

ОБЕРТАЛЬНИЙ  
РУХ  
ТВЕРДОГО  
ТІЛА



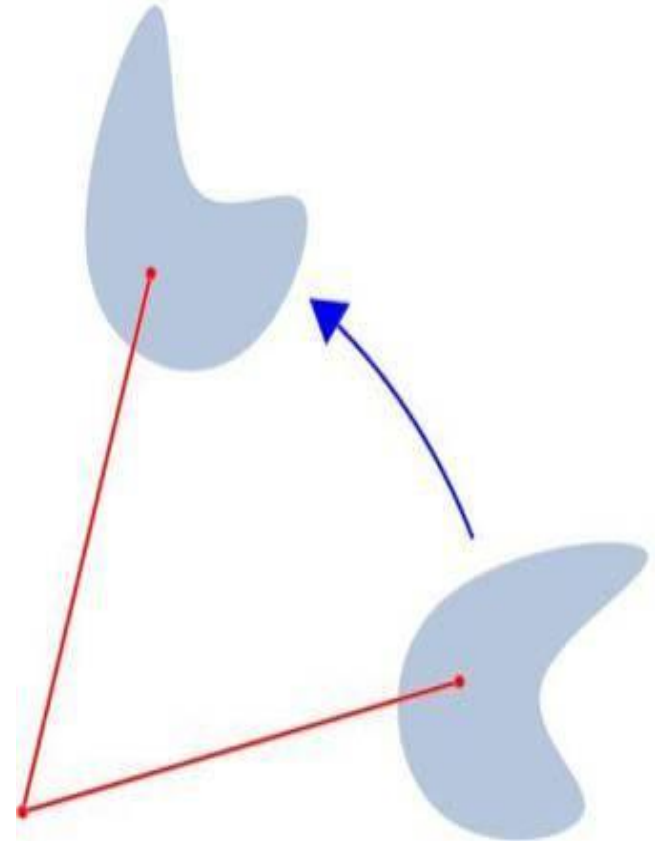
# ВСТУП

---

**Обертальним рухом твердого тіла** або системи тіл називається такий рух, при якому всі точки рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, яка називається віссю обертання, а площі кіл перпендикулярні осі обертання.

*Приклади:*

ротори турбін, шестерні, вали станків і машин та ін.




# ПЛАН

---

---

- Кінематика обертального руху.
- Динаміка обертального руху
  - Основне рівняння динаміки обертального руху
  - Динаміка довільного руху
- Закони збереження
  - Закон збереження моменту імпульсу
  - Кінетична енергія тіла, що обертається
  - Закон збереження енергії
- Висновки



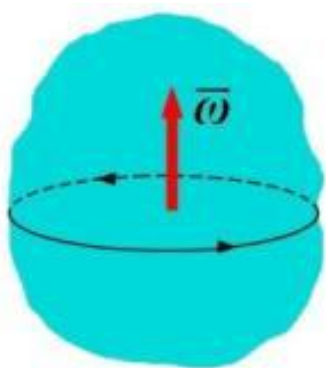
# КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

# НАПРЯМ ВЕКТОРІВ

---

## Напря́м куто́вої швидко́сті

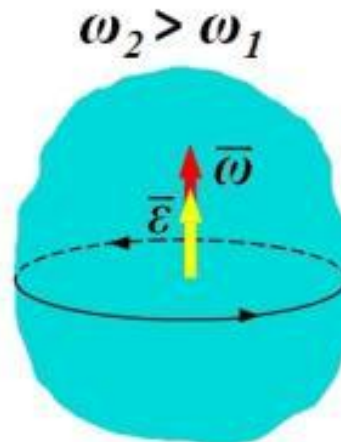
Визначається за правилом правого гвинта: якщо гвинт обертаючись в напрямку обертання тіла, то напря́м поступального руху гвинта співпадає з напрямом кутової швидкості.



## Напря́м кутового прискорення

При прискореному обертанні вектори кутової швидкості і кутового прискорення співпадають за напрямом.

При сповільненому обертанні вектор кутового прискорення напрямлений протилежно вектору кутової швидкості.



# АНАЛОГІЯ РУХУ

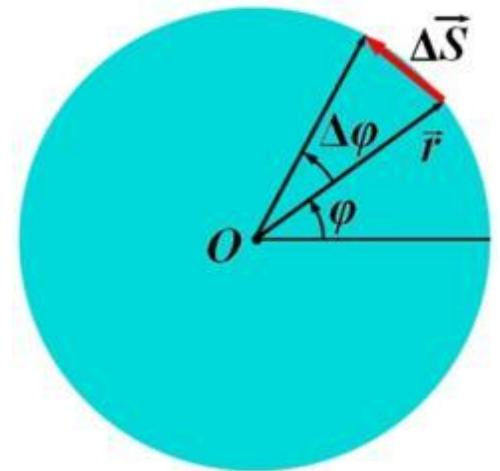
| Поступальний рух  | Обертальний рух  |
|---|--|
| Переміщення $\Delta s$ , $[\Delta s] = \text{м}$                                  | Кутове переміщення $\Delta\varphi$ , $[\Delta\varphi] = \text{рад}$  |
| Швидкість $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ , $[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}$     | Кутова швидкість $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ , $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$              |
| Прискорення $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ , $[a] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ | Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ , $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ |

## Пряма задача кінематики обертального руху

За заданим кутом повороту як функція від часу  $\varphi = f(t)$  знайти кутову швидкість та прискорення.

## Обернена задача

За заданими кутовим прискоренням як функція від часу  $\varepsilon = f(t)$  і початковими умовами  $\omega_0$  і  $\varphi_0$  знайти кінематичний закон обертання.



## Характеристики руху

## Рух матеріальної точки по колу

Період

$$T = \frac{t}{N}$$

Частота

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$$

Кутова швидкість

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T^2} = 2\pi\nu^2$$

Переміщення

$$\Delta s = r\Delta\varphi$$

Лінійна швидкість

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega$$

Нормальне прискорення

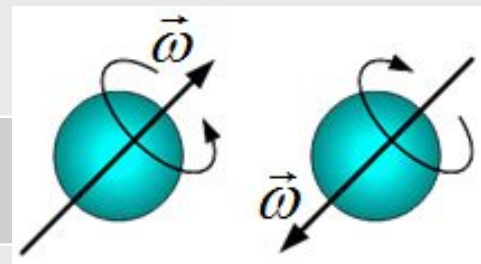
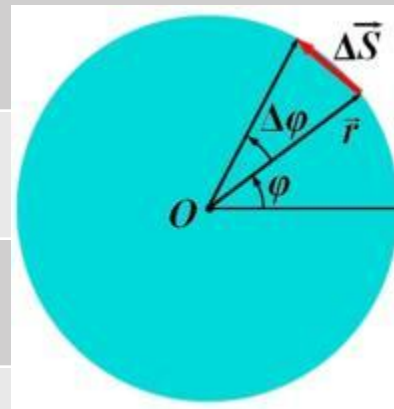
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Тангенціальне прискорення

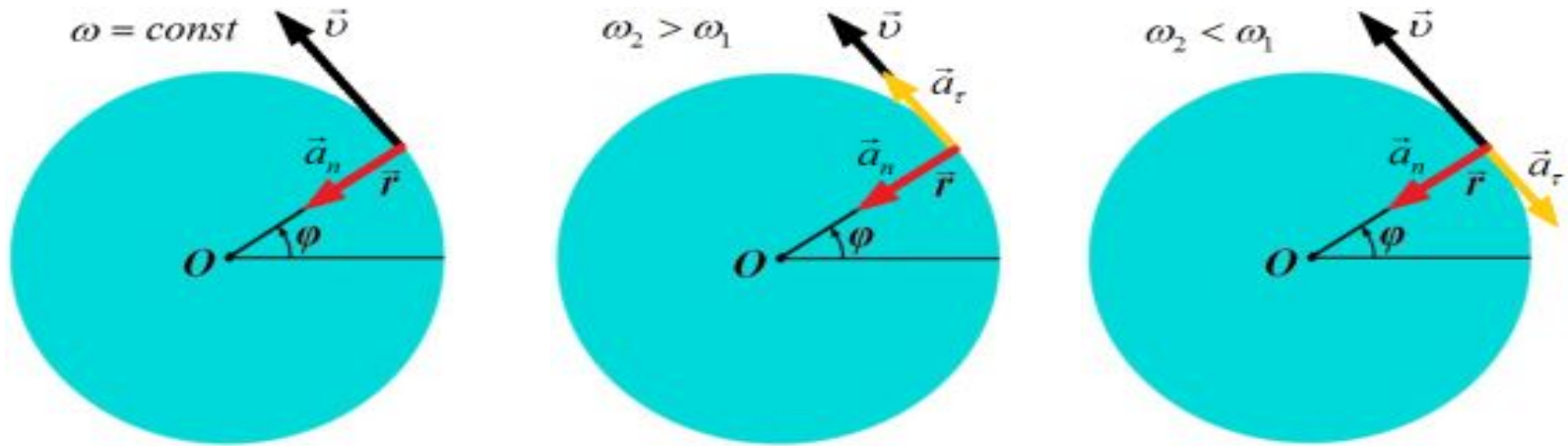
$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = r\varepsilon$$

Повне прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



# НАПРЯМ ВЕКТОРІВ ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ

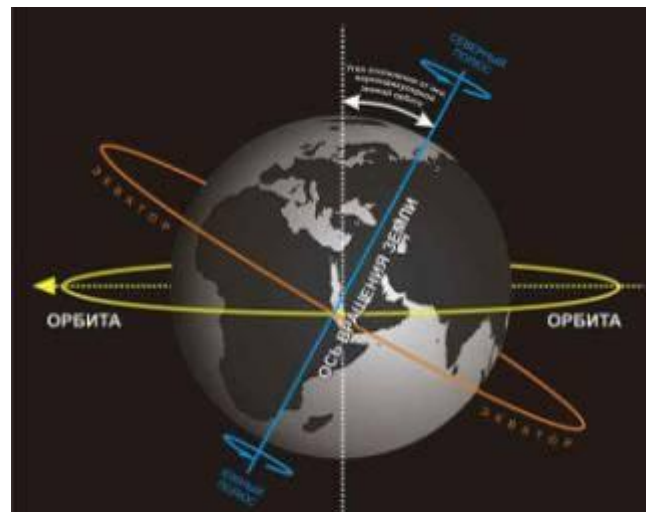


|                           |                                 |  |  |
|---------------------------|---------------------------------|--|--|
| Нормальне прискорення     | По радіусу до центру кола       |  |  |
| Кутова швидкість          | $\omega = \text{const}$         | $\omega_2 > \omega_1$                              | $\omega_2 < \omega_1$                                |
|                           | Перпендикулярно площині рисунка |  |  |
| Лінійна швидкість         | $v = \text{const}$              | $v_2 > v_1$  | $v_2 < v_1$  |
|                           | По дотичній в напрямку руху     |  |  |
| Тангенціальне прискорення | ні                              | $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$           | $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$           |
| Кутове прискорення        | ні                              | $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ | $\vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ |



# ФОРМУЛИ КІНЕМАТИКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

| Поступальний  | Обертальний  |
|---|--|
| Рівномірний   |  |
| $a = 0$   | $\varepsilon = 0$  |
| $v = \text{const}$  | $\omega = \text{const}$  |
| $s = vt$  | $\varphi = \omega t$   |
| Рівноприскорений  |  |
| $a = \frac{v - v_0}{t} = \text{const}$  | $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \text{const}$   |
| $v = v_0 + a_\tau t$  | $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$  |
| $s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$  | $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$   |
| $v^2 - v_0^2 = 2a_\tau s$   | $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon \varphi$   |
| Нерівномірний   |  |
| $s = f(t)$  | $\varphi = f(t)$   |
| $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ | $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)$   |
| $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$ | $\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \omega'(t)$ |



# ДОВІЛЬНІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

поступательное

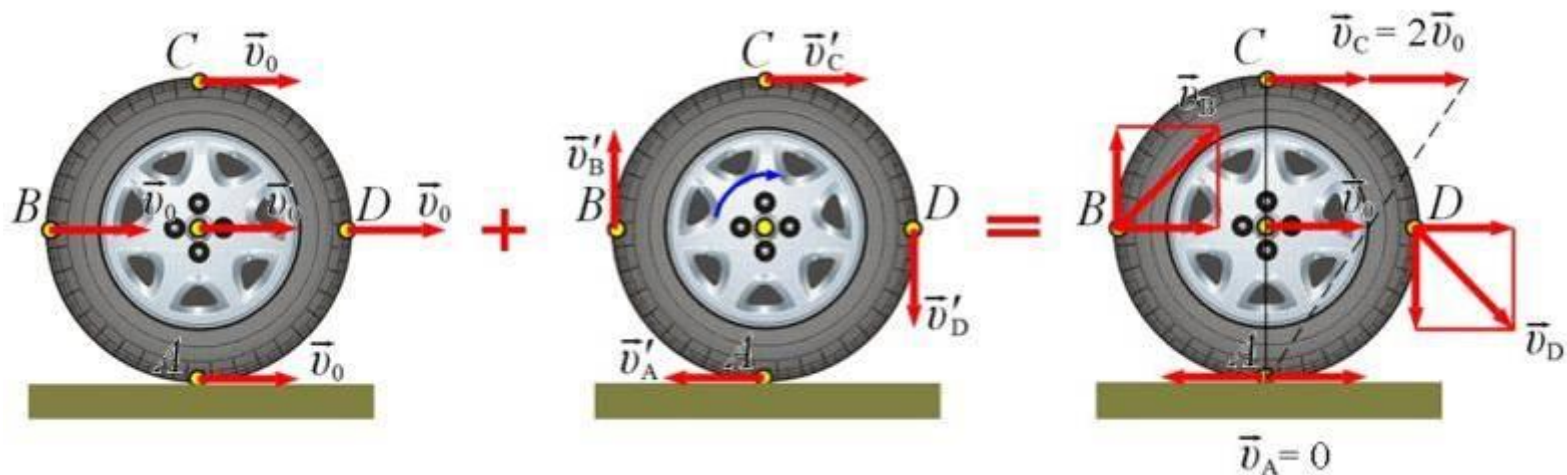


вращательное



сложное движение

**Приклад:** плоскопараллельний рух колеса без проковзування по горизонтальній поверхні. Кочення колеса можна представити як суму обох рухів: поступального руху зі швидкістю центра мас тіла та обертання відносно осі, що проходить через центр мас.



# ЯКІСНА ЗАДАЧА

---


Методом послідовної зйомки показана кінематика руху Дворцового мосту в Санкт-Петербурзі.

Витримка фотографії 6 секунд.

**Яку інформацію про рух моста можна отримати з фотографії?**

**Проаналізуйте кінематику його руху.**





# ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА





# ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

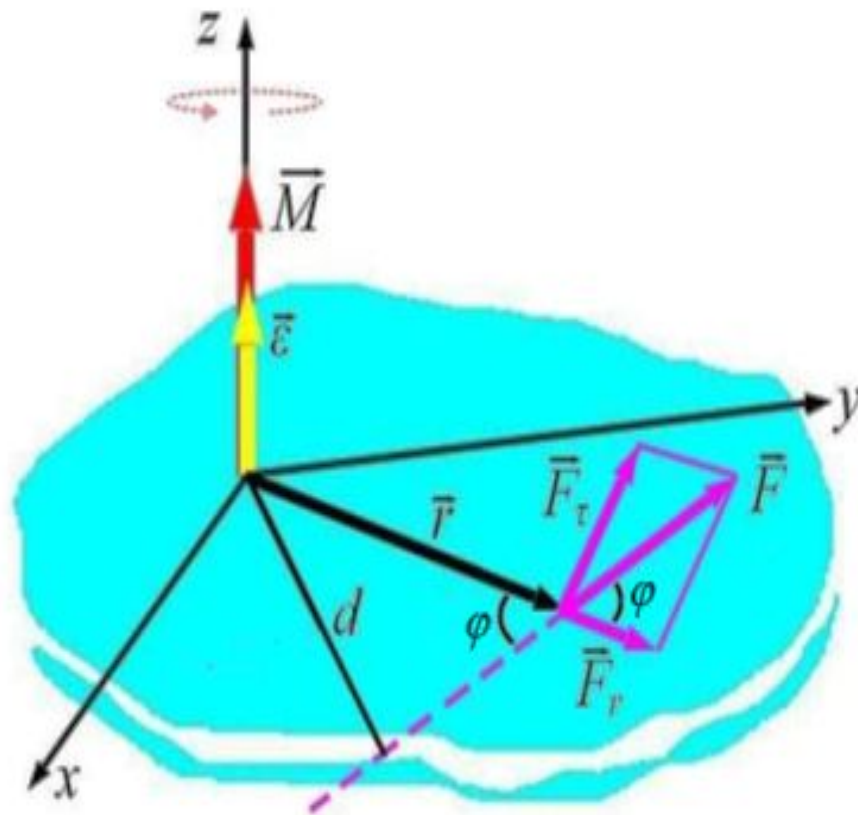


# ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

---

## Основна задача динаміки обертального руху

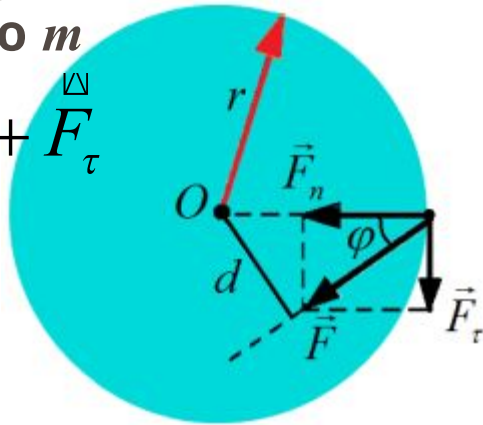
Встановити зв'язок кутового прискорення обертального руху тіла з силовими характеристиками його взаємодії з другими тілами і власними властивостями тіла, що обертається.



# ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Для довільної точки тіла  
масою  $m$

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$$



- За другим законом Ньютона

$$F_n = ma_n, \quad F_\tau = ma_\tau = m\epsilon r$$

- 3 геометричних міркувань

$$F_\tau = F \sin \varphi = F \frac{d}{r}, \quad \Rightarrow$$

$$mr^2 \epsilon = Fd = M$$

Для тіла, як сукупності  
частинок малих мас

- З урахуванням векторного характера

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \epsilon = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{M}_e$$

- Скалярная физическая величина, характеризующая распределение массы относительно оси вращения, называется моментом инерции тела:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum m_i r_i^2$$

- Сумма моментов внутренних сил  $\vec{M}_i$  равна нулю, следовательно

$$I \epsilon = \sum \vec{M}_e = \vec{M}$$

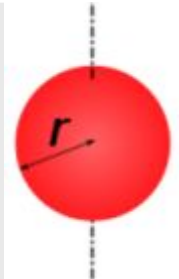

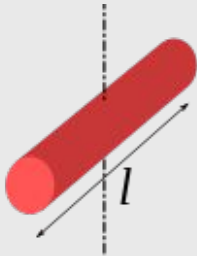
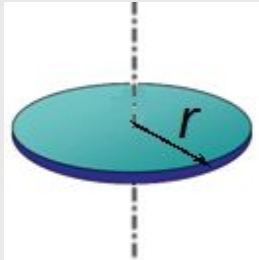
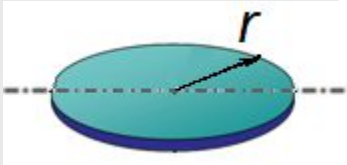
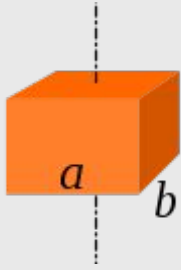
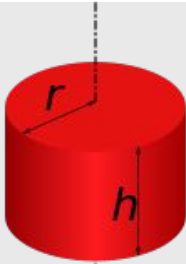
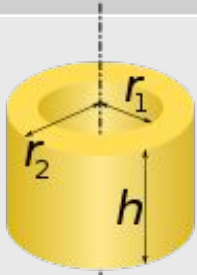
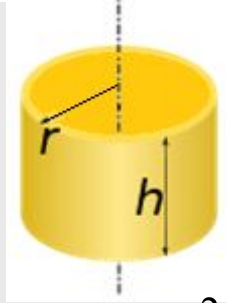
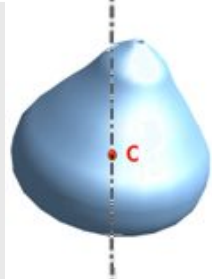
# ПОРІВНЯННЯ РУХІВ

| Поступальний рух  | Обертальний рух   |
|---|---|
| Маса $m, [m] = \text{кг}$   | Момент інерції $I = kmr^2, [I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$  |
| Сила $\vec{F}, [F] = \text{Н}$  | Момент сили $M = Fd; \vec{M}, [M] = \text{Н} \cdot \text{м}$  |
| Основне рівняння динаміки<br>$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$   | Основне рівняння динаміки<br>$\vec{\varepsilon} = \frac{\sum \vec{M}}{I}$   |
| Прискорення тіла при поступальному русі прямо пропорційне сумі всіх діючих на нього сил і обернено пропорційне масі тіла. | Кутове прискорення тіла при обертальному русі прямо пропорційне сумі моментів всіх діючих на нього сил відносно осі обертання тіла і обернено пропорційне моменту інерції тіла відносно цієї осі обертання. |

**Принципова різниця:** маса є інваріантом, і не залежить від того, як тіло рухається. Момент інерції змінюється при зміні положення осі обертання або її напрямлення у просторі.



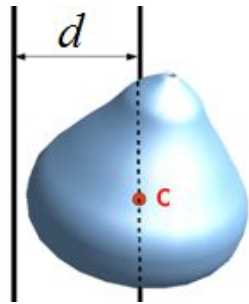
## Моменти інерції деяких тіл

| Шар  | Тонкостінна сфера   | Однорідний стержень  | Диск   | Диск   |
|--|---|--|--|--|
|  $I = \frac{2}{5} mr^2$           |  $I = \frac{2}{3} mr^2$  |  $I = \frac{1}{12} ml^2$             |  $I = \frac{1}{2} mr^2$ |  $I = \frac{1}{4} mr^2$ |
| Однорідна пластинка  | Однорідний циліндр  | Товстостінний циліндр  | Тонкостінний циліндр   | Довільне тіло  |
|  $I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ |  $I = \frac{1}{2} mr^2$ |  $I = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$ |  $I = mr^2$            |  $I = \sum m_i r_i^2$  |

# ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

---

- **Теорема про перенесення осей інерції (Штейнера):** момент інерції твердого тіла відносно довільної осі  $I$  дорівнює сумі момента інерції цього тіла  $I_0$  відносно осі, що проходить через центр мас тіла паралельно осі, яка розглядається, і добутку маси тіла  $m$  на квадрат відстані  $d$  між осями:



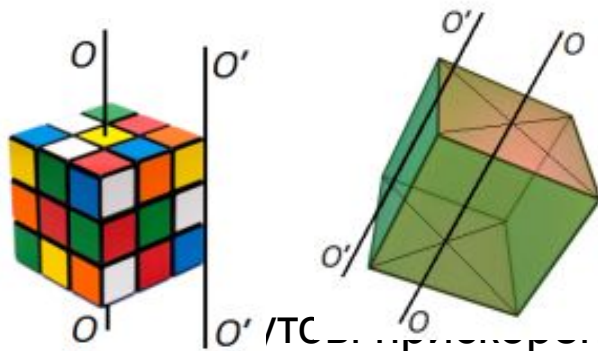
$$I = I_0 + md^2$$

- **Застосування теореми Штейнера:**
- **Задача.** Визначити момент інерції однорідного стержня довжиною  $l$  відносно осі, що проходить через один із його кінців перпендикулярно стержню.
- **Розв'язок.** Центр мас однорідного стержня розміщений посередині, тому момент інерції стержня відносно осі, що проходить через один із його кінців, дорівнює:

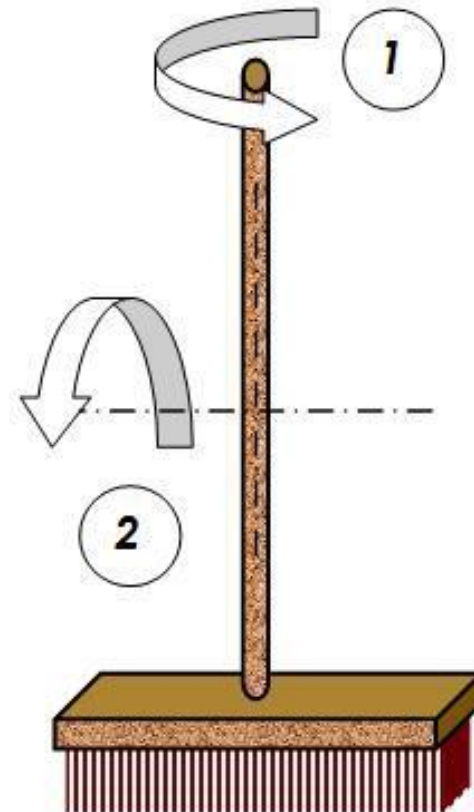
$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

# ЯКІСНІ ЗАДАЧІ

- Як відрізняються моменти інерції кубів відносно осей  $OO$  і  $O'O'$ ?
- Які з цих обертань є більш складними? Чому?

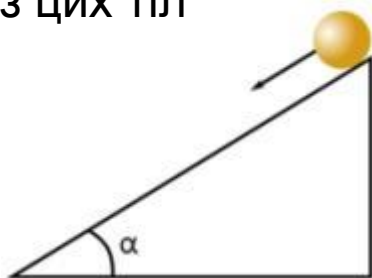


- П... /ТС... ня обох тіл, що зображені на рисунку, при однаковій дії на них моментів зовнішніх сил.



# ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

- **Задача:** По гладкій похилій площині скочуються шар і однорідний циліндр однакової маси. Яке з цих тіл скотиться швидше?

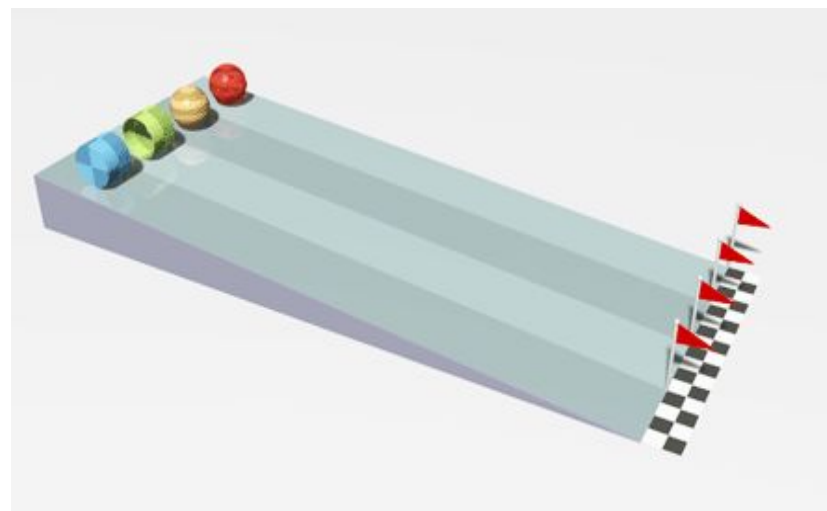


- **Примітка:** Рівняння динаміки обертального руху тіла можна записувати не тільки відносно нерухомої або осі, що рівномірно рухається, але й відносно осі, що рухається з прискоренням, за умови, що вона проходить через центр мас тіла і її напрямлення в просторі залишається незмінним.

- Підказка 1
- Підказка 2
- Розв'язок задачі



- Давайте обміркуємо:

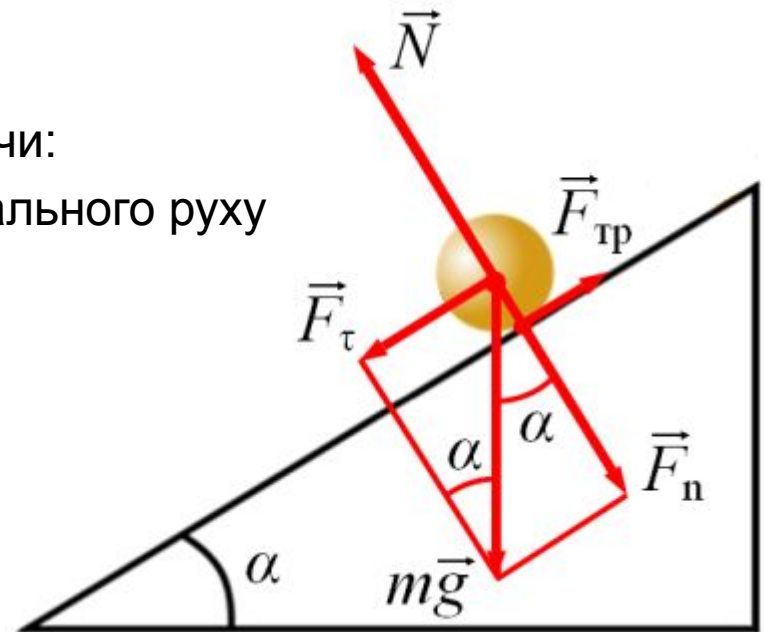


## Підказка 2

---

### Задача про кочення симетричного тіла по похилій площині

- Відносно осі обертання, що проходить через центр мас тіла, моменти сил тяжіння і реакції опори дорівнюють нулю, момент сили тертя дорівнює  $M = F_{\text{тр}} r$ .
- Складіть систему рівнянь, застосовуючи:
  - основне рівняння динаміки обертального руху для тіла, яке скочується;
  - другий закон Ньютона для поступального руху центра мас.



# Розв'язок задачі

---

- Момент інерції шара і однорідного циліндра відповідно дорівнюють:

$$I_{\text{ш}} = 0,4mr^2, \quad I_{\text{ц}} = 0,5mr^2.$$

- Рівняння обертального руху:

$$I\varepsilon = M, \Rightarrow \quad I \frac{a}{r} = F_{\text{тр}} r$$

- Рівняння другого закону Ньютона для поступального руху центра мас

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

- Прискорення шара і циліндра при скочуванні з похилої площини відповідно дорівнюють:

$$a_{\text{ш}} = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{0,4mr^2}{r^2} + m} = \frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad a_{\text{ц}} = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{0,5mr^2}{r^2} + m} = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

- $a_{\text{ш}} > a_{\text{ц}}$ , отже, шар буде скочуватись швидше ніж циліндр.
- Узагальнюючи отриманий результат на випадок скочування симетричних тіл з похилої площини, отримаємо, що швидше буде скочуватись тіло, що має найменший момент інерції.





# ДИНАМІКА ДОВІЛЬНОГО РУХУ



# ДИНАМІКА ДОВІЛЬНОГО РУХУ

Довільний рух твердого тіла можна розкласти на поступальний рух, в якому всі точки тіла рухаються зі швидкість центра мас тіла, та обертання центра мас.

**Теорема про рух центра мас: центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка масою, яка рівна масі всієї системи, до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.**

**Наслідки:**

- Якщо вектор зовнішніх сил системи рівний нулю, то центр мас системи або рухається з постійною за величиною ті напрямком швидкістю, або знаходиться в стані спокою.
- Якщо сума проєкцій зовнішніх сил на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проєкція вектора швидкості руху центра мас системи на цю вісь або *const*, або рівна нулю.
- Внутрішні сили не впливають на рух центра мас.





# ІЛЮСТРАЦІЯ ТЕОРЕМИ

---

Режим послідовної зйомки дозволяє проілюструвати теорему про рух центра мас системи:

при спуску затвора за одну секунду можна відобразити кілька зображень.

При об'єднанні такої серії спортсмени, які виконують трюки, і тварини в русі перетворюються в щільну чергу близнюків.

