



° Моделирование систем

Лекция I

Классификация моделей



Детерминированная модель с непрерывно меняющимися переменными

Определить оптимальный портфель заказов предприятия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i x_i c_i \rightarrow \max; \\ \forall j : \sum_i x_i a_{i,j} \leq b_j; \\ \forall i : x_i \geq 0, \end{array} \right.$$

где: x_i – объем выпускаемой продукции i -го вида; c_i – стоимость единицы выпускаемой продукции i -го вида; b_j – ресурс сырья j -го вида; a_{ij} – затраты сырья j -го вида на единицу продукции i -го вида.

Самостоятельно:

- 1. Обобщить модель на случай нескольких предприятий.**
- 2. Выбрать алгоритм решения задачи в общем случае.**
- 3. Определить эффективный алгоритм для случая, когда величина j не превосходит единицы.**

Детерминированная модель с дискретно меняющимися переменными

Определить оптимальный портфель заказов предприятия:

$$\begin{cases} \sum_i x_i c_i \rightarrow \max; \\ \forall j : \sum_i x_i a_{i,j} \leq b_j; \\ \forall i : x_i = 1, 0, \end{cases}$$

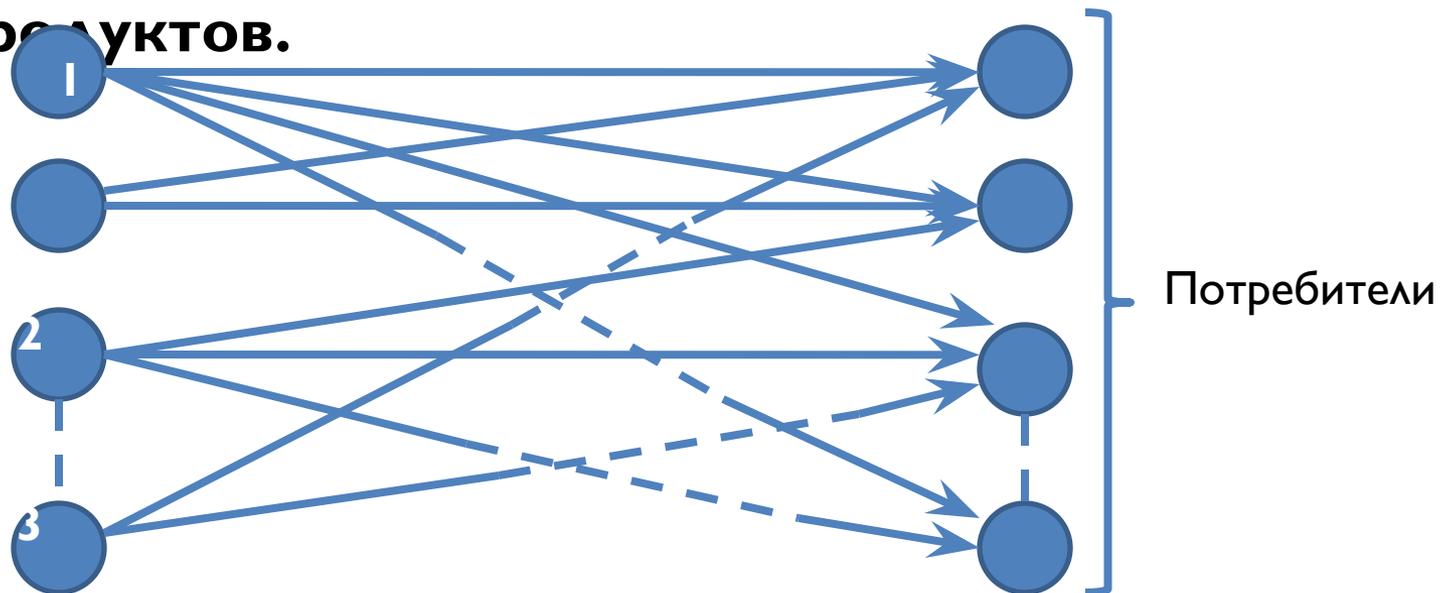
где: $x_i = 1$ если i -й наряд-заказ принят и $x_i = 0$, если он отвергнут; c_i – стоимость i -го наряд-заказа; b_j – ресурс сырья j -го вида; a_{ij} – затраты сырья j -го вида на выполнение i -го наряд-заказа.

Самостоятельно:

- 1. Обобщить модель на случай нескольких предприятий.**
- 2. Выбрать алгоритм решения задачи.**
- 3. Выделить отличия от задачи о ранце.**

Детерминированные модели на графах

Требуется определить оптимальные потоки i -го вида продуктов j -ому потребителю, если известны пропускные способности дуг и стоимости транспортировки по ним каждого вида продукта, а также возможности каждого источника и каждого стока по каждому виду продуктов.



Формальная постановка задачи

Случай, когда конкуренция между производителями отсутствует

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \sum_j x_{i,j} c_{i,j} \rightarrow \min; \\ \sum_i \sum_j [x_{i,j} - b_{i,j}]^2 \rightarrow \min; \\ \forall i: \sum_j x_{i,j} \leq a_i; \\ \forall (i, j) \in U: 0 \leq x_{i,j} \leq r_{i,j}, \end{array} \right.$$

где: $x_{i,j}$ - поток i -го продукта j -у потребителю; a_i – производственная мощность производителя i -го продукта; $b_{j,i}$ - потребность j -го потребителя в i -м продукте; $c_{i,j}$ – стоимость транспортировки единицы i -го вида продукта j -му потребителю; $r_{i,j}$ – пропускная способность дуги (i,j) .

Самостоятельно:

- 1. Свести задачу к однокритериальной.**
- 2. Определить алгоритм решения задачи.**
- 3. Дать формальную постановку задачи при наличии конкуренции среди производителей.**

Имитационные модели переменных процессов на базе дифференциальных уравнений.

- Изолированный остров населен:
- 1) мхами (X_1),
- 2) оленями (X_2), $\frac{dx_2}{dt} = GX_2$;
- 3) волками (X_3). $\frac{dx_3}{dt} = KX_3$
- Количество мха зависит от времени года и количества оленей
 $X_1 = A + B \sin t - GX_2$;
- X_2 – количество оленей.
- $X_2 = CX_1 - DX_3$ – пропорционально количеству мха.
- Прирост оленей пропорционален количеству оленей.
 $X_3 = HX_2$ – количество волков пропорционально количеству оленей.

Самостоятельно:

1. Построить модель жизни острова.
2. Исследовать построенную модель и определить параметры, при которых имеет место стабильный симбиоз.

Дискретно-непрерывная модель

Эпидемия. Обозначения:

- $X(i)$ – число заболевших в i -й день.
- T – время через которое болезнь проходит.
- t – текущее время в днях.
- k – коэффициент, показывающий сколько человек в среднем заражает один больной.
- $Y(t)$ – число выздоровевших в t -ый день.
- $Z(t)$ – число умерших в t -ый день.

Дискретно-непрерывная МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ

$X(i+1)=X(i)+kX(i)$ – количество людей, заболевших в $i+1$ день.

$X(i-T)=Y(i)+Z(i)$ для любого $i>T$.

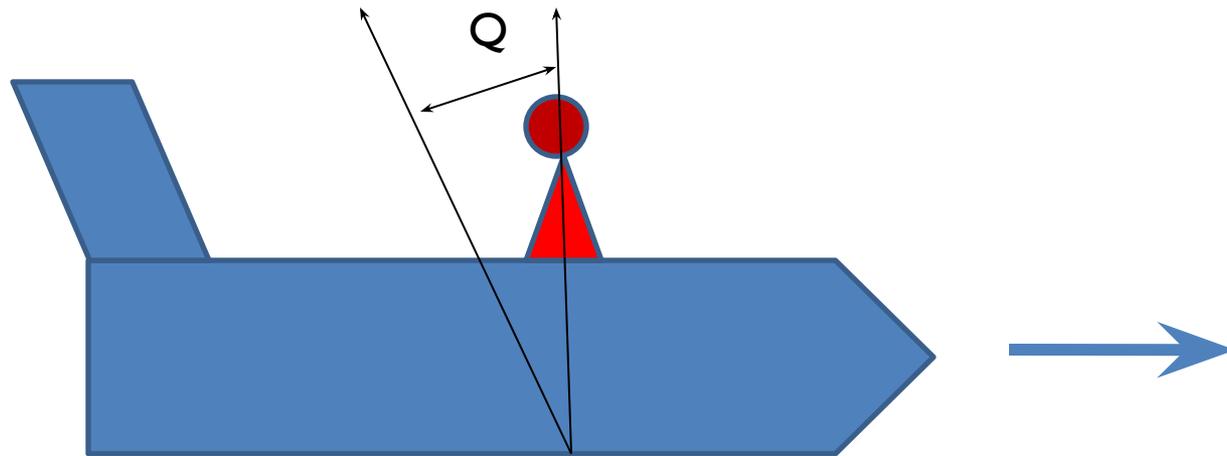
где:

$$Y(i)=\begin{cases} 0, & \text{если } i < T \\ f(X(i-T)), & \text{если } i > T \end{cases}$$

$$Z(i)=\begin{cases} 0, & \text{если } i < T; \\ X(i-T) - f(X(i-T)), & \text{при } i > T \end{cases}$$

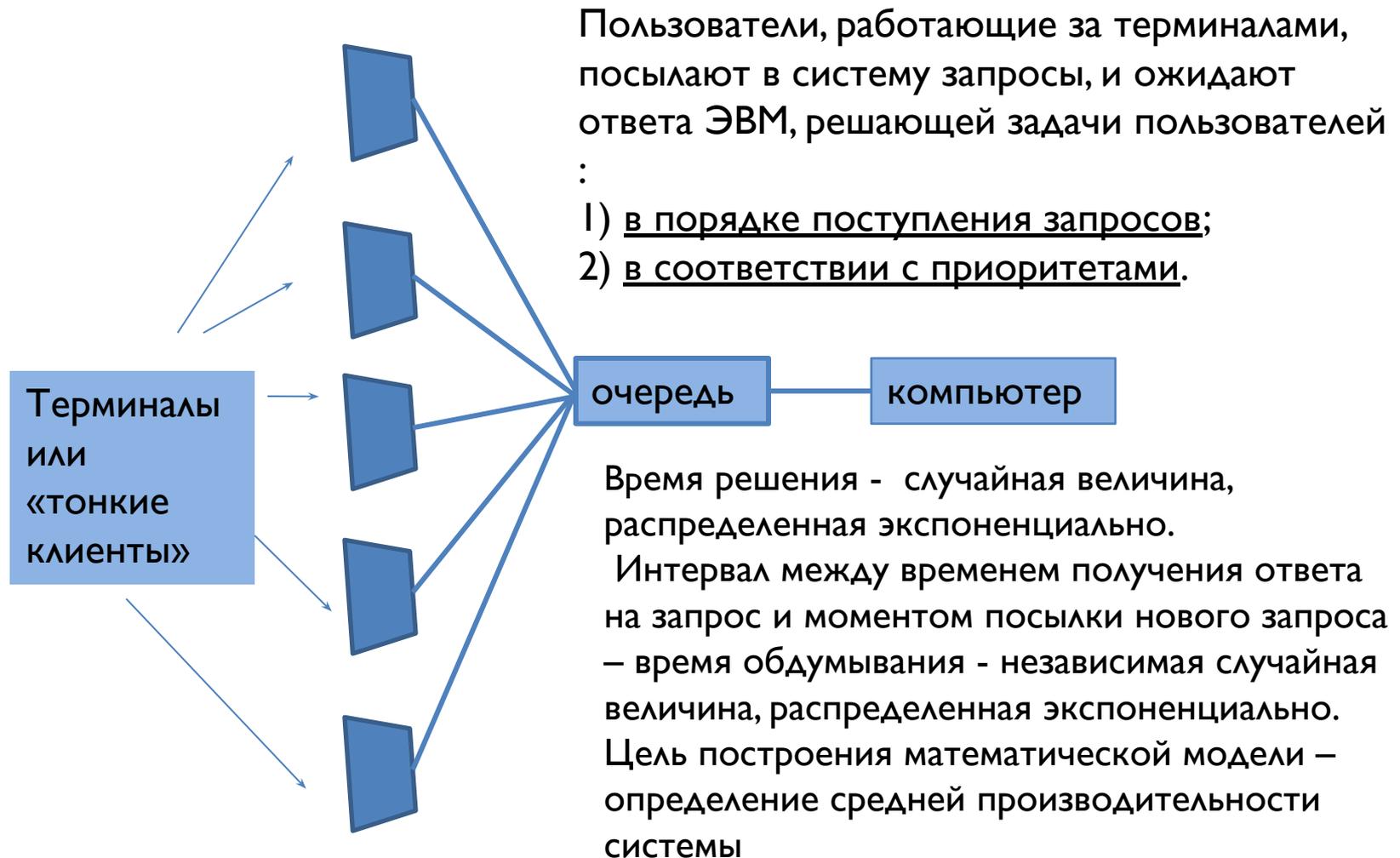
X_i	Y_i	Z_i	i
10	0	0	1
40	0	0	2
160	0	0	3
600	9	1	4
2240	36	4	5
8320	144	16	6
...	7

Имитационная модель аварийной катапульты



Под действием катапульты пилот с креслом начинает двигаться по направляющим со скоростью выброса V_e под углом Q к вертикали. После перемещения на расстояние Y кресло отрывается от направляющих – пилот покинул самолет, началась 2-я фаза катапультирования. Важно, чтобы пилот не задел хвост самолета который выше кабины пилота.

Определение производительности многотерминальной ЭВМ, работающей в запросно-поисковом режиме

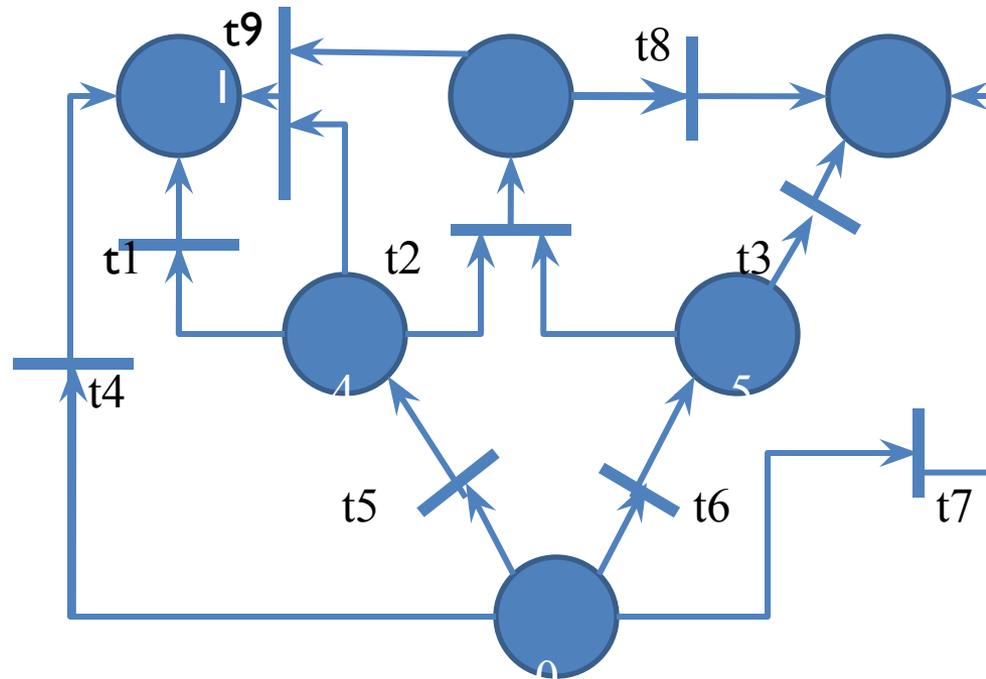


Использование сетей Петри в моделях формирования выходных документов автоматизированных систем управления предприятиями – содержательная постановка задачи

- Задано множество документов, которые нужно формировать на основе базы данных и множества программных единиц, которые могут это делать. Каждая единица характеризуется временем и объемом памяти. Каждый документ характеризуется объемом используемой памяти. Требуется построить такую стратегию формирования документов, которая бы:
 - Минимизировала время формирования выходных документов.
 - Удовлетворяло ограничениям на объем используемой памяти.

Использование сетей Петри в моделях формирования выходных документов автоматизированных систем управления предприятиями – визуальное представление задачи

- Представление задачи сетью Петри:

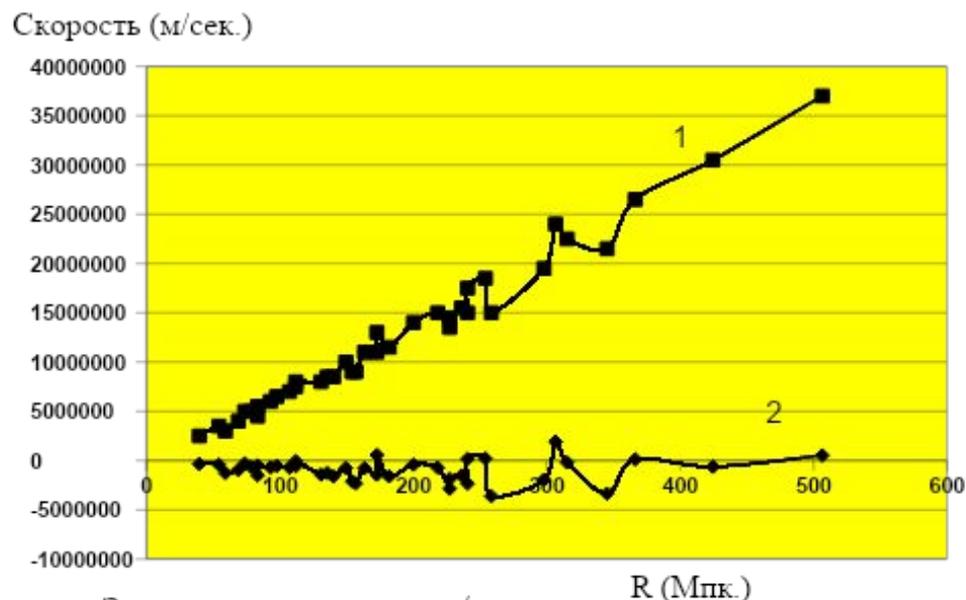


Самостоятельно: Построить по сети Петри формальную постановку задачи минимизации времени формирования документов.

Математическое моделирование процессов в астрофизике

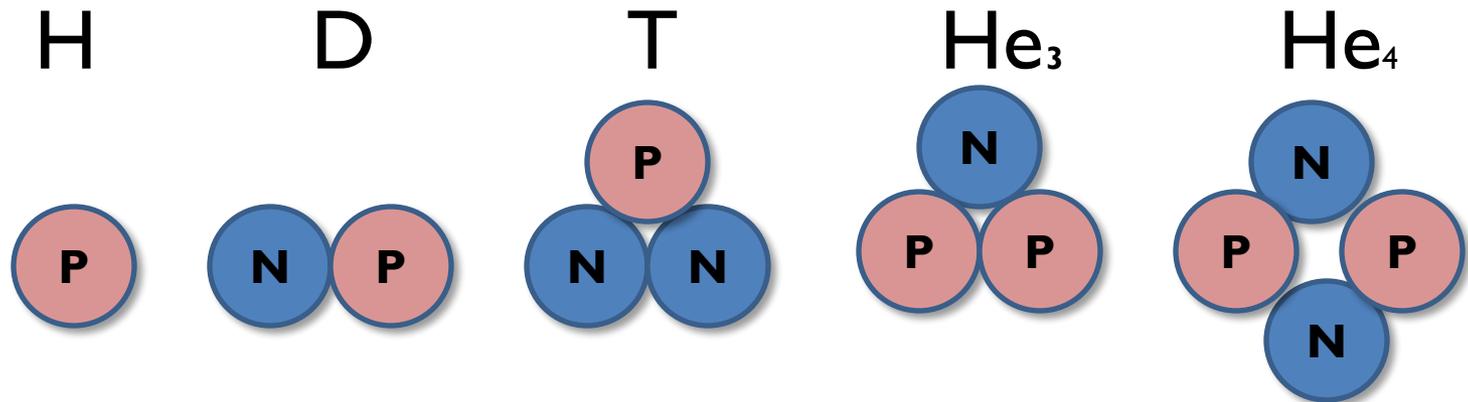
- Закон Хаббла:

$$\forall i \in I: \frac{dR_i}{dt} \approx HR_i$$



Зависимости скорость/расстояние при измерении расстояний постоянными (квадраты) и переменными (ромбы) эталонами.

Математическое моделирование процессов в ядерной физике



$\Delta m = 7,289$ Мэв. $13,136$ Мэв. $14,95$ Мэв. $14,93$ Мэв. $2,425$ Мэв.

Формула Вайцеккера (для $A > 20$): A – массовое число.

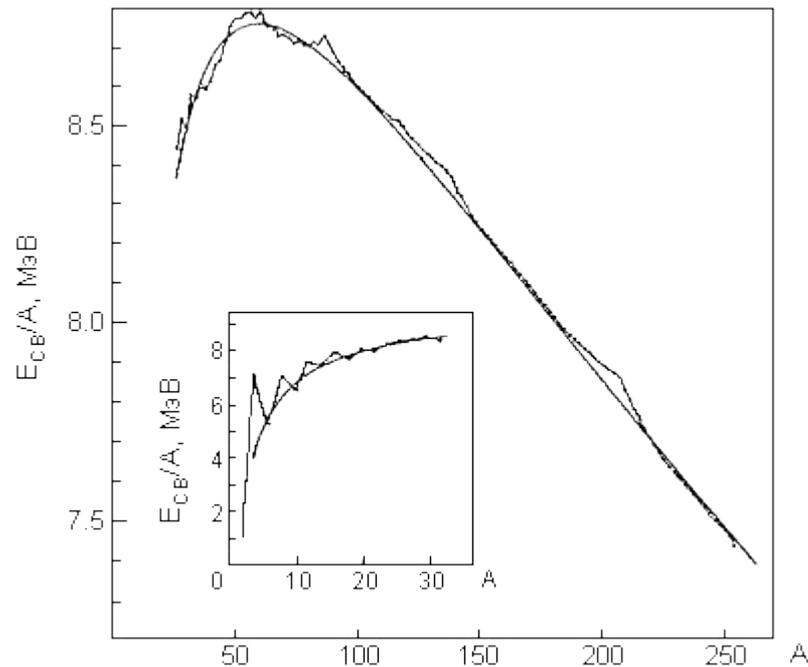
$$W(A, P) = 15,6A - 17,2\sqrt[3]{A^2} - 0,72\frac{P(P-1)}{\sqrt[3]{A}} - 23,6\frac{(A-2P)^2}{A} + \delta\frac{1}{\sqrt[4]{A^3}},$$

где $\delta = +34$ для четно - четных ядер; 0 - для случаев, когда A нечетно; -34 для нечетно - нечетных ядер.

Магические числа: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126: ядра с магическим числом протонов и /или нейтронов более распространены, имеют сравнительно малый дефект массы и более устойчивы.

Графическая иллюстрация

- Экспериментальные значения удельной энергии связи и расчет по формуле Вайцзеккера



Самостоятельно

- Решить приведенную ниже задачу:
- 1. Симплекс методом;
- 2. Предложить свой метод решения.
- 3. Результаты сравнить.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i x_i c_i \rightarrow \max; \\ \forall i : x_i a_i \leq b_i; \\ \forall i : x_i \geq 0. \end{array} \right.$$