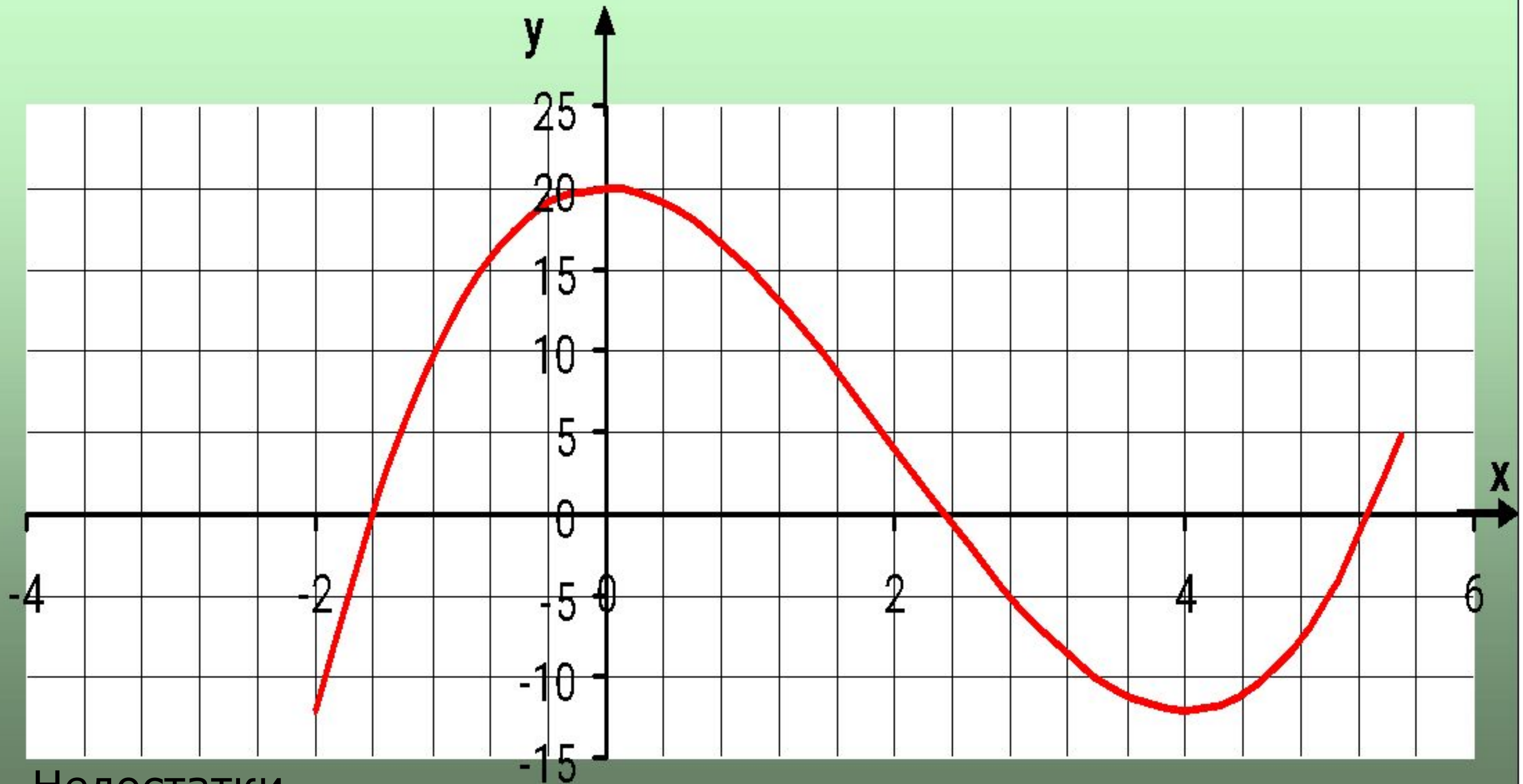
Графический метод решения уравнений

Пусть дано уравнение

$x^3-6*x^2+20 = 0$

y=x^3-6*x^2+20



Недостатки

Преимущества

Недостатки

- Можно найти корни уравнения в некотором ограниченном интервале, т.к. чертеж неизбежно ограничен
- Для получения корней с большей степенью точности применяются численные методы

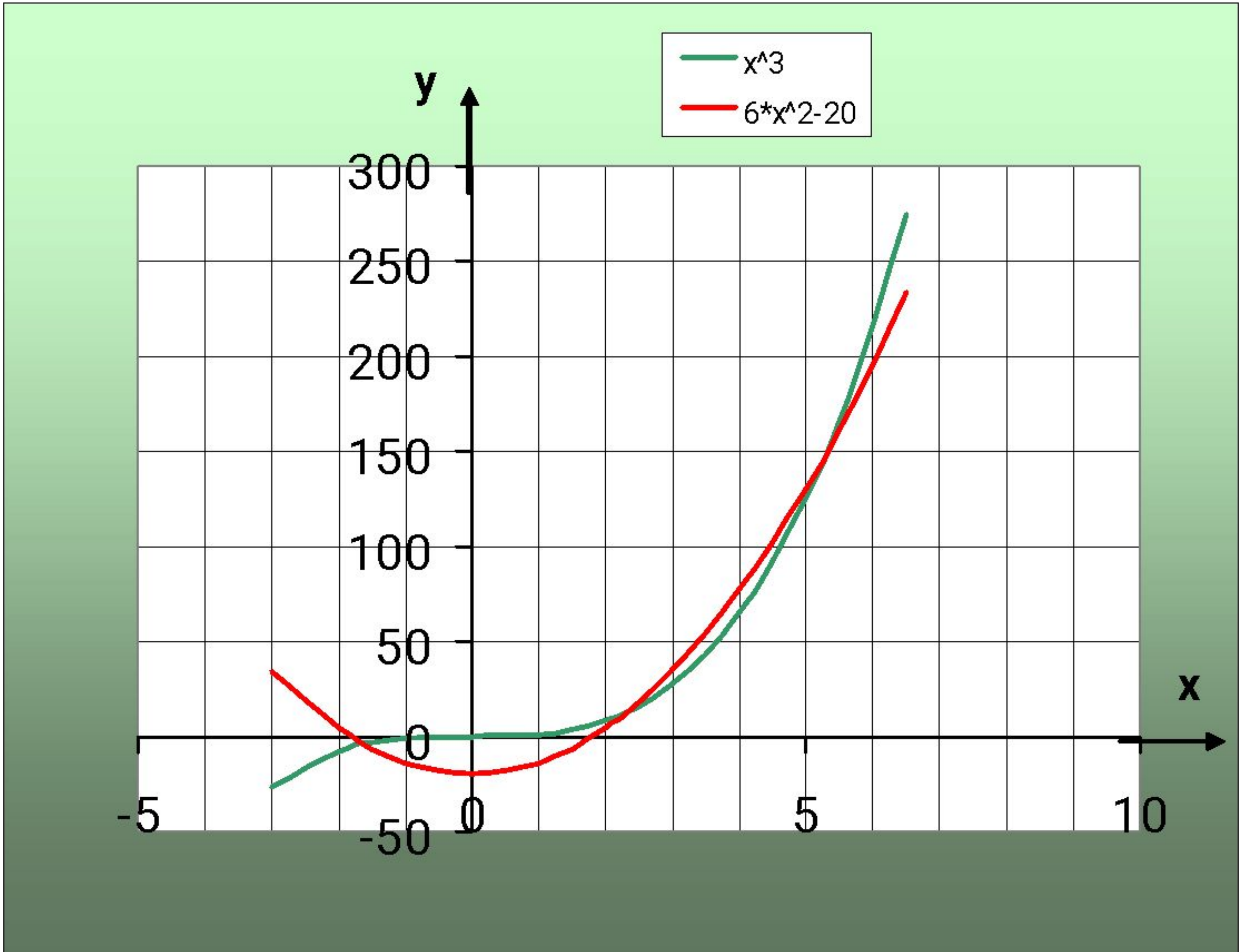
Преимущества

- Позволяет найти корни с точностью, достаточной для решения практических задач
- Простота
- Доступность
- Наглядность

Применяют запись уравнения, при которой используются функции, графики которых хорошо известны

$$\varphi(x) = g(x)$$

x^3 = 6*x^2-20

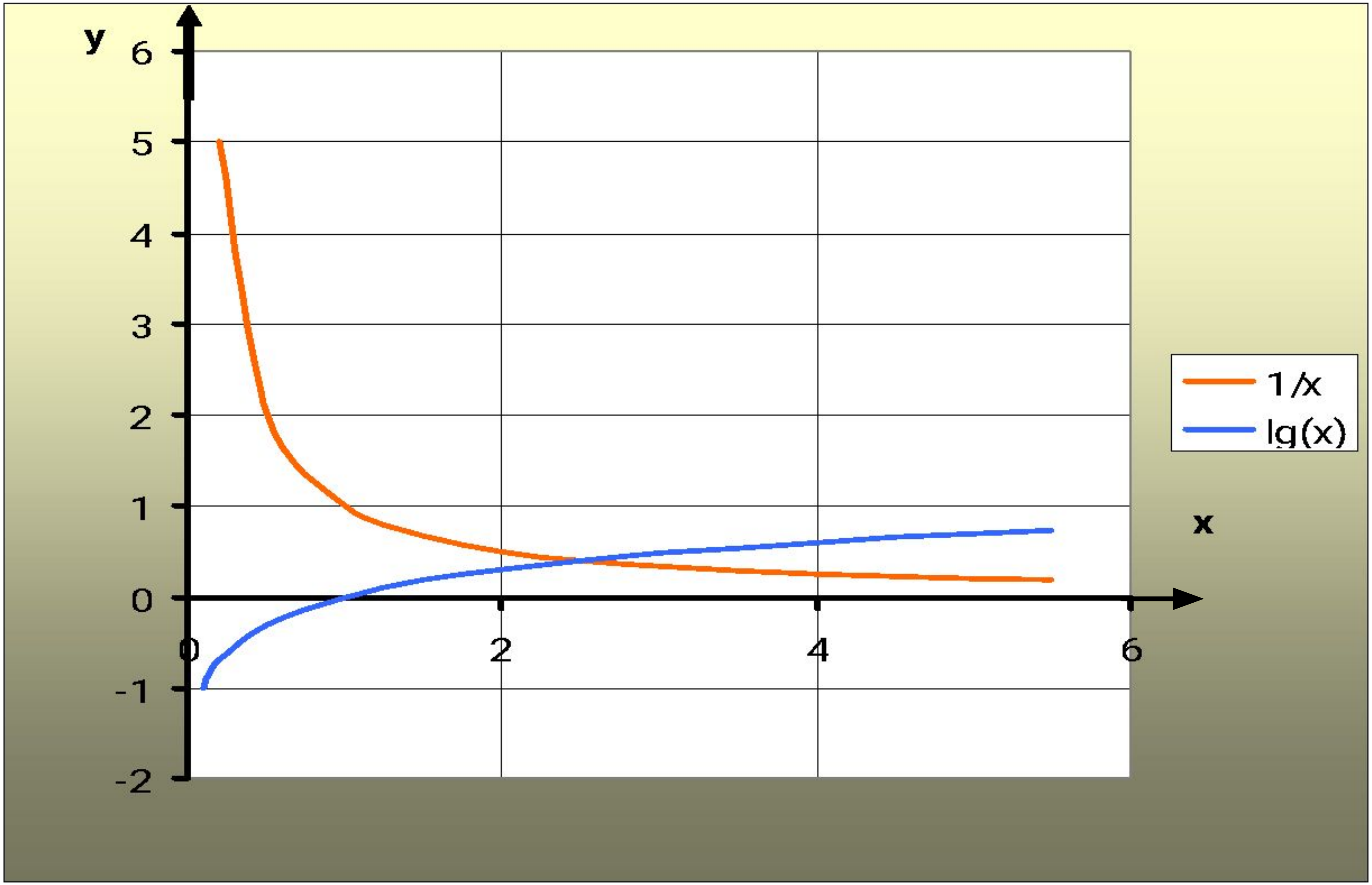


x^3
6*x^2-20
y
x
300
250
200
150
100
50
0
-50
-5
0
5
10

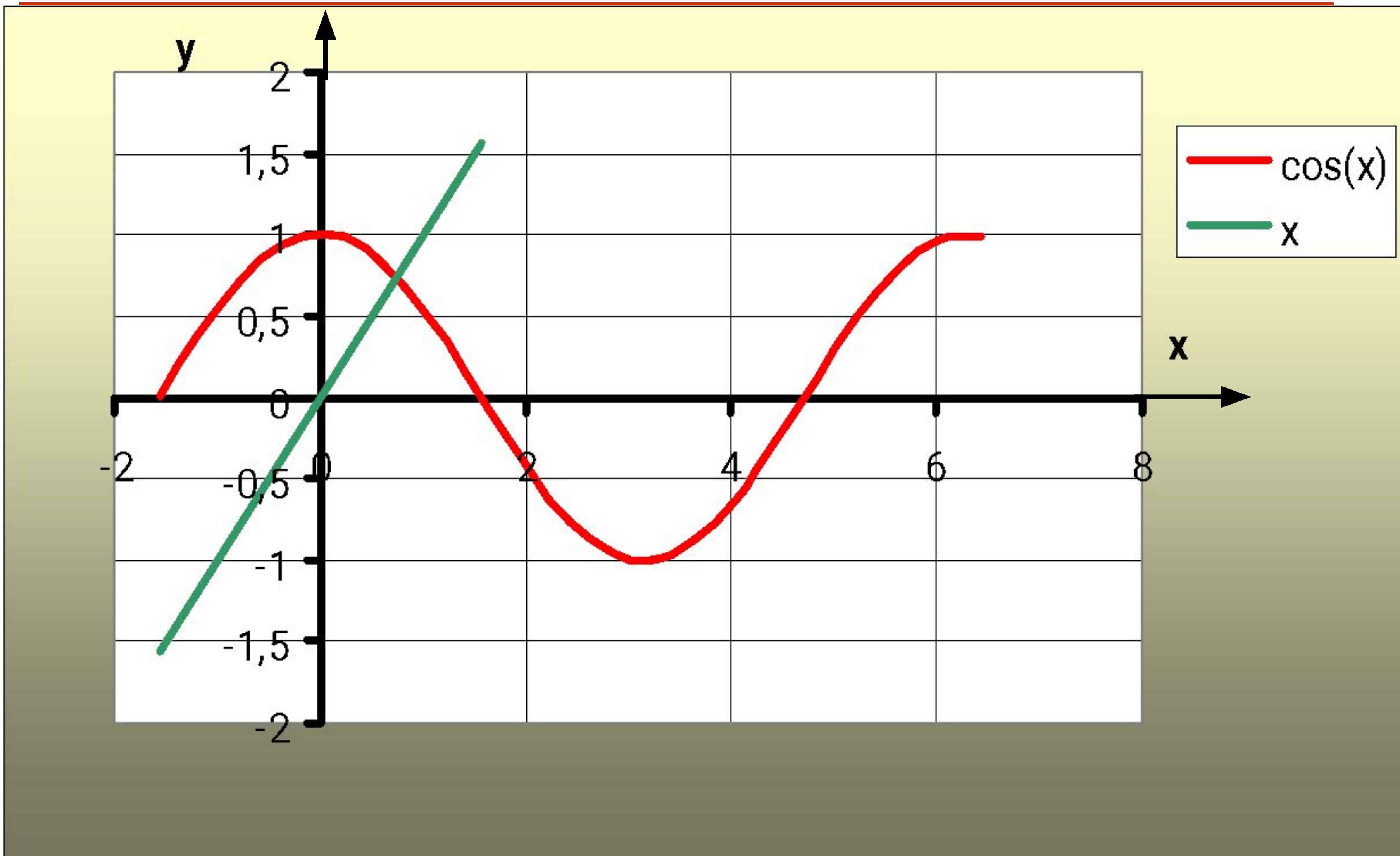
Задача об отыскании всех корней уравнения

- Сделан чертеж для ограниченного промежутка
- На чертеже графики функций y=φ(x) и y=g(x)
- Зная свойства этих функций, можем представить вид этих графиков при неограниченном их продолжении.

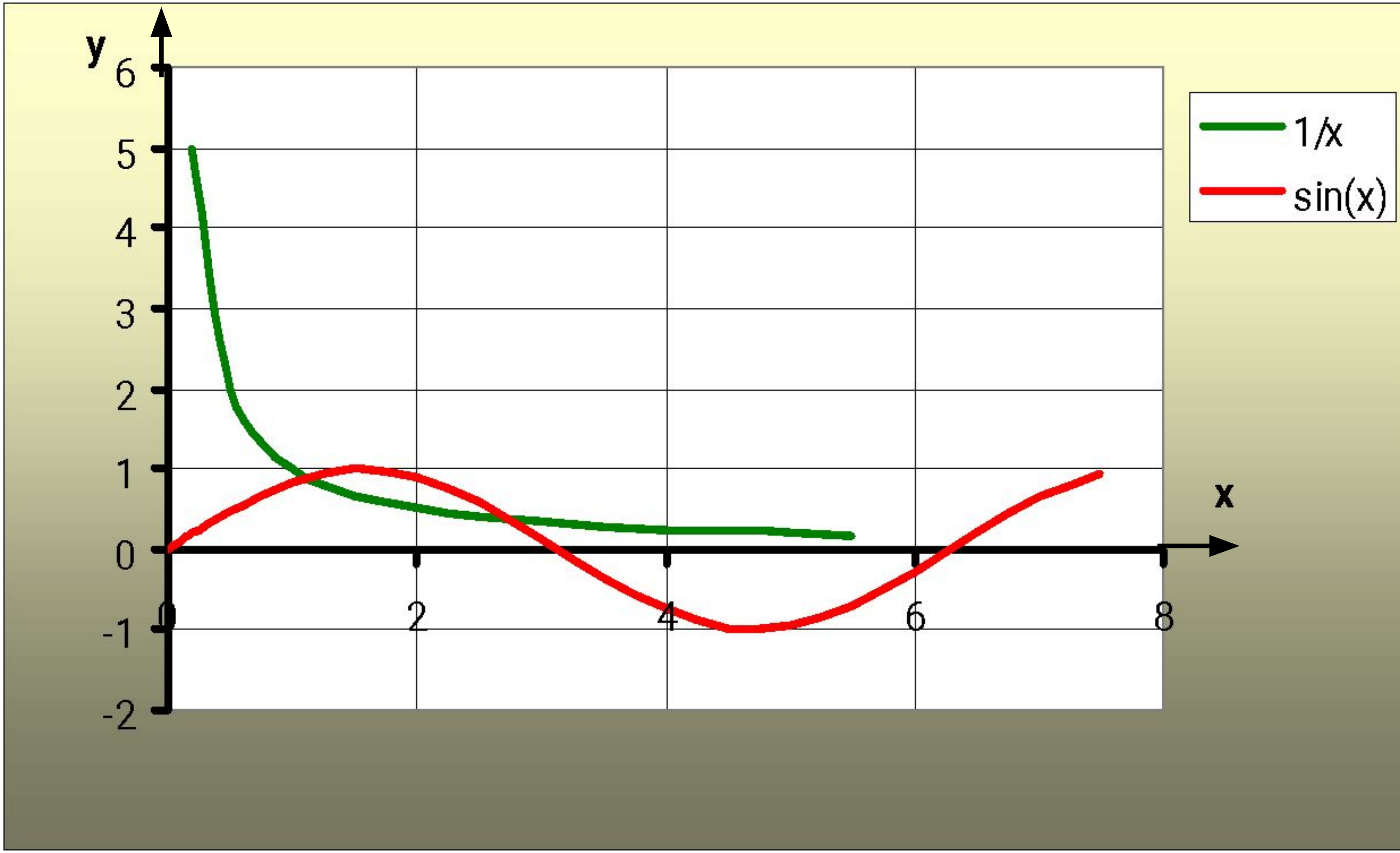
Пример 1. xlg(x)=1



Пример 2. x=cos(x)



Пример 3. 1/x=sin(x)



Последовательность действий

- Представить уравнение в виде
  φ(x) = g(x) так, чтобы графики функций
  y=φ(x) и y=g(x) были известны или достаточно простыдля исследования и построения.
- Построить графики функций
  y=φ(x) и y=g(x) в промежутке [a;b]. Первое грубое приближение.
- Найти точки пересечения двух графиков
- Сделать новый чертеж в большем масштабе для небольшого промежутка

Пример оформления задания по графическому решению уравнения в электронной таблице

Отделение корней уравнения

Для получения значения корня с любой степенью точности применяются численные методы

Нахождение приближенных значений корней разбивается на два этапа

- Отделение корней
- Уточнение корней до заданной степени точности

Отделение корней. Определение

- Говорят, что корень ξ уравнения отделен на отрезке [a;b], если этот корень содержится в данном отрезке и на этом отрезке других корней нет.

- Произвести полное отделение всех корней уравнения – значит разбить всю область допустимых значений на интервалы , в каждом из которых содержится только по одному корню (или ни одного).

Отделение корней

- Графически
- Аналитически (основываясь на свойствах функции).

Теорема

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения $f(x) = 0$, и притом единственный.

Пример

Отделим корни уравнения

x^3-6*x^2+20 =0

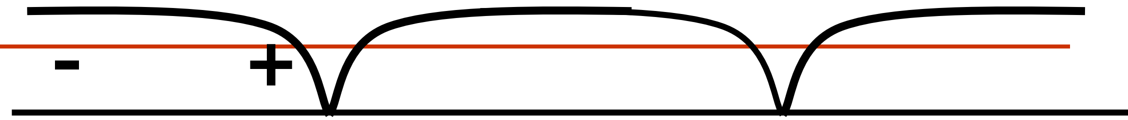
1. Графически
2. Аналитически

$f'(x) = 3*x^2-6*2*x = 3*x*(x-4)$

$3*x*(x-4) = 0$

$x_1=0$ + - +

$x_2=4$ 0 4



1 $f(-2)=-12<0$

$f(0) = 20>0$ [-2;0] единственный корень

2 $f(0) = 20>0$

$f(4) =-12<0$ [0;4] единственный корень

3 $f(4) =-12<0$

$f(6) = 20>0$ [4;6] единственный корень

Полное отделение корней:

- (-∞;-2] нет корней
- (-2;0] один корень
- (0;4] один корень
- (4;6] один корень
- (6; +∞) нет корней

Уточнение корней

- Пусть дано уравнение f(x) = 0. Требуется найти корень ξ с точностью ε
- Пусть этот корень отделен; значит

  $a \le \xi \le b$,

a-приближенное значение с недостатком;

b- приближенное значение с избытком;

b-a погрешность.

Если $b-a \le \varepsilon$ то задача решена.

Иначе надо сужать интервал b-a.

Численные методы