Прикладная математика и математическая логика

- Лекции –2 часа (1 семестр) и 2 часа (2 семестр)
- Практические занятия – 8 часов (1 семестр) и 6 часов (2 семестр)
- Экзамен
- Контрольные работы (№ 1 и № 2) по методичке 15873 (с.16)
- Методические указания 15136 (мат.анализ);

Солдатова Гульнара Тагировна

gulnara.soldatova@yandex.ru

Содержание

- РАЗДЕЛ 1. Элементы математической логики *(задачи 1 и 2)*
- РАЗДЕЛ 2. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения *(задача 3)*
- РАЗДЕЛ 3. Числовые и функциональные ряды. Элементы функционального анализа *(задачи 4-6)*

Раздел 1. Элементы математической логики

Алгебра логики (алгебра высказываний, булева алгебра) – раздел математической логики, изучающий строение (форму, структуру) сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

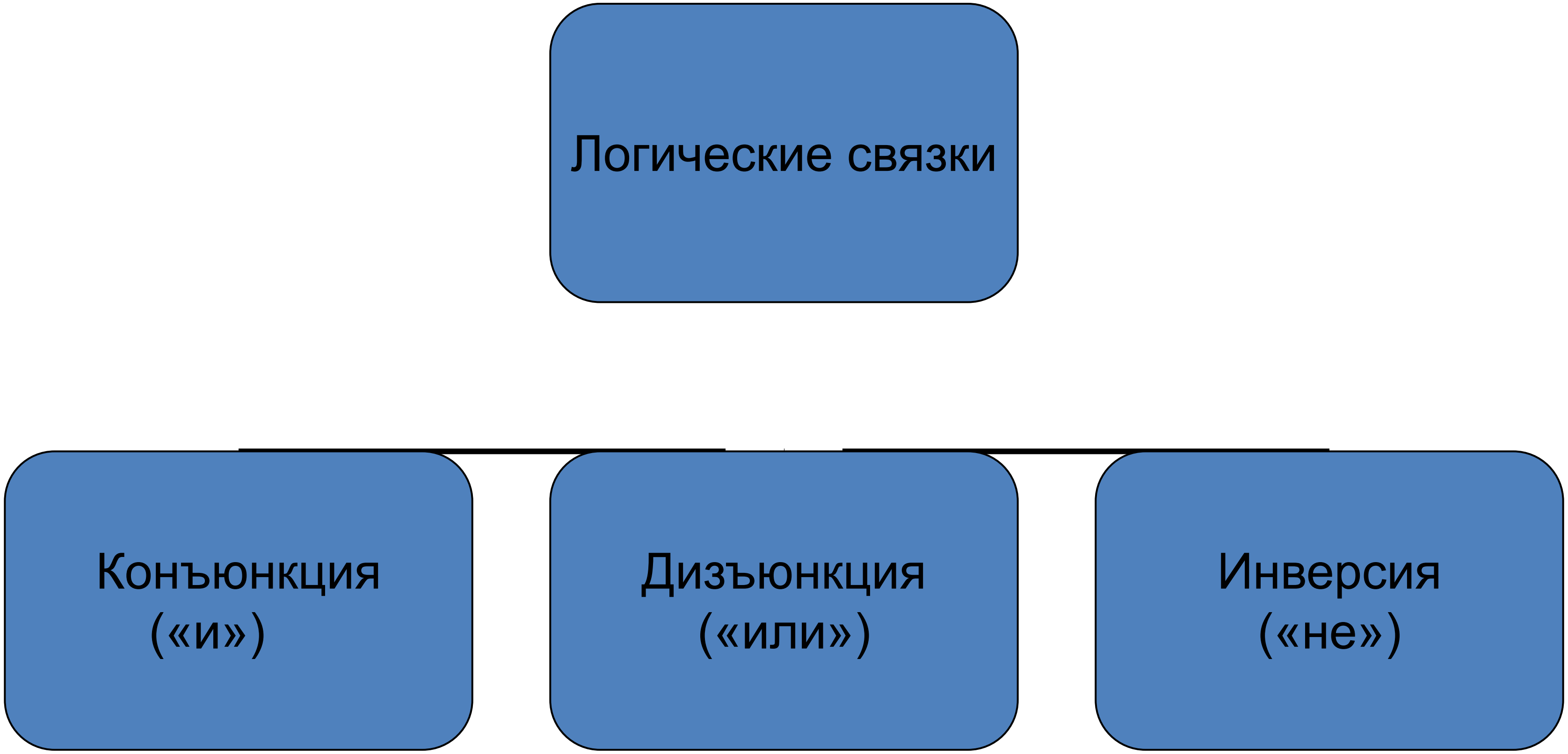
Высказывание – повествовательное предложение, содержание которого можно определить как истинное или ложное.

Простые высказывания называют в алгебре логики логическими переменными (булевы переменные) и обозначают буквами латинского алфавита.

Сложные высказывания называют логическими функциями (или логическими выражениями).

Логические переменные и функции определены на множестве двух значений {0,1} или {true, false}

- Для образования новых высказываний используются базовые логические операции, выражаемые с помощью логических связок «и», «или», «не».



Логические операции

1. **Логическое умножение (конъюнкция).**

- Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «и» называется ***операцией логического умножения*** или ***конъюнкцией.***

A	B	A∧B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример.

А: «12 делится на 3»
В: «12 делится на 4»,
Тогда А∧В - истинно

2.Логическое сложение (дизъюнкция)

- Объединение двух (или нескольких) высказываний с помощью союза «или» называется ***операцией логического сложения*** или ***дизъюнкцией.***

A	**B**	**A∨B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Пример.
A: «12 делится на 3»
B: «12 делится на 5»,
Тогда A ∨ B - истинно

3. Логическое отрицание (инверсия)

A	$\overline{A}$
0	**1**
1	**0**

4. Импликация

Логическая связка: «ЕСЛИ …, ТО», «ИЗ … СЛЕДУЕТ», «… ВЛЕЧЕТ …».

Пример.
A: «студент усердно готовится к экзамену»
B: «студент получает 5»,
Тогда A → B - истинно

A	**B**	**A→B**
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

5. Эквиваленция

A	B	A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическая связки: «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», « … равносильно …».

Основные логические тождества

Идемпотентные законы:

1) $A \vee A = A$

2) $A \wedge A = A$

Коммутативные законы:

3) $A \vee B = B \vee A$

4) $A \wedge B = B \wedge A$

5) $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$

Ассоциативные законы:

6) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

7) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

8) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

Дистрибутивные законы:

9) $A(B \vee C) = AB \vee AC$

10) $A \vee (BC) = (A \vee B)(A \vee C)$

Законы Моргана:

11) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

12) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Закон двойного отрицания:

13) $\overline{\overline{A}} = A$

Закон противоречия:

14) $A \wedge \overline{A} = 0$

Закон исключенного третьего:

15) $A \vee \overline{A} = 1$

Законы поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A \qquad A \wedge (A \vee B) = A$$

Тождества, содержащие константы:

$$A \vee 0 = A \qquad A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 0 = 0 \qquad A \wedge 1 = A$$

$$A \to 0 = \overline{A} \qquad A \to 1 = 1$$

$$0 \to A = 1 \qquad 1 \to A = A$$

$$A \leftrightarrow 0 = \overline{A} \qquad A \leftrightarrow 1 = A$$

Задача 1. Доказать логическое тождество:

$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

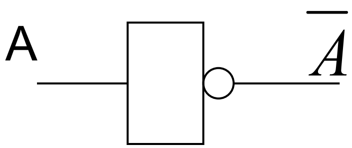
Доказательство:

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

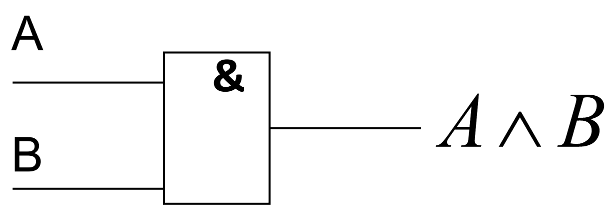
A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Логические элементы

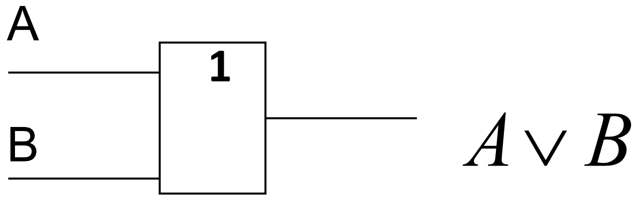
1. Инвертор – устройство с одним входом и одним выходом, преобразующее сигнал A в $\overline{A}$



2. Конъюнктор – устройство с двумя входами и одним выходом



3. Дизъюнктор – устройство с двумя входами и одним выходом



Задача 2. Представить булеву функцию в виде СДНФ и начертить схему, реализующую эту функцию.

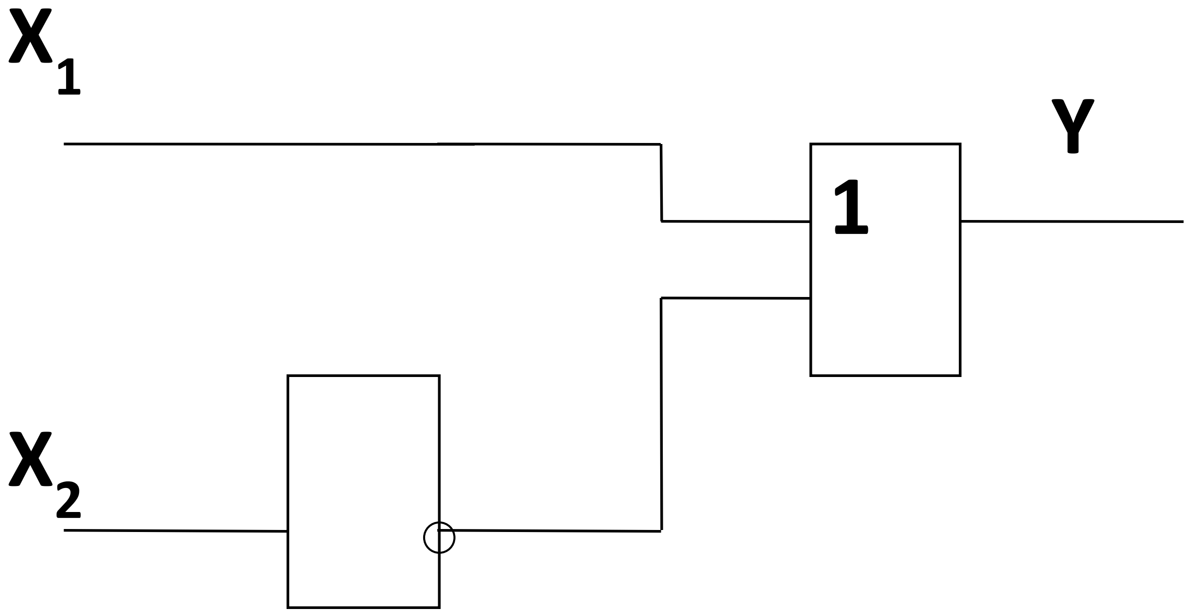
$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1\,\overline{x_2} \vee x_1\,x_2 =$$

$$= \overline{x_2}\,(\overline{x_1} \vee x_1) \vee x_1\,x_2 =$$

$$= \overline{x_2} \vee x_1\,x_2 = \left(\overline{x_2} \vee x_1\right) \wedge \left(\overline{x_2} \vee x_2\right) =$$

$$= \overline{x_2} \vee x_1$$

Логическая схема



$$y = \overline{x_2} \vee x_1$$

РАЗДЕЛ 2. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения

Понятие первообразной

<u>Определение</u>. Функция $F(x)$, называется ***первообразной*** для функции $f(x)$, если ее производная $F'(x)$ равна данной функции, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Пример: $f(x) = 3x^2$.

$F(x) = x^3$ *- первообразная, т.к.* $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

$F(x) = x^3 + 7$ *- также первообразная этой же функции.*

<u>Теорема (свойство первообразных)</u>.

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Понятие неопределенного интеграла

Определение. Множество всех первообразных данной функции f(x) называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$, т.е

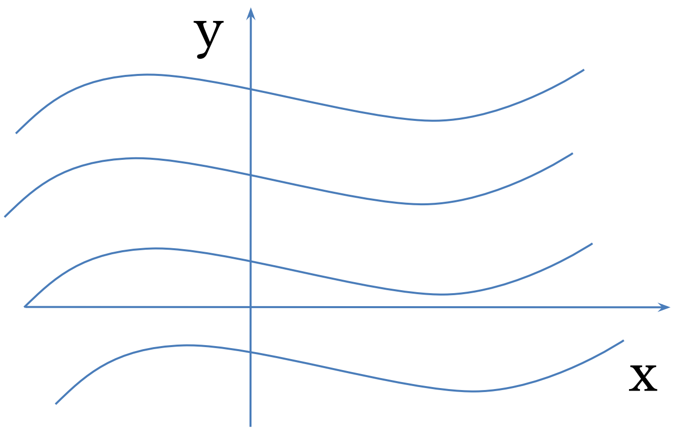
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где С – произвольная постоянная.

Определение. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции.

Определение. График каждой первообразной называется **интегральной кривой**.

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции *f(x)* получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Оу.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$$

4. Интеграл от алгебраической суммы интегралов равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

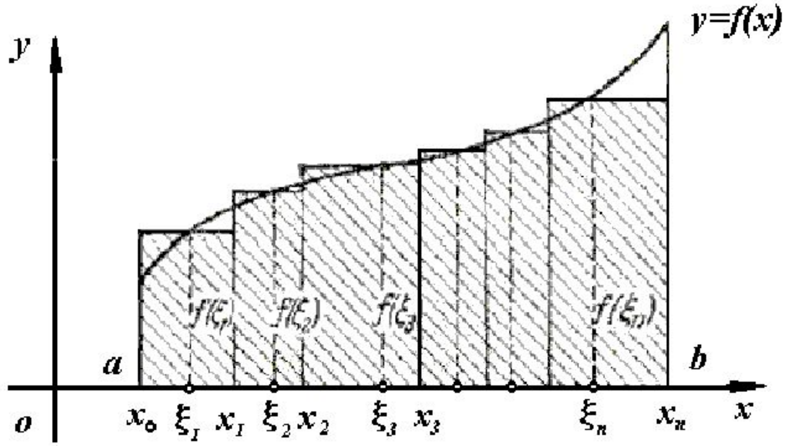
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

Методы интегрирования

- Непосредственное интегрирование.
- Интегрирование методом замены переменной (или метод подстановки).
- Интегрирование по частям.

Понятие определенного интеграла



Понятие определенного интеграла

- Выражение $\int_a^b f(x)dx$ называют определенным интегралом функции f(x) на отрезке [ab].
- Если неопределенный интеграл представляет собой совокупность функций, отстоящих друг от друга на величину C, то определенный интеграл – это всегда число, значение которого определяется видом подынтегральной функции и значениями верхнего (b) и нижнего (a) пределов интегрирования.

Свойства определенного интеграла

- при смене пределов интегрирования меняется знак у определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- если точка с принадлежит отрезку [ab], то выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Формула Ньютона -Лейбница

- Чтобы вычислить определенный интеграл необходимо найти его первообразную (неопределенный интеграл) и подставить пределы интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$