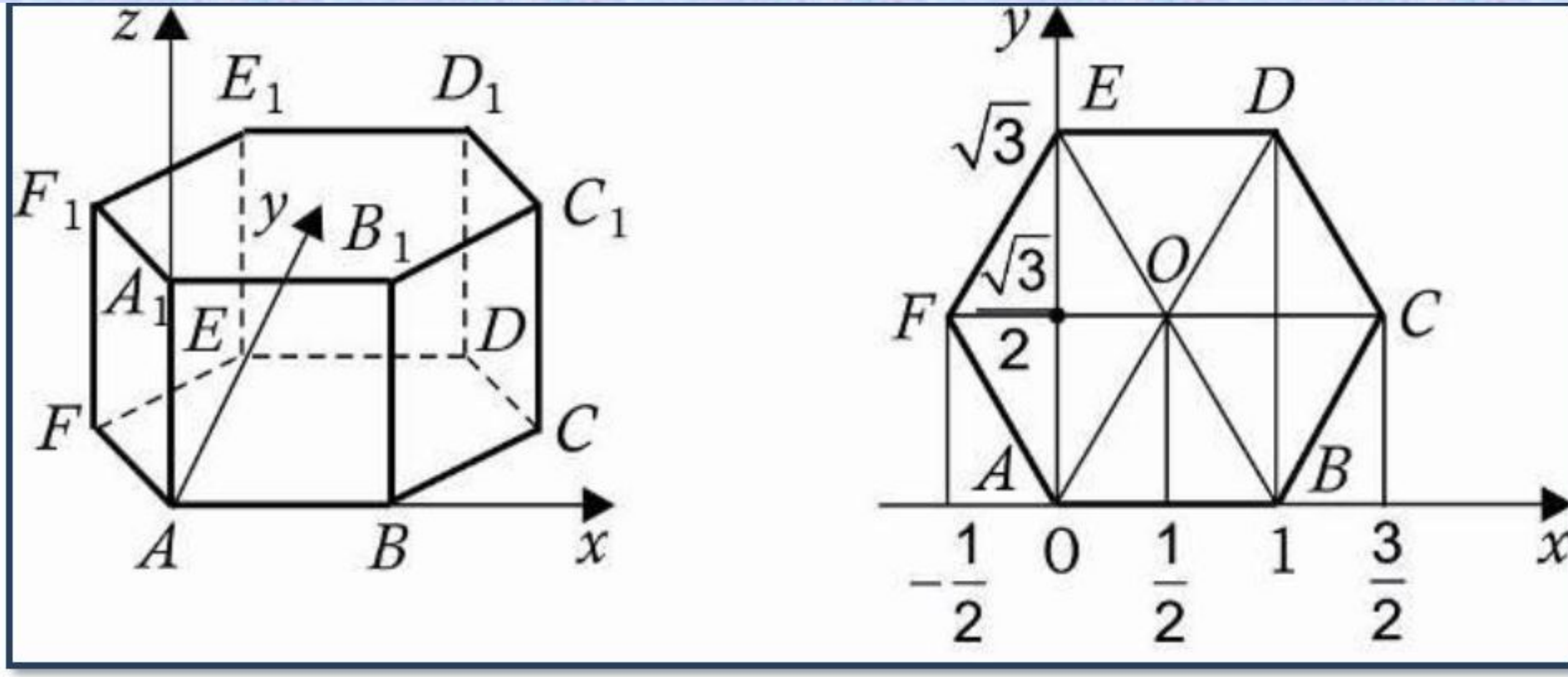
Куб.



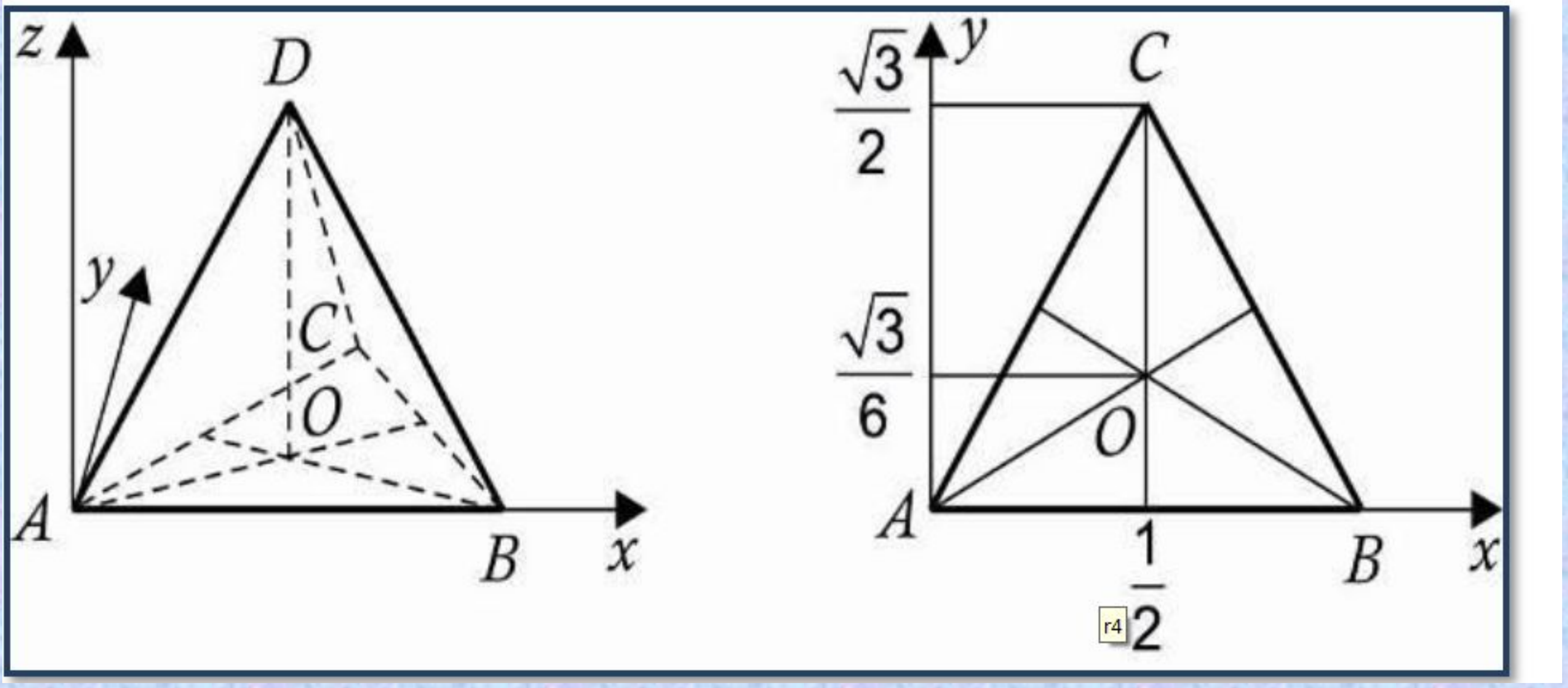
Правильная треугольная призма.



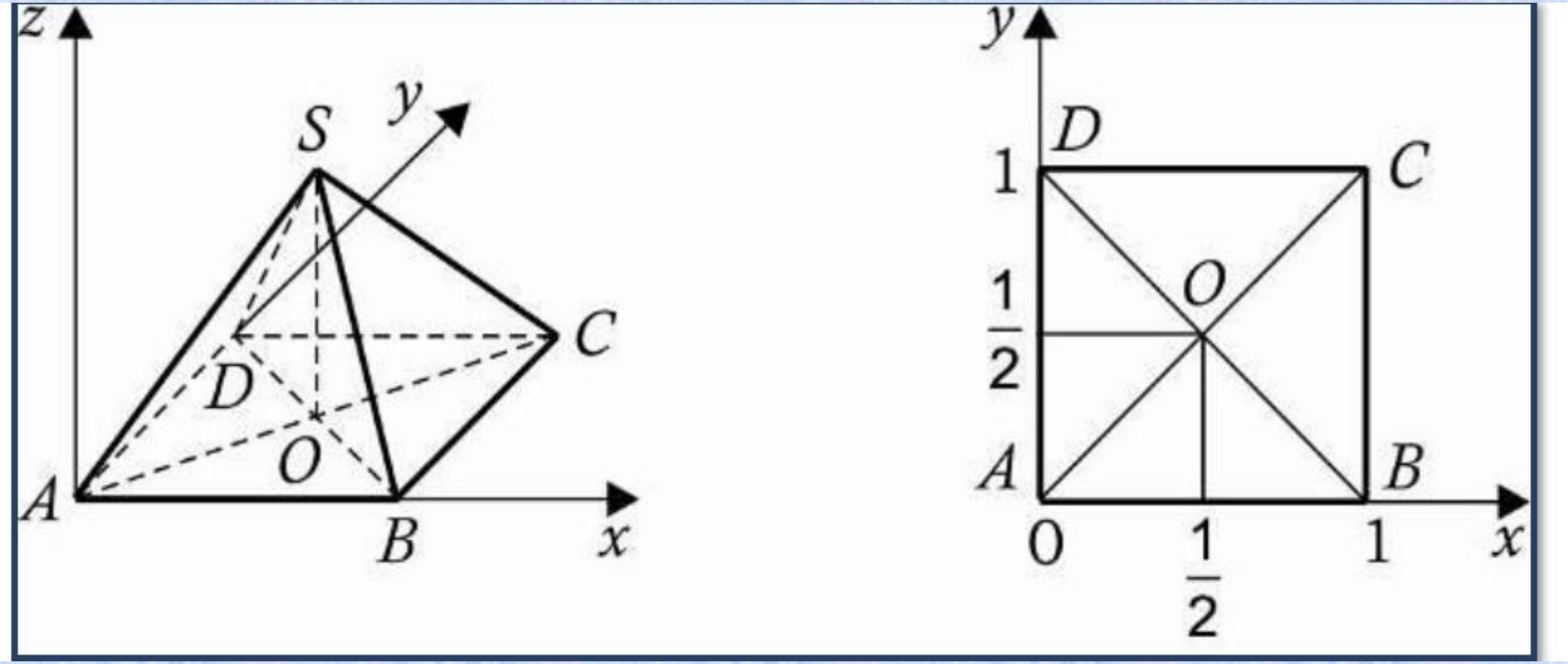
Правильная шестиугольная призма.



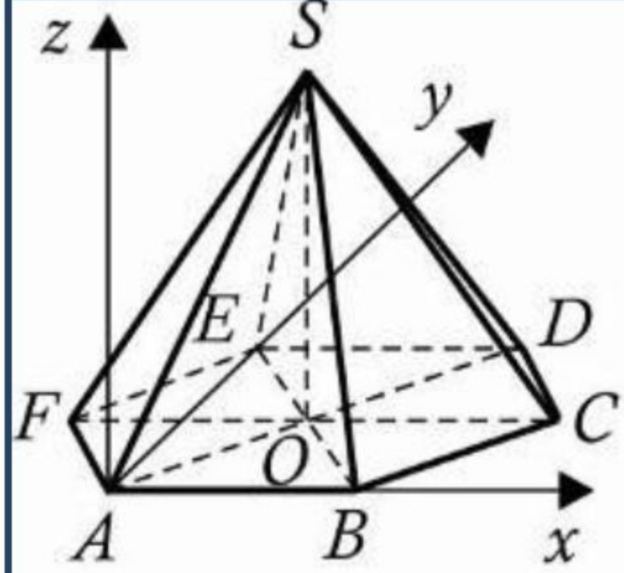
Правильная треугольная пирамида.

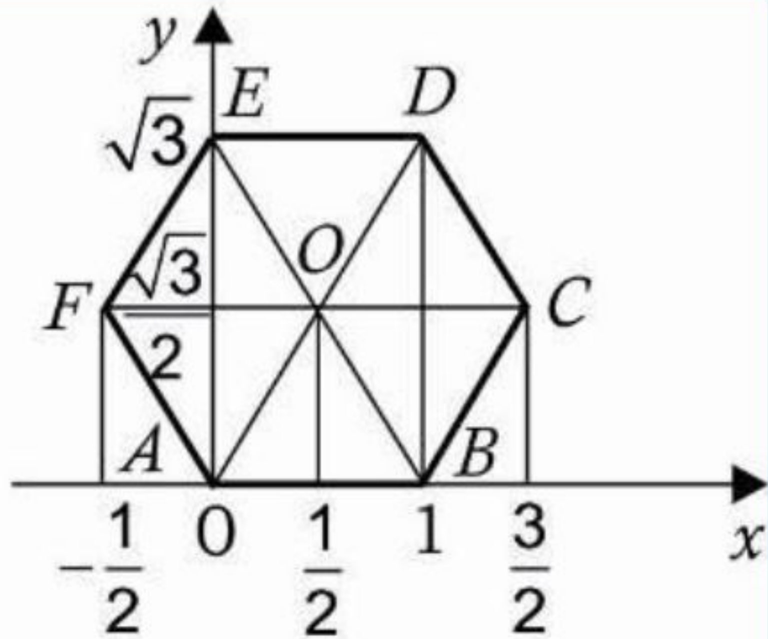


Правильная четырехугольная пирамида.



Правильная шестиугольная пирамида.





Угол между скрещивающимися прямыми.

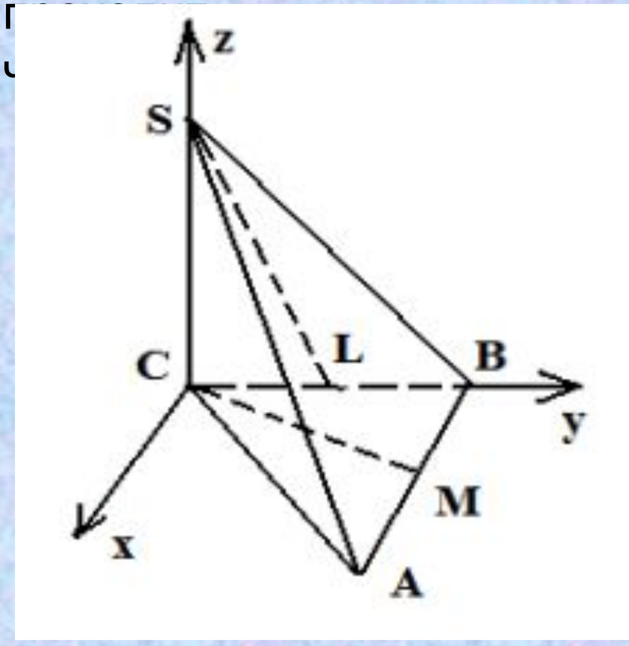
- Найти координаты направляющих векторов прямых;
- По формуле $$\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$ где $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$.

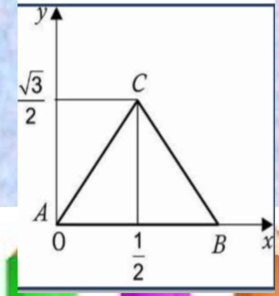
находим косинус угла между векторами;

- Находим угол между прямыми.
- Если косинус отрицательный, то угол тупой, т.е. нужно взять в ответ смежный с ним.

Например,

Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна 2 2 . Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна
из которых проходит через точку S и и середину ребра DC, а другая п
ч бра AB.





Угол между прямой и плоскостью.

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$$ или

$$\sin\phi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$ где

$\vec{n}\{x_1;y_1;z_1\}$ - вектор нормали к плоскости α,

$\vec{p}\{x_2;y_2;z_2\}$ - направляющий векор прямой l;

Как найти координаты нормали?

вектор нормали к плоскости, заданной уравнением Ax+By+Cz+D=0 имеет координаты *n (A;B;C)*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

Решив этот определитель, мы напишем уравнение плоскости. Коэффициенты в этом уравнении –

это координаты нормали к

Как решить определитель?

- правило Саррюса.

Как решить определитель?

- Например,

A(0;0;0)
B(1;0;0)
C1(1;1;1)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

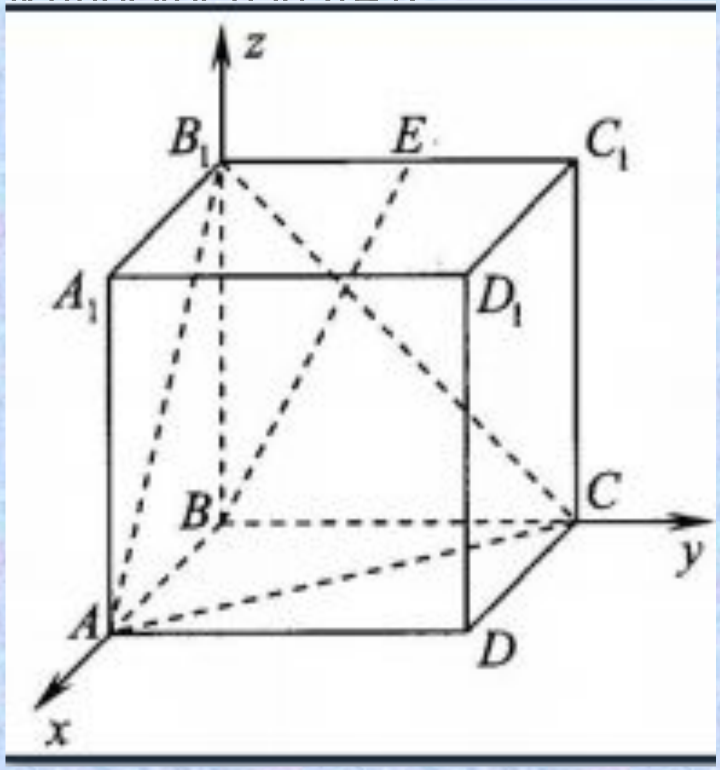
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & x & y \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

y+z=0 - ур-е плоскости ABC1

$\rightarrow \bar{n}\,(0;1;1)$

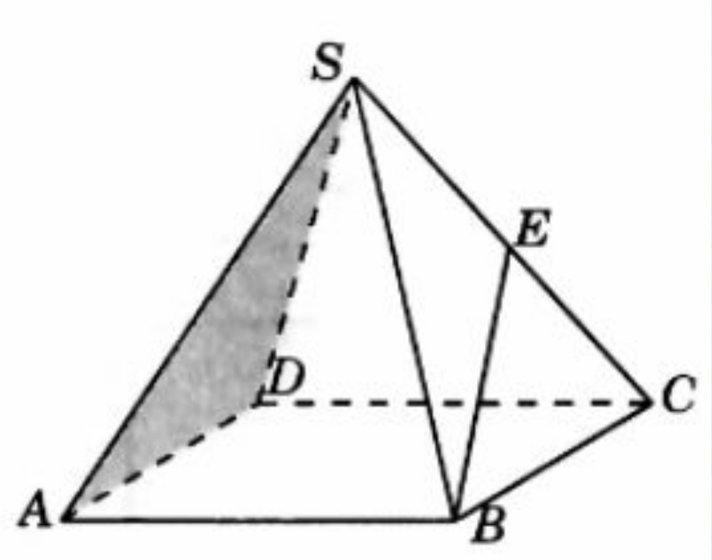
Например,

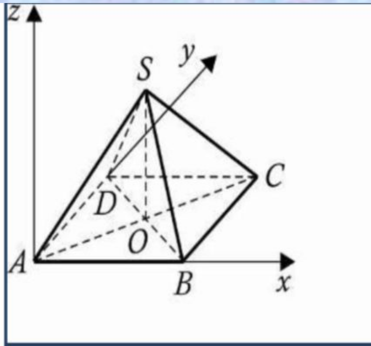
В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA1B1C1D1* рёбра *AB* и *AA1* равны 1, а
ребро *AD=2*. Точка *E* – середина ребра *B1C1*. Найдите угол между прямой *BE* и плоскостью *AB1C*.

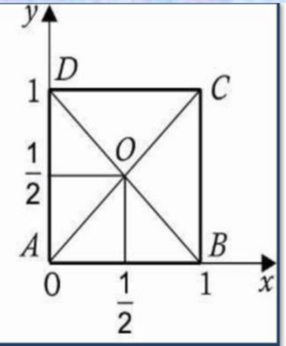


Например,

2.3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E — середина ребра SC.







Угол между плоскостями.

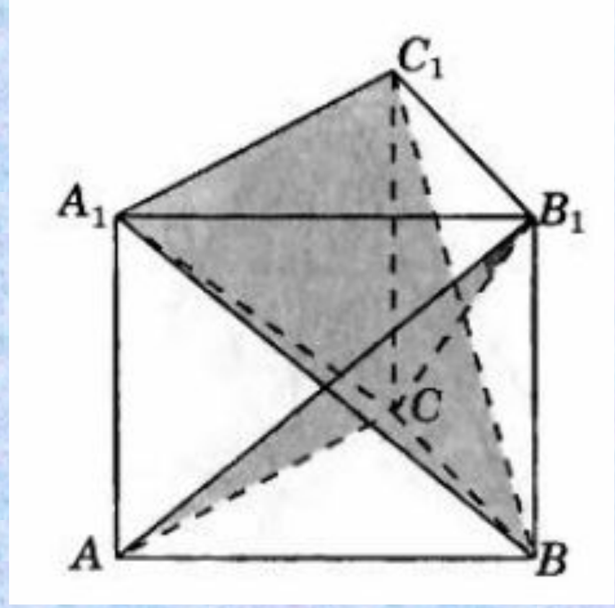
- Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла.
- Чтобы построить линейный угол двугранного угла, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку, и в каждой плоскости провести к этой точке луч перпендикулярно линии пересечения плоскостей.
- Угол, образованный этими лучами и есть линейный угол двугранного угла.
- Угол между двумя плоскостями в пространстве равен модулю угла между нормалями к этим плоскостям.

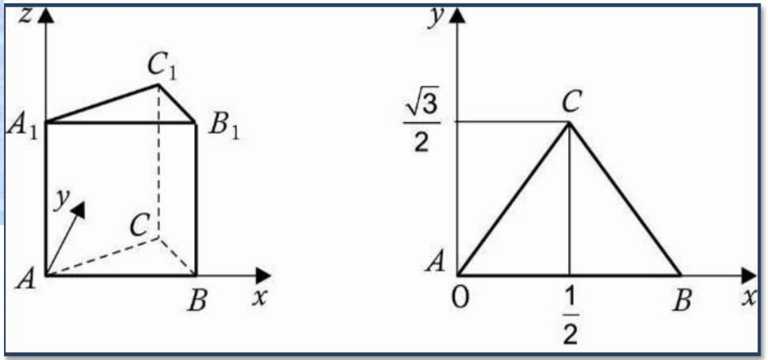
Угол между нормалями?

угол между нормалями по формуле $cos\angle(\alpha,\beta)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$ или в координатной форме $\cos\angle(\alpha,\beta)=\dfrac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, где $\overrightarrow{n_1}\{A_1;B_1;C_1\}$ - вектор нормали плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\overrightarrow{n_2}\{A_2;B_2;C_2\}$ - вектор нормали плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Например,

3.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.





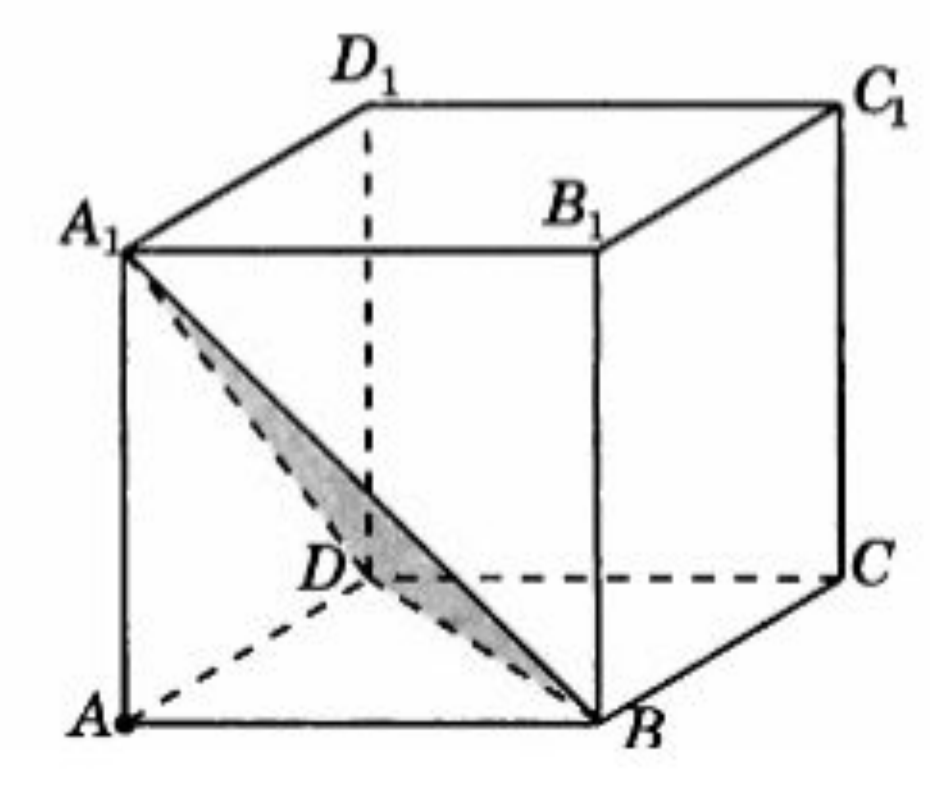
Расстояние от точки до плоскости.

- *Расстояние от точки до плоскости,* не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.
- $$\rho(M;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

  где $M(x_0;y_0;z_0)$, плоскость α задана уравнение $ax+by+cz+d=0$.

Например,

5.1. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.



Мнения о методе координат

- «ЗА!»
- Очень – очень советую освоить координатный, вряд ли будет что-то такое, что координатным не решить! Меня км спасал не один раз. (Пользователь esclade279. Форум http://abiturient.pro)
- чтобы успешно решить С2, нужно разобраться в одном универсальном способе: - координатный способ. Все длины, углы легко находятся. - бывший абитуриент, ныне студент (Пользователь delpaNz. Форум http://abiturient.pro)
- Ребят, решайте координатным методом С2! Так без особых знаний можно решить почти любую задачу.(Пользователь 777Julia777 http://forum.postupim.ru)
- А почему бы учителям не научить абитуру считать определители 3-го порядка? Тогда задача на нахождение расстояния от точки до прямой и между прямыми из суперсложной и недоступной многим геометрической задачи становится простой арифметической задачкой, где главное – не наврать в счете. Конечно, ваше учительское сердце протестует против этого, стремясь всех научить геометрическим методам, но результат +2 балла все таки наиболее вероятен во втором случае. Да и в универе нет чистой геометрии, только аналитическая.(Пользователь Марина http://www.alexlarin.com

- «против!»

С2 обчно до ужаса простая задача, которая решается в 50% случаев в уме.
Так что метод координат тут не рационален. С4 иногда можно порешать этим методом, но чаще нет.
(Пользователь Hellko. Форум http://forum.postupim.ru)

**Алгебра - не что иное как записанная
в символах геометрия,
а геометрия - это просто алгебра,
воплощенная в фигурах.
Софий Жермен (1776-1831)**

Рада была помочь!