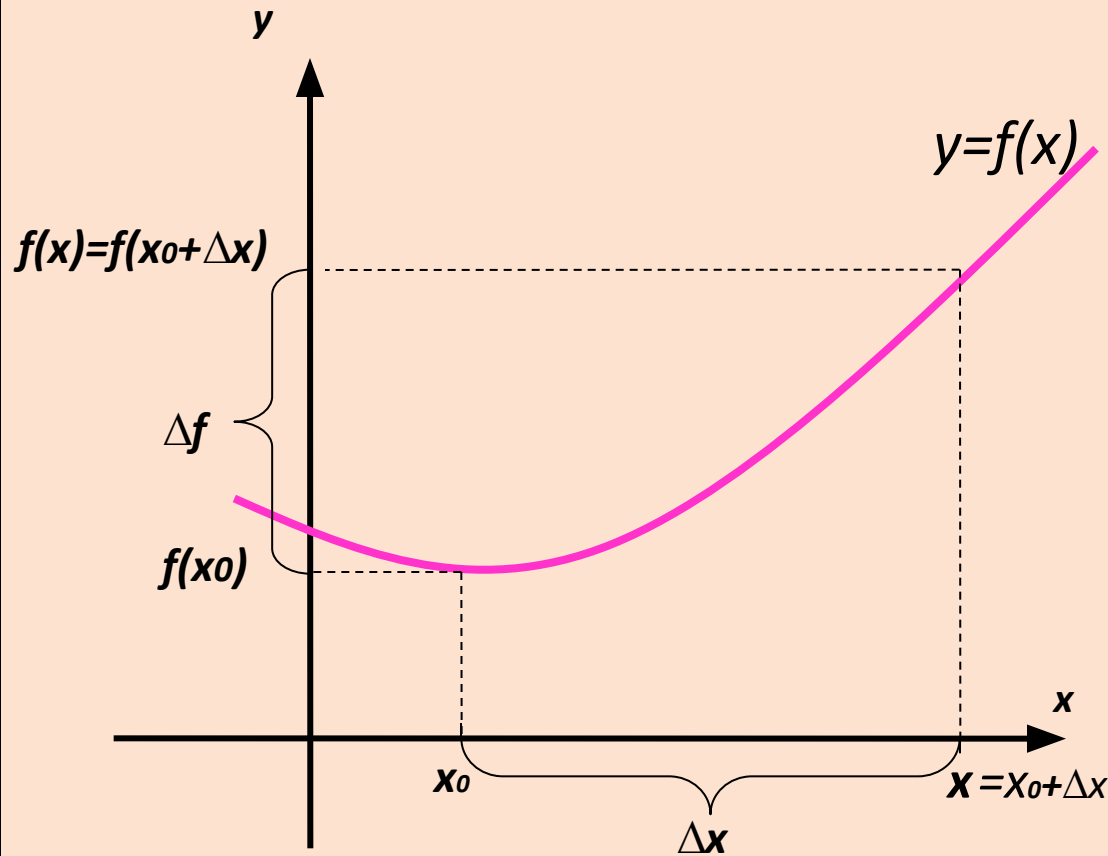


ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

***1. Задачи, приводящие к
понятию производной***

Приращение функции и приращение аргумента



приращение аргумента:

$$\Delta x = x - x_0 \quad (1)$$

Приращение функции :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (2)$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \quad (3)$$

Т.е. Данное приращение функции и

изменится на величину
Рассстояние между точками
функции $f(x)$ и $f(x_0)$ по оси
 x и x_0 соответственно, а
на оси y — это разность
называется приращением
функции и обозначается Δf
аргумента и равно разности
между x и x_0 :

Задача 1 (о скорости движения).

- По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка).
- Закон движения задан формулой $s=s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета (в метрах).
- Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).



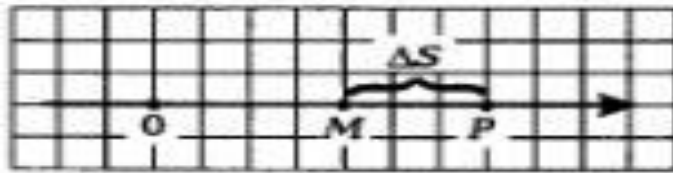


Рис. 114

Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M пройдя путь от начала движения $OM = s(t)$. Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке P : $OP = s(t + \Delta t)$. Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P , т.е. прошло путь MP . Имеем:

$$MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

Полученную разность мы назвали в § 26 приращением функции. Путь Δs тело прошло за Δt секунд.

Нетрудно найти среднюю скорость движения тела за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (ее называют иногда мгновенной скоростью)? Можно сказать так: это средняя скорость движения

за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается все меньше и

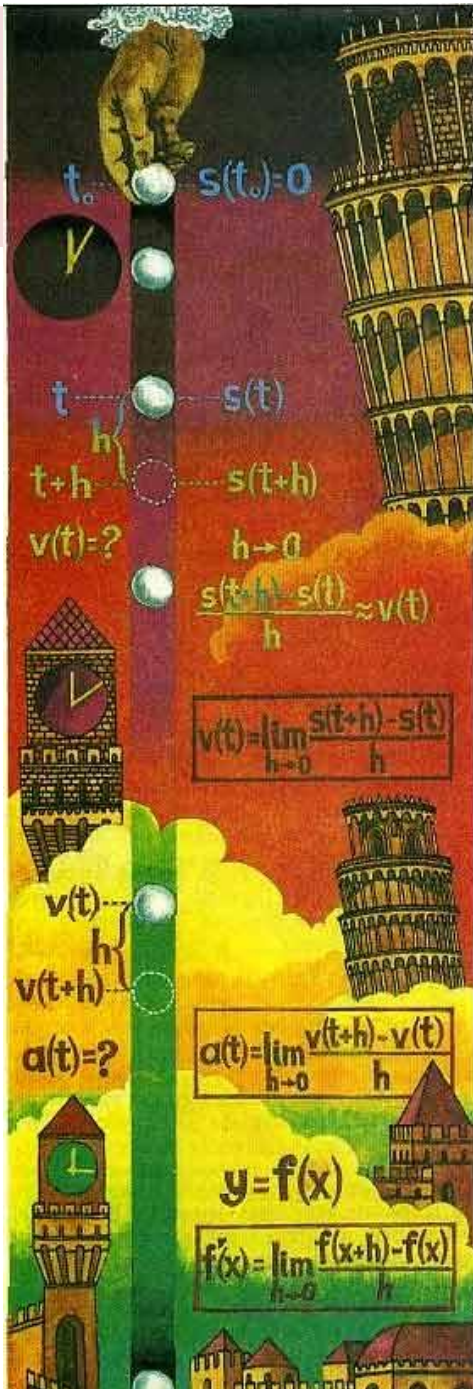
меньше; точнее (иными словами, при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$). Это значит, что

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Подводя итог решению задачи 1 получаем:

Задача 2

Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость v постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость $v(t)$?



Фиксируем момент t , в который мы хотим знать значение скорости $v(t)$. Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t . За это время падающее тело пройдёт путь, равный $s(t+h)-s(t)$.

Если промежуток времени h очень мал, то приближённо $s(t+h)-s(t) \approx v(t) \cdot h$, или $\frac{s(t+h) - s(t)}{h} \approx v(t)$, причём

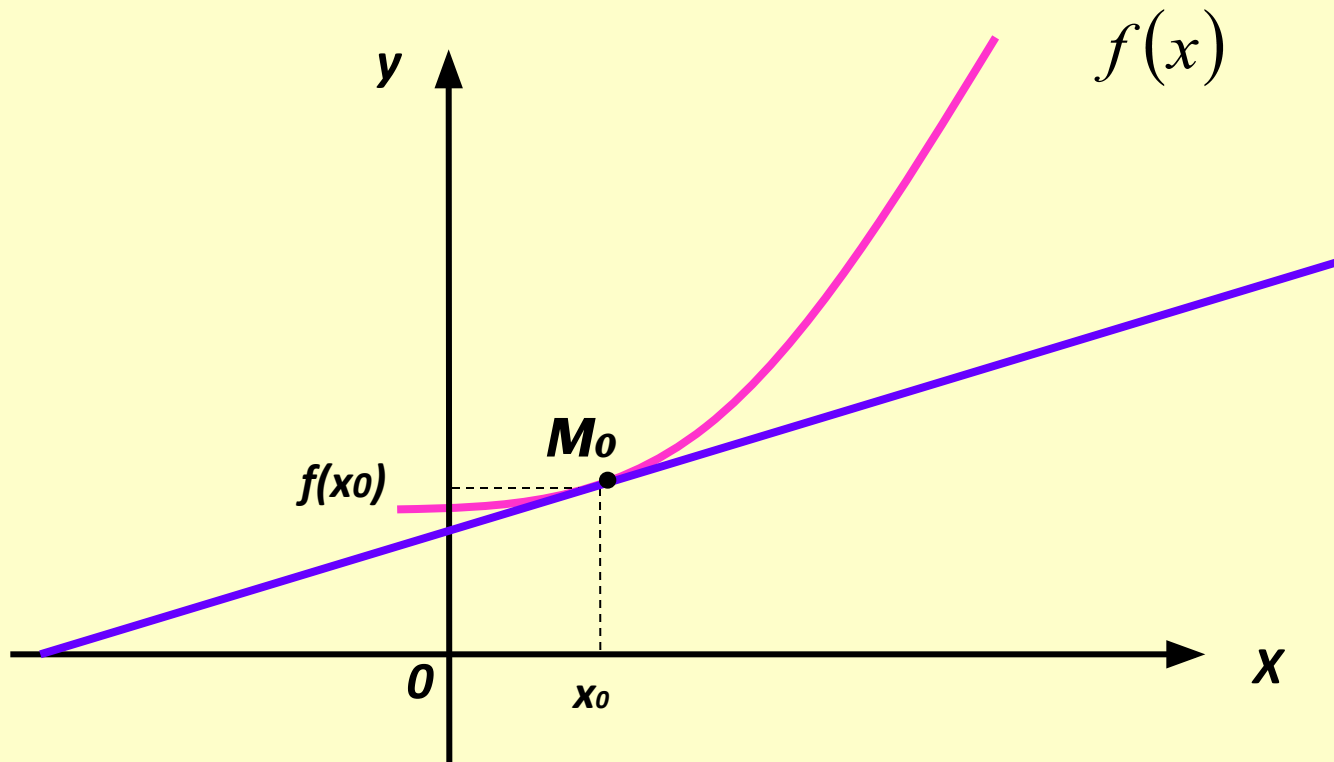
последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше h . Значит величину $v(t)$ скорости в момент t можно рассматривать как *предел*, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента $t+h$.

Сказанное записывают в виде

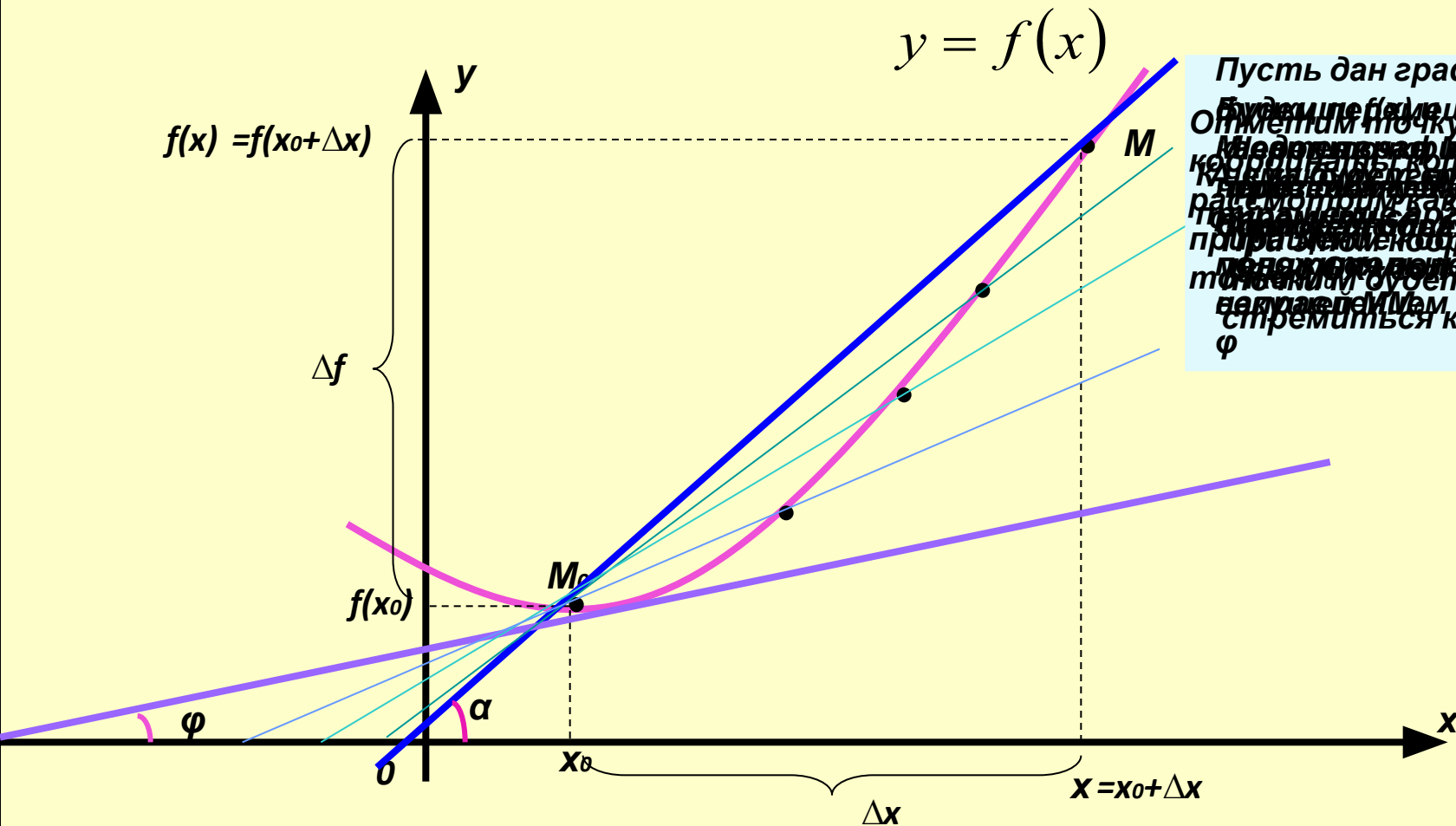
$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

Тема: Задача, приводимая к понятию “производная”

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, с отрезком которой почти сливается график функции $f(x)$, называют касательной к графику в точке x_0



Задача: Определить положение касательной ($\text{tg}\varphi$)



Пусть дан график
 Будем увеличивать точку M
 Отметим точку M_0
 Мы видим, что по мере приближения
 касательной к точке M_0 поворачивается
 секущая линия, пока не совпадёт с
 касательной. Каким образом?
 По мере приближения точки M
 к точке M_0 угол наклона
 секущей к оси Ox будет
 стремиться к углу наклона
 касательной к оси Ox

Секущая, поворачиваясь вокруг точки M_0 , приближается к положению касательной

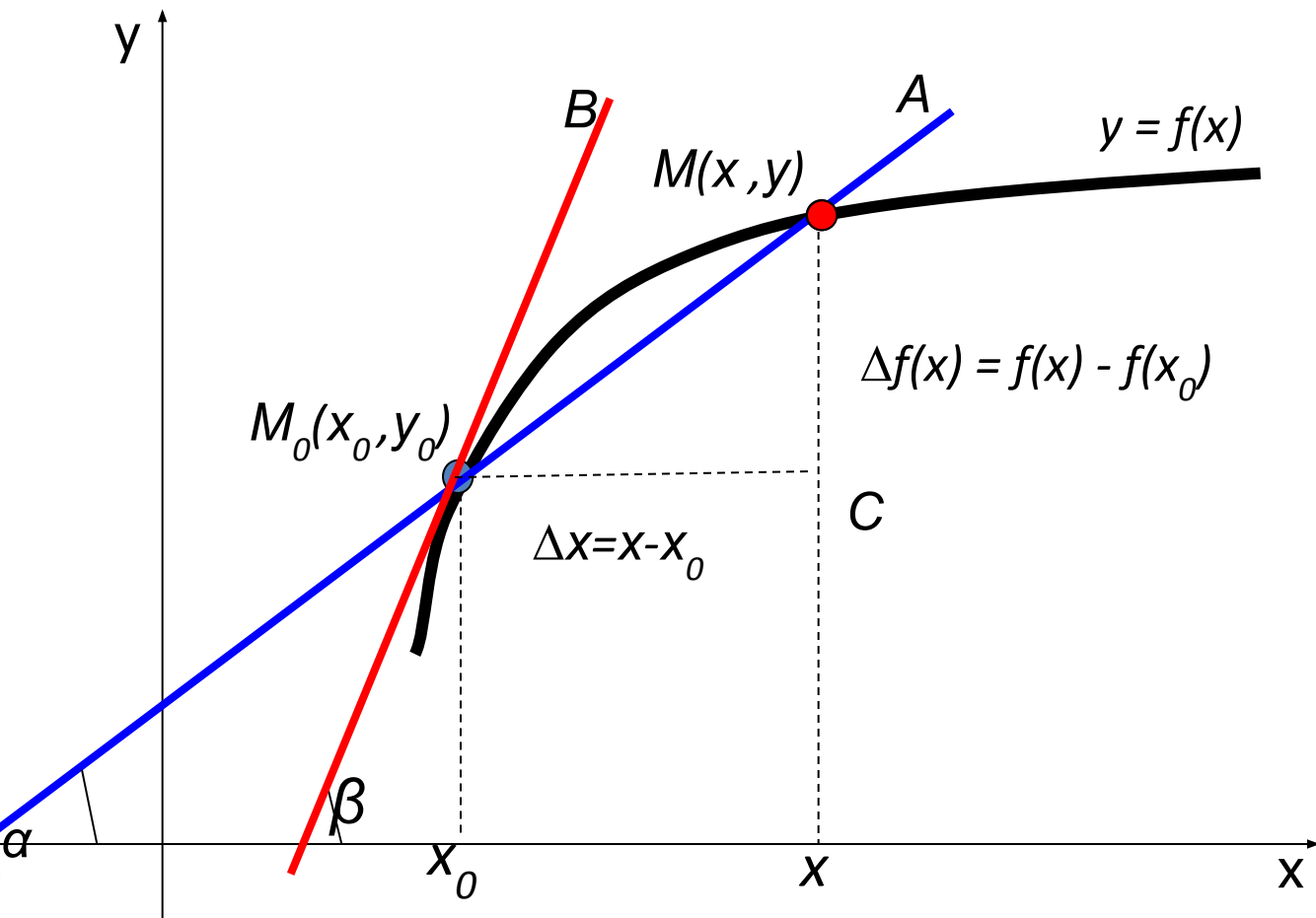
Предельным положением секущей M_0M , когда M неограниченно приближается к M_0 , является касательная

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$$

$$\alpha \rightarrow \varphi$$

$$k = \text{tg}\varphi = \lim_{\alpha \rightarrow \varphi} \text{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Задача о касательной к графику функции



Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t .

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt , при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$.

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$



Выводы

Различные задачи привели в процессе решения к одной и той же математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т.е.:

- 1) Присвоить ей новый термин.
- 2) Ввести для неё обозначение.
- 3) Исследовать свойства новой модели.
- 4) Определить возможности применения нового понятия - производная

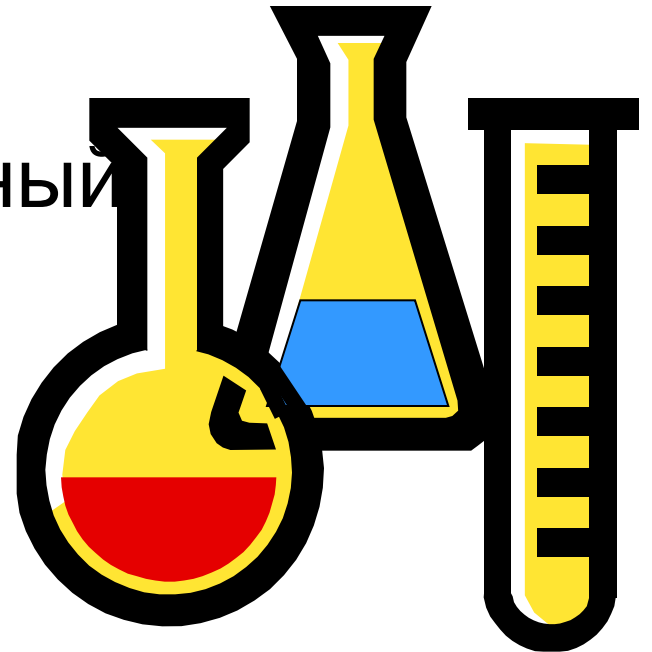
Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени $[t_0; t_1]$ (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону $x = f(t)$) определяется по формуле

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



Определение производной

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при последнем стремящимся к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Возвращаясь к рассмотренным задачам, важно подчеркнуть следующее:

- а) мгновенная скорость** неравномерного движения есть производная от пути по времени;
- б) угловой коэффициент касательной** к графику функции в точке $(x_0; f(x))$ есть производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$;
- в) мгновенная сила тока** $I(t)$ в момент t есть производная от количества электричества $q(t)$ по времени;
- Г) скорость химической реакции** в данный момент времени t есть производная от количества вещества $y(t)$, участвующего в реакции, по времени t .

А л г о р и т м

$$1) \quad \Delta x = x - x_0$$

$$2) \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$3) \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$4) \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

А ЭТО ЗНАЧИТ:

*«...нет ни одной области в математике,
которая когда-либо не окажется
применимой к явлениям
действительного мира...»* Н.И.

Лобачевский

- Аппарат производной можно использовать при решении геометрических задач, задач из естественных и гуманитарных наук, экономических задач оптимизационного характера.
- И, конечно, не обойтись без производной при исследовании функции и построении графиков, решении уравнений и неравенств

Основные формулы

- Средняя скорость $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

- Мгновенная скорость

- $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$ или $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

- Скорость изменения функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Значение производной в точке

- $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \rightarrow \varphi} \operatorname{tg} \alpha =$