



Модуль и его приложения

Автор:
учитель математики
Е.Ю. Семёнова



Содержание:

Понятие модуля

Свойства модуля 1 Свойства модуля 1°

Свойства модуля 1° – Свойства модуля

1° – Свойства модуля 1° – 5 Свойства

модуля 1° – 5°

Свойства модуля 6 Свойства модуля 6°

Свойства модуля 6° – Свойства модуля

6° – Свойства модуля 6° – 10 Свойства

модуля 6° – 10°

Геометрическая интерпретация модуля

Примеры

➔ Понятие модуля

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа a называется само число a , если оно неотрицательное, и число, противоположное a , если a – отрицательное.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Пример: $|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \geq 1,5; \\ -2x + 3, & \text{если } x < 1,5. \end{cases}$



Свойства модуля

$$1^\circ \quad |a| = |-a|$$

$$2^\circ \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3^\circ \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad \text{где } b \neq 0$$

$$4^\circ \quad |a + b| = |a| + |b|, \quad \text{если } a \geq 0, \quad b \geq 0$$

$$5^\circ \quad |a| + |b| = a + b, \quad \text{если } a \geq 0, \quad b \geq 0$$



Свойства модуля

$$6^\circ \quad |a - b| = |a| + |b|, \text{ если } ab \leq 0$$

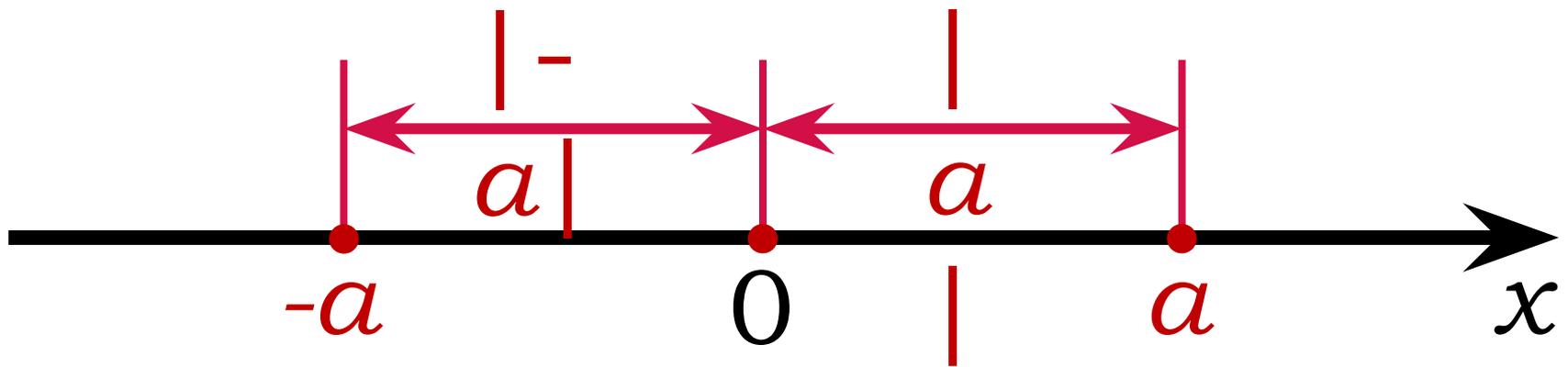
$$7^\circ \quad |a|^2 = a^2$$

$$8^\circ \quad |a| - |b| \geq 0, \text{ если } a^2 - b^2 \geq 0$$

$$9^\circ \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$10^\circ \quad |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Геометрическая интерпретация модуля



Это *расстояние* от начала отсчета до точки, изображающей число.



Примеры

Раскрыть модули:

$$1) |p - 3|;$$

$$6) |x^4 + 1|;$$

$$2) |\sqrt{3} - \sqrt{5}|;$$

$$7) \sqrt{(a - 3)^2}, \quad a \geq 3;$$

$$3) |\sqrt{5} - 2|;$$

$$8) \sqrt{(b - 4)^2}, \quad b < 4;$$

$$4) |1 - \sqrt{2}|;$$

$$9) \sqrt{m^2 - 2m + 1}, \\ m < 1.$$

$$5) |x^2|;$$

Решение уравнений вида

$$|f(x)| = a$$

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

Пример: $|x - 8| =$

$$\begin{cases} x^5 - 8 = 5, \\ x - 8 = -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: 3; 13.

Решение уравнений вида

$$|f(x)| = a$$

$$|2x - 3| = 4$$

$$x_1 = 3,5; \quad x_2 = -0,5$$

$$|5x + 6| = 7$$

$$x_1 = 0,2; \quad x_2 = -2,6$$

$$|9 - 3x| = 6$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 5$$

$$|4x + 2| = -1$$

$$x \in \emptyset$$

$$|8 - 2x| = 0$$

$$x = 4$$

$$|10x + 3| = 16$$

$$x_1 = 1,3; \quad x_2 = -1,9$$

$$|24 - 3x| = 12$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = 4$$

$$|2x + 30| = 48$$

$$x_1 = 9; \quad x_2 = -39$$

Решение уравнений вида

$$|f(x)| = g(x)$$



$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$



Пример: $|3x - 10| = x - 2$

$$\begin{cases} 3x - 10 = x - 2, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 8, \\ x \geq 2; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 10 = -(x - 2), \\ x - 2 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 4x = 12, \\ x \geq 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: 3; 4.

Решение уравнений вида

$$|f(x)| = |g(x)|$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Пример: $|x - 2| = |3 -$

$$\begin{cases} x - 2 = 3 - x, \\ x - 2 = -3 + x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5, \\ -2 = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,5, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$$

Ответ: 2,5.

Решить самостоятельно:

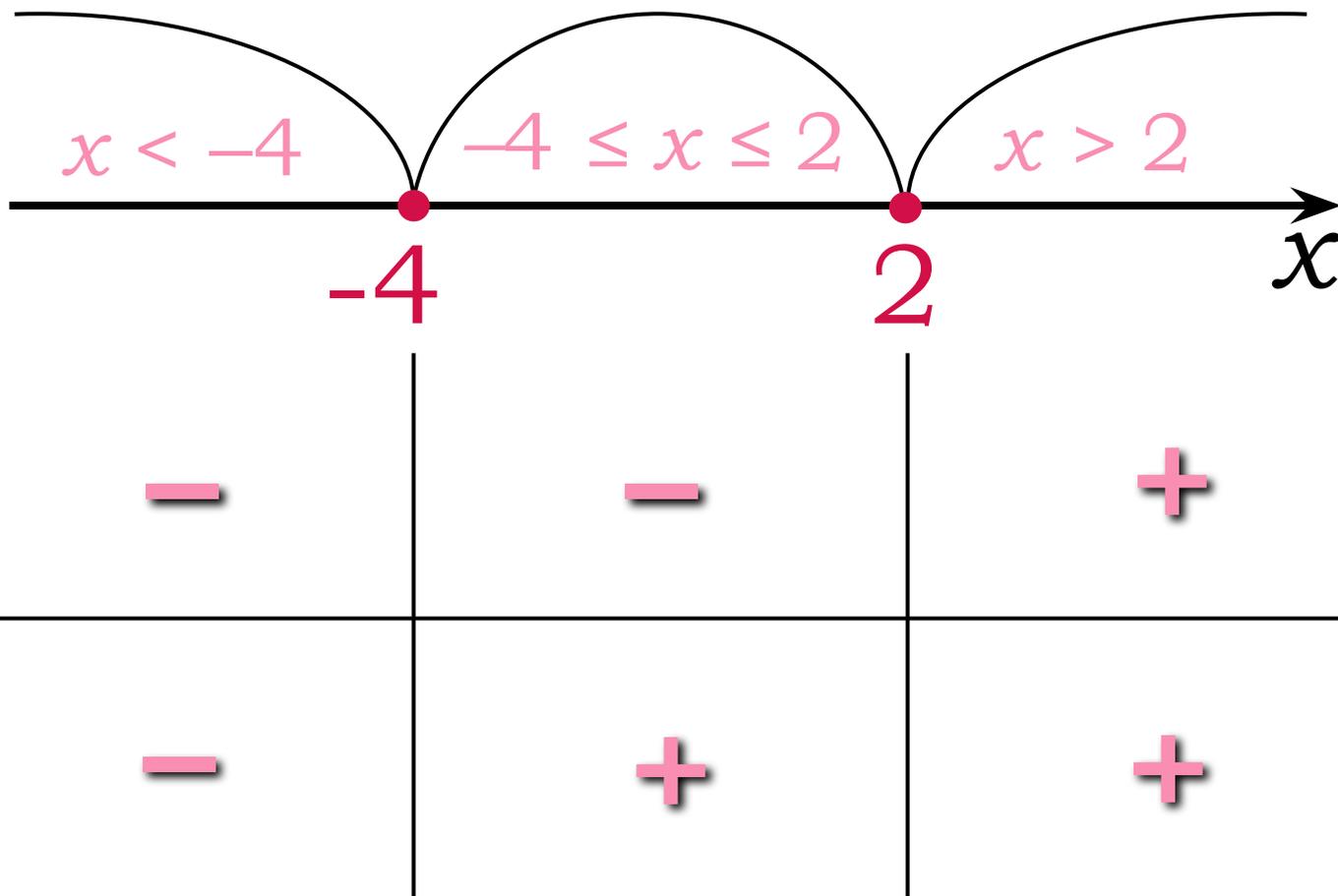
$$|4x - 1| = |2x + 3|$$

$$\begin{cases} 4x - 1 = 2x + 3, \\ 4x - 1 = -2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4, \\ 6x = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $2; -\frac{1}{3}$.

Решить уравнение

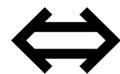
$$2|x - 2| - 3|x + 4| = 1$$



Решить уравнение

$$2|x-2| - 3|x+4| = 1$$

$$\begin{cases} x < -4, \\ 2(-x+2) - 3(-x-4) = 1; \\ -4 \leq x \leq 2, \\ 2(-x+2) - 3(x+4) = 1; \\ x > 2, \\ 2(x-2) - 3(x+4) = 1; \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < -4, \\ x = -15; \\ -4 \leq x \leq 2, \\ x = -1,8; \\ x > 2, \\ x = -17. \end{cases}$$

Ответ: $-15; -1,8.$

Примеры

(решить самостоятельно)

$$1) |x^2 + 3x| = 2(x + 1)$$

$$2) |x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$$

$$3) |2x + 8| - |x - 5| =$$

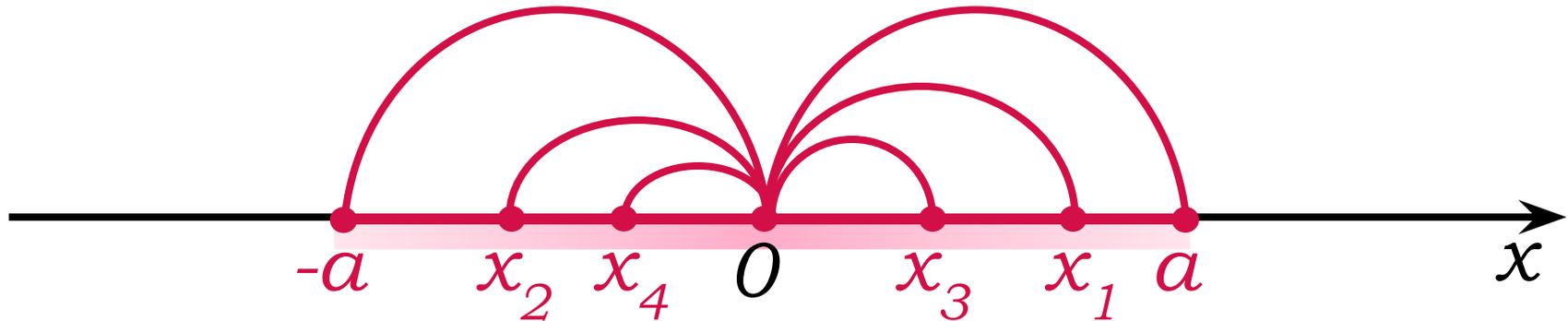
1) Ответ: 1; $(-5 + \sqrt{17})/2$.

2) Ответ: 1; 3.

3) Ответ: -25; 3.

Решение неравенства вида

$$|x| \leq a$$



$$-a \leq x \leq a$$

или

$$\begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -a. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-a; a]$.

Решение неравенства вида

$$|f(x)| \leq a$$

$$-a \leq f(x) \leq a$$

Пример: $|x - 5| \leq 7$

$$-7 \leq x - 5 \leq 7 \quad | + 5$$

$$-7 + 5 \leq x - 5 + 5 \leq 7 + 5$$

$$-2 \leq x \leq 12$$

Ответ: $[-2; 12]$

Решите самостоятельно:

$$|5x + 8| < 12$$

$$-12 < 5x + 8 < 12 \quad | -8$$

$$-12 - 8 < 5x + 8 - 8 < 12 - 8$$

$$-20 < 5x < 4 \quad | :5$$

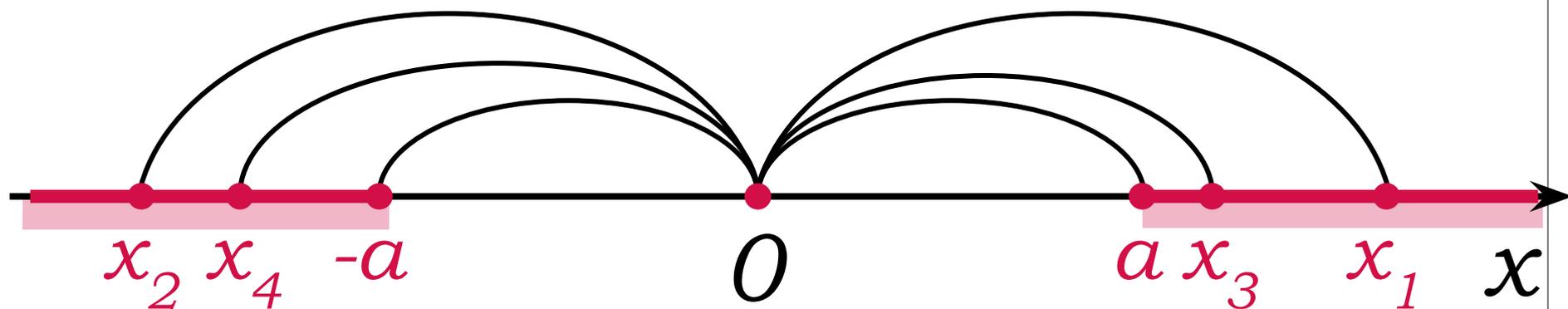
$$-20 : 5 < 5x : 5 < 4 : 5$$

$$-4 < x < 0,8$$

Ответ: $(-4; 0,8)$.

Решение неравенства вида

$$|x| \geq a$$



$$\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -a. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$

Решение неравенства вида

$$|f(x)| \geq a$$

$$\begin{cases} f(x) \geq a, \\ f(x) \leq -a. \end{cases}$$

Пример: $|x + 4| \geq 6$

$$\begin{cases} x + 4 \geq 6 \\ x + 4 \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -10 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -10] \cup [2; +\infty)$

Решите самостоятельно:

$$|10x - 7| > 19$$

$$\begin{cases} 10x - 7 > 19, \\ 10x - 7 < -19; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x > 26, \\ 10x < -12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2,6, \\ x < -1,2; \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1,2) \cup (2,6; +\infty)$

Решение неравенства вида

$$|f(x)| > g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

Пример: $|2x + 5| > 4x - 2$

$$\begin{cases} 2x + 5 > 4x - 2 \\ 2x + 5 < -4x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3,5 \\ x < -0,5 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 3,5)$

Решение неравенства вида

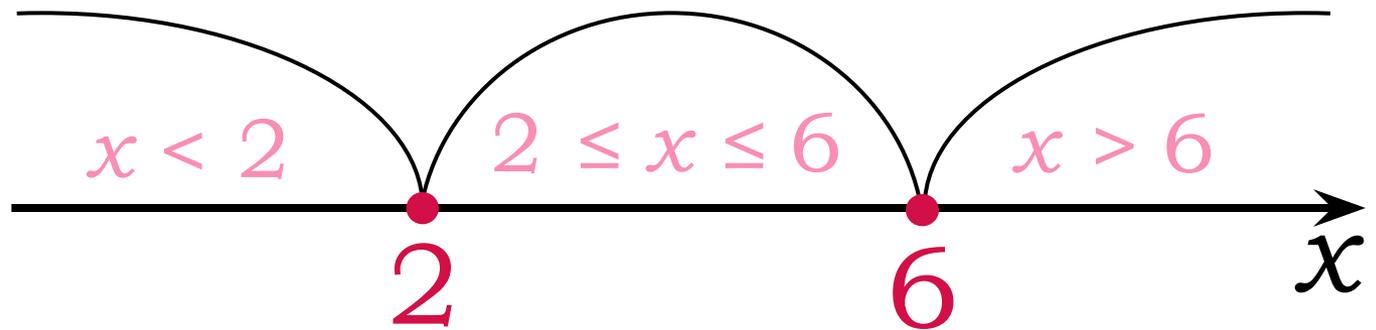
$$|f(x)| \leq g(x)$$

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Решить неравенство

$$3|x - 2| + |x - 6| \leq 8$$



$x - 2$

-

+

+

$x - 6$

-

-

+

Решить неравенство



$$3|x - 2| + |x - 6| \leq 8$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < 2, \\ 3(-x + 2) + (-x + 6) \leq 8; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 6, \\ 3(x - 2) + (-x + 6) \leq 8; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 6, \\ 3(x - 2) + (x - 6) \leq 8; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

 \Leftrightarrow

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < 2, \\ -4x \leq -4; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 6, \\ 2x \leq 8; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 6, \\ 4x \leq 20; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

Решить неравенство

$$3|x - 2| + |x - 6| \leq 8$$



$$\begin{cases} x < 2, \\ x \geq 1; \\ 2 \leq x \leq 6, \\ x \leq 4; \\ x > 6, \\ x \leq 5. \end{cases}$$



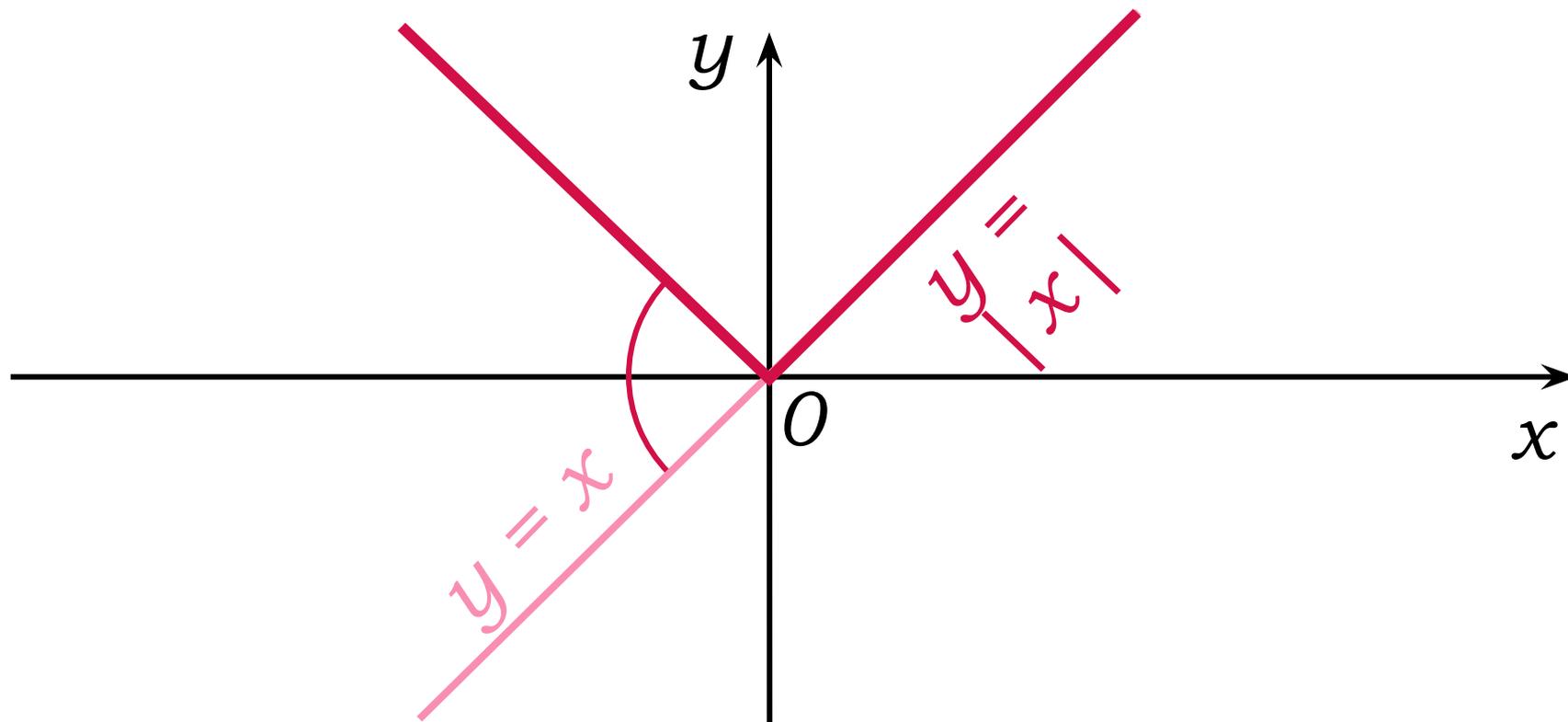
$$\begin{cases} 1 \leq x < 2, \\ 2 \leq x \leq 4, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$$

Ответ: $[1; 4]$.

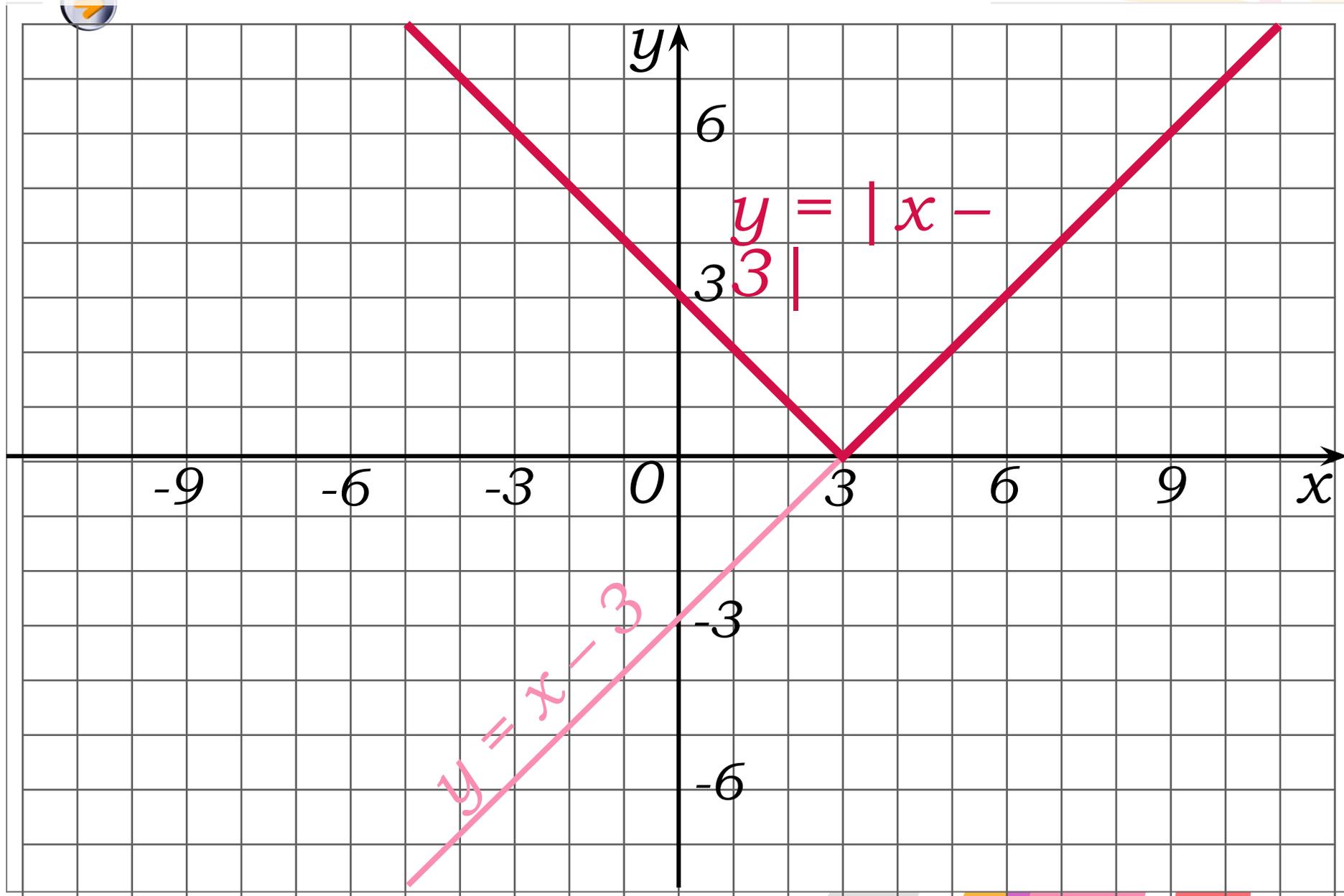
Построение графика функции

$$y = |x|$$

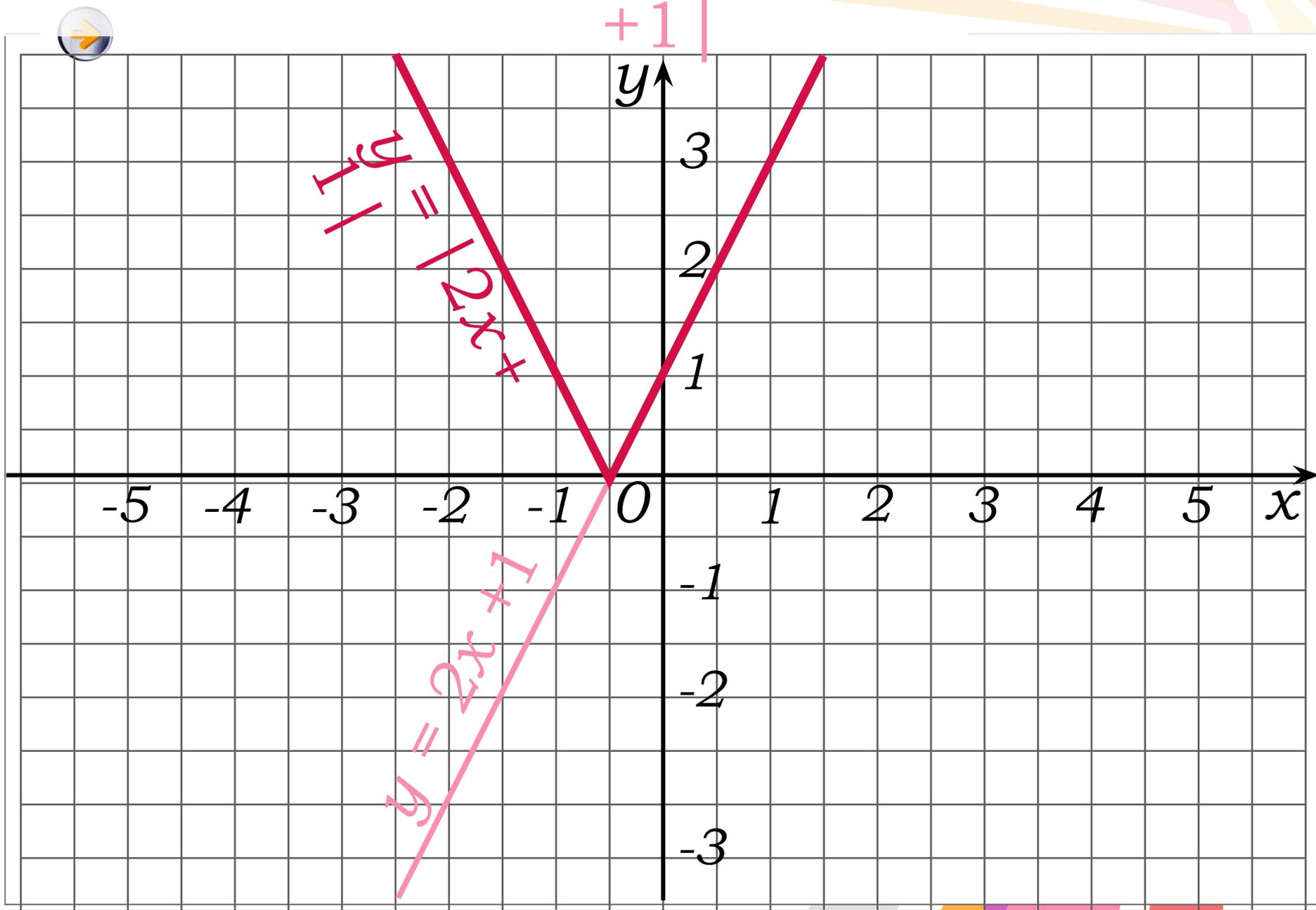
Это отображение нижней части графика функции $y = x$ в верхнюю полуплоскость относительно оси абсцисс с сохранением верхней части графика



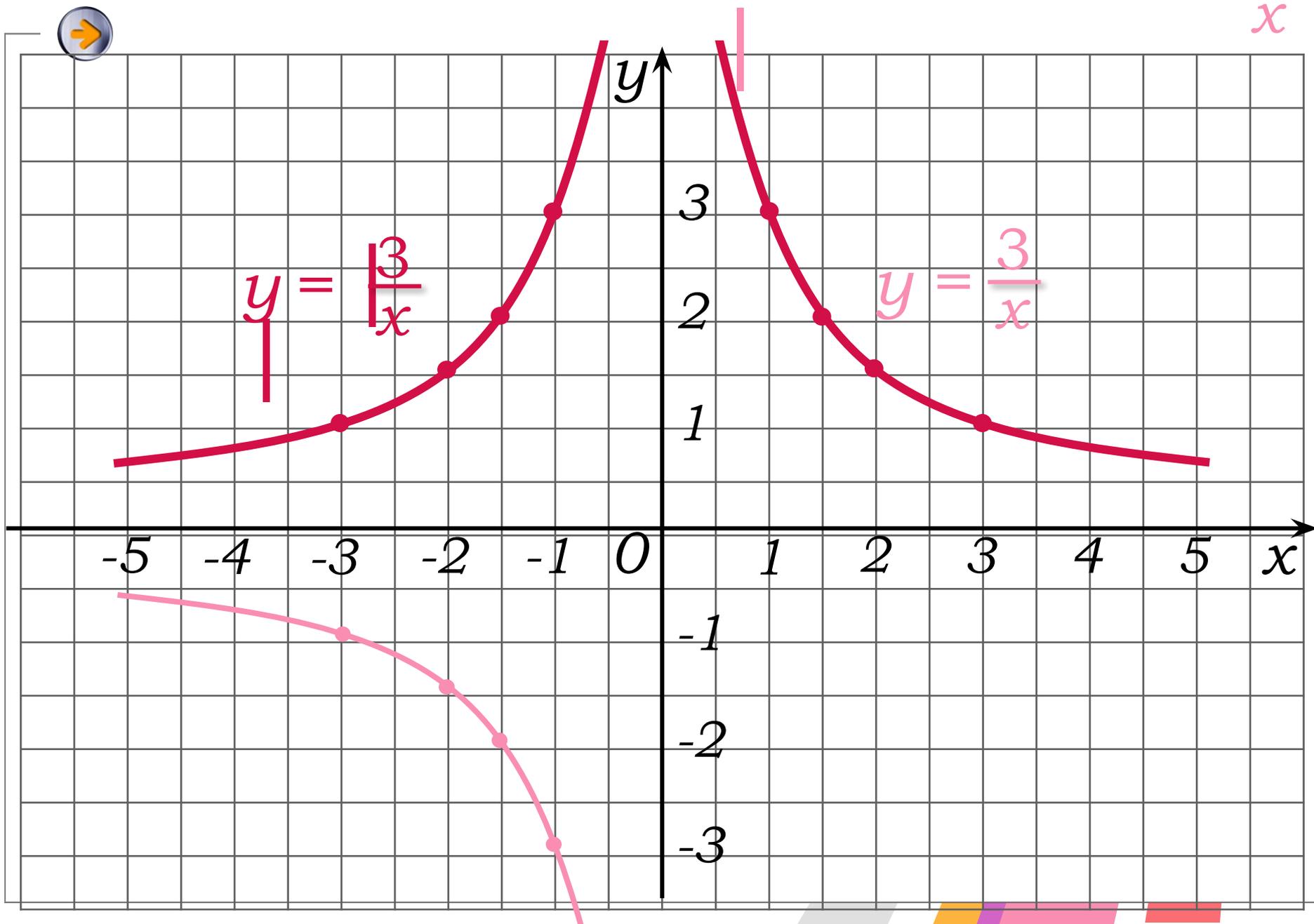
Построение графика функции $y = |x - 3|$



Построение графика функции $y = |2x|$

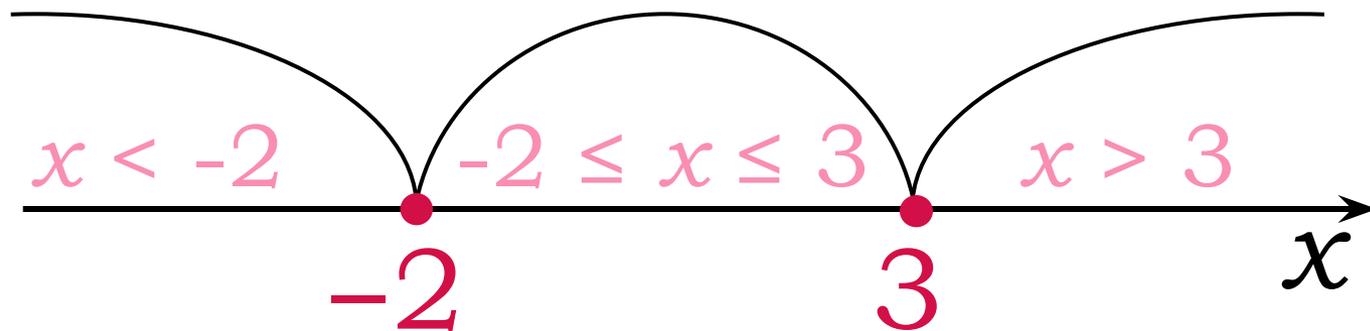


Построение графика функции $y = \frac{3}{x}$



Построение графика функции

$$y = |x + 2| - |x - 3|$$



$x + 2$

—

+

+

$x - 3$

—

—

+

Построение графика функции



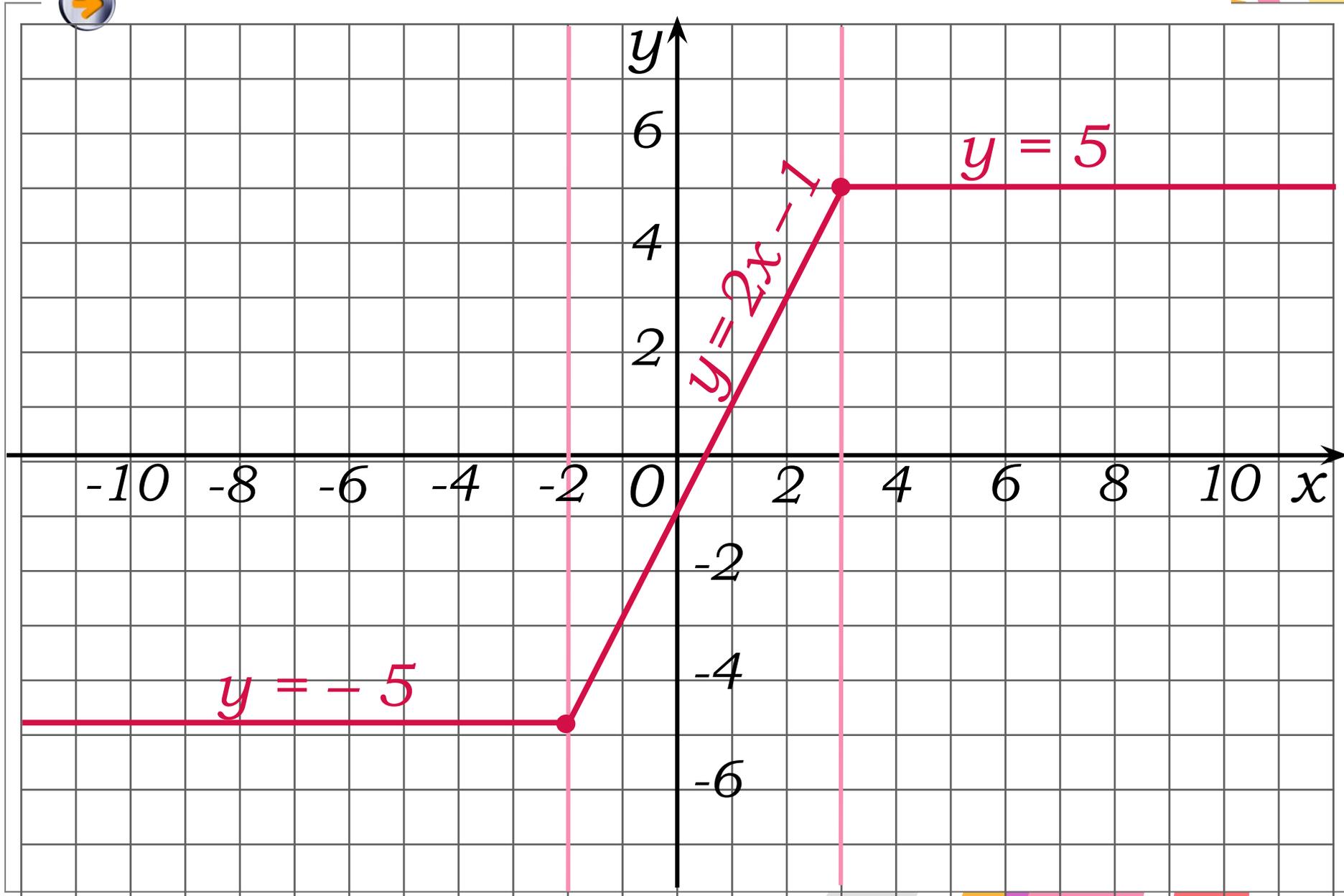
$$y = |x + 2| - |x - 3|$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ y = -x - 2 + x - 3; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x \leq 3, \\ y = x + 2 + x - 3; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 3, \\ y = x + 2 - x + 3; \end{array} \right. \end{array} \right.$$



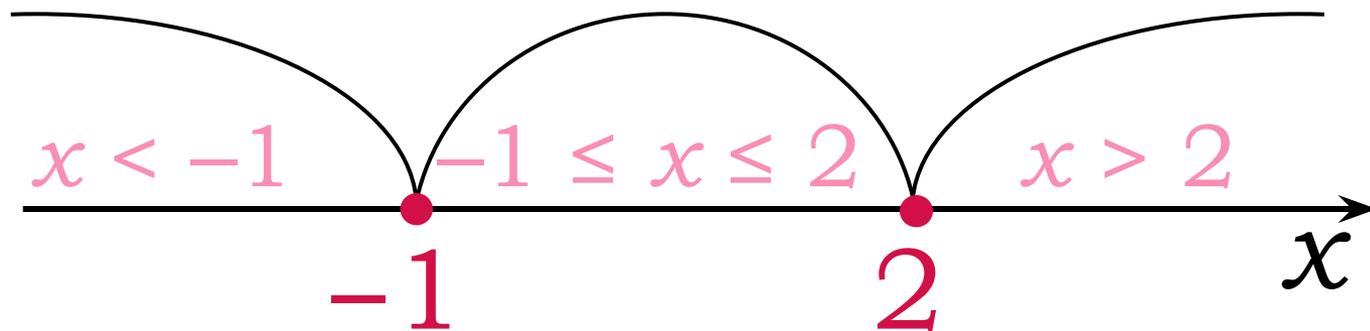
$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ y = -5; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x \leq 3, \\ y = 2x - 1; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 3, \\ y = 5. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$y = |x + 2| - |x - 3|$$



Построение графика функции

$$y = |x + 1| + |x - 2|$$



$x + 1$

$-$

$+$

$+$

$x - 2$

$-$

$-$

$+$

Построение графика функции

$$y = |x + 1| + |x - 2|$$

$$\begin{cases} x < -1, \\ y = -x - 1 - x + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ y = x + 1 - x + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ y = x + 1 + x - 2; \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < -1, \\ y = -2x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

$$y = |x + 1| + |x - 2|$$

