

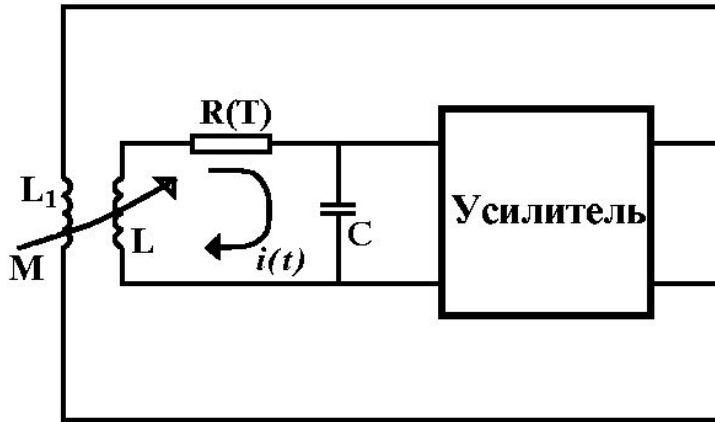
Генератор с инерционной нелинейностью

(генератор Анищенко-Астахова)

**как одна из базовых моделей
детерминированного хаоса**

1. Генератор Теодорчика

В классическом генераторе с инерционной нелинейностью Теодорчика автоколебания обеспечиваются введением в колебательный контур термосопротивления $R(T)$, свойства которого нелинейным образом зависят от протекающего через него тока.



Уравнения для тока в контуре имеют вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{R(T)}{L} - \frac{MS_0}{LC} \right] \frac{di}{dt} + \left[\frac{1}{LC} + \frac{1}{L} \frac{\partial R(T)}{\partial T} \frac{dT}{dt} \right] i = 0, \quad (1)$$

- S – крутизна характеристики усилителя, который предполагается линейным;
- M – взаимная индуктивность цепи обратной связи;
- $R(T)$ – сопротивление термистора, зависящее от температуры T ;
- L и C – индуктивность и емкость колебательного контура.

Полагая зависимость $R(T)$ линейной ($R(T) = R_0 + LbT$) и считая, что процесс теплообмена подчиняется закону Ньютона:

$$\rho q \frac{dT}{dt} + kT = R(T)i^2,$$

где q – удельная теплоемкость нити термистора, а ρ - ее масса, получаем замкнутую систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i &= (\mu - bT) \frac{di}{dt} - bi \frac{dT}{dt}, \\ \frac{dT}{dt} + \gamma T &= \alpha(T)i^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu = \omega_0^2 S_0 M - R_0 / L; \quad \omega_0^2 = 1 / LC; \quad \gamma = k / \rho q; \quad \alpha(T) = \alpha_0 + bLT / \rho q; \quad \alpha_0 = R_0 / \rho q.$$

В безразмерных переменных $x = ai$, $y = -x$, $z = bT / \omega_0$, $\tau = \omega_0 t$, $a = \sqrt{\alpha b \rho q / \omega_0 k}$ уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gx^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $m = \mu / \omega_0 = \omega_0 S_0 M - R_0 / \omega_0 L$, $g = \gamma / \omega_0$, $\dot{x} = dx / d\tau$.

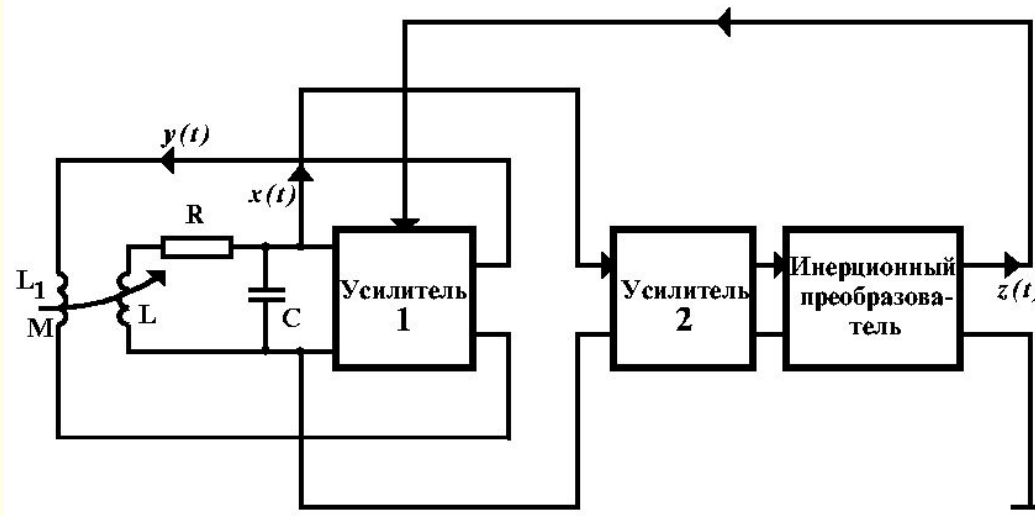
В трехмерной двухпараметрической системе (3) параметр m пропорционален разности вносимой и рассеиваемой энергий, g - параметр, характеризующий относительное время релаксации термистора. В дальнейшем m будем называть параметром возбуждения, а g - параметром инерционности генератора.

Из системы уравнений (3) видно, что время релаксации термистора существенно превышает период колебаний, уравнения переходят в двумерную модель генератора Ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx - x^3 + y, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью

Рассмотрим схему, в которой колебательный контур в отличие от классического случая не содержит нелинейных элементов.



Усилитель 1 управляется дополнительной цепью обратной связи, содержащей линейный усилитель 2 и инерционный преобразователь. Дифференциальные уравнения этого генератора можно записать в явном виде, конкретизировав зависимость $S(x, V)$ усилителя 1 и задав уравнения инерционного преобразования $V(x)$.

Аппроксимируем полиномом функцию $S^1(x)$, т.е. крутизну усилителя 1, без учета воздействия дополнительной обратной связи:

$$S^1(x) = S_0 - S_1 x^2, \quad (5)$$

где x – напряжение на входе усилителя 1; S_0 и S_1 – постоянные, положительные коэффициенты. Предположим, что механизм воздействия цепи инерционной обратной связи подчиняется закономерности

$$S = S^1(x) - bV = S_0 - S_1 x^2 - bV, \quad (6)$$

где $V=V(x)$ – напряжение на выходе инерционного преобразователя; b – параметр. Пусть инерционное преобразование осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{V} = -\gamma V + \varphi(x). \quad (7)$$

Уравнения для тока в контуре генератора (см. схему)

$$L di / dt + Ri + C^{-1} \int (i - MS di / dt) dt = 0.$$

Совместно с уравнениями (6) и (7) уравнение для тока дает замкнутую систему, сводящуюся в безразмерных переменных к виду

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + g\Phi(x), \quad (8)$$

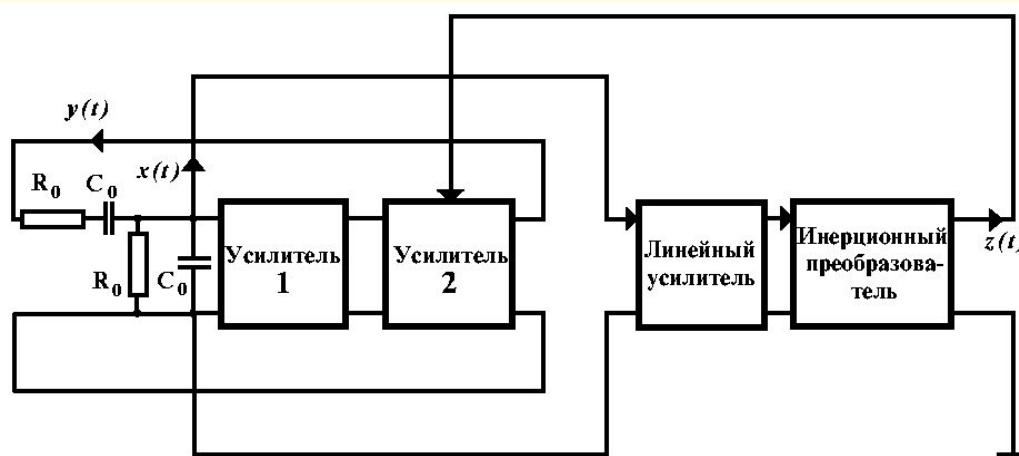
где $d = d(S_1)$ – параметр, отвечающий степени влияния нелинейности крутизны характеристики; $\Phi(x)$ – функция, описывающая свойства инерционного преобразователя.

В генераторе действуют два механизма нелинейного ограничения амплитуды колебаний. Первый – безынерционный и связан с нелинейностью характеристики усилителя, второй – инерционный, обусловленный зависимостью крутизны S от напряжения V . Пусть усилитель работает на линейном участке характеристики ($S_1 = 0$), а инерционный преобразователь собран по схеме двухполупериодного квадратичного детектора с RC -фильтром и описывается уравнением

$$\dot{z} = -gz + gx^2. \quad (9)$$

Параметр инерционности g равен отношению периода колебаний контура T_0 к постоянной времени фильтра. При сделанных предположениях уравнения (8) переходят в уравнения классического генератора (3).

Вид уравнений (8) не изменится, если в качестве селективного элемента использовать RC -цепочку в виде моста Вина. Для обеспечения условий генерации в этом случае нужно применить два каскада усиления, как это показано на рисунке. Для симметричного моста Вина управляющие



параметры m и g в уравнениях (8) просто и с точки зрения эксперимента удобным образом выражаются через параметры схемы:

$$m = K_0 - 3, \quad g = R_0 C_0 / \tau_f, \quad (10)$$

где K_0 – коэффициент усиления двухкаскадного усилителя; $R_0 C_0$ и τ_f – постоянные времени моста Вина и фильтра детектора. В физическом эксперименте параметры m и g легко менять и измерять, варьируя коэффициент усиления и постоянную времени фильтра.

В качестве примера функции $\Phi(x)$, при которой модель (8) приобретает свойства генератора хаоса, мы выберем

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

С физической точки зрения это соответствует использованию однополупериодного детектора в схеме инерционного преобразователя.

Определив функцию $\Phi(x)$ в соответствии с (11), из (8) получаем уравнения модифицированного генератора с инерционной нелинейностью, представляющие собой трехмерную трехпараметрическую нелинейную диссипативную систему:

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2. \quad (12)$$

Исключением переменной y уравнения генератора с инерционной нелинейностью (12) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} - (m - z - 3dx^2)x + [1 - gz + g\Phi(x)]x &= 0, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Автоматически регулируемый нелинейный осциллятор (13) характеризуется инерционной зависимостью диссипации (коэффициент перед \dot{x}) и частоты (коэффициент перед x) от переменной x . В случае сильной инерционности системы ($\tau_f \gg T_0$), когда $g \rightarrow 0$, система вырождается в двумерную:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x &= 0, \\ a = m, \quad b &= 3d / m, \end{aligned} \quad (14)$$

и независимо от вида функции $\Phi(x)$ совпадает по форме записи с уравнениями генератора Ван дер Поля.

Другой асимптотический случай – безынерционный генератор, соответствующий росту параметра g до бесконечности. Из третьего уравнения системы при этом условии следует алгебраическая взаимосвязь переменных x и z , сводящая исходную систему к виду

$$\ddot{x} - [m - \Phi(x) - 3dx^2]\dot{x} + x = 0. \quad (15)$$

Полная аналогия с уравнением Ван дер Поля в этом предельном случае достигается при условии $\Phi(x) = x^2$.

Система (8) характеризуется единственной особой точкой в начале координат. Если функция $\Phi(x)$ не содержит линейных по x членов, линеаризация системы в особой точке приводит к характеристическому полиному

$$(g + s)(s^2 - ms + 1) = 0, \quad (16)$$

собственные значения которого есть

$$s_{1,2} = m/2 \pm (i/2)\sqrt{4 - m^2}, \quad s_3 = -g. \quad (17)$$

Как видно из (17), в бифуркационной точке $m = 0$ собственные значения $s_{1,2}$ пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью:

$$\partial \operatorname{Re} s_{1,2}(m) / \partial m \big|_{m=0} = 1/2.$$

При этом третье собственное значение $s_3 = -g$ отделено от мнимой оси. Реализуется классическая бифуркация Андронова – Хопфа: бифуркация рождения цикла из седло-фокуса.

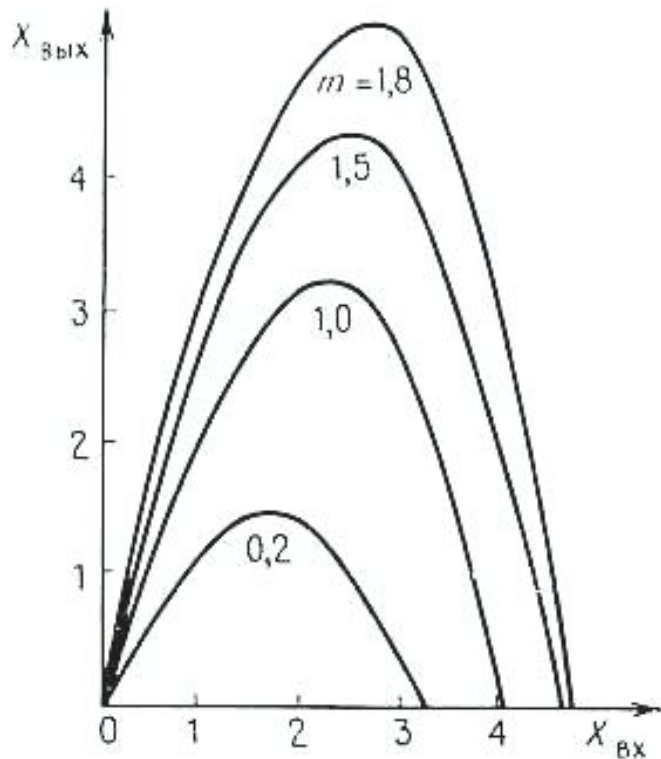
3. О нелинейных свойствах усилительного каскада генератора

Мы конструировали генератор, в котором усилительный каскад должен характеризоваться управляемым падающим участком и иметь характеристику типа перевернутой параболы. Имея уравнения (8) и схему генератора (рис. 2), мы можем провести необходимые расчеты. Разорвем цепь в схеме генератора на входе первого усилителя (убрав тем самым обратную связь) и рассчитаем аналитически коэффициент усиления для амплитуды гармонического сигнала резонансной частоты. Получим следующее выражение для амплитуды выходного сигнала:

$$x_{\text{вых}} = \left(1 - \frac{m}{b}\right) \left| 1 - F(g) \frac{x_{\text{ex}}^2}{m + b} \right| x_{\text{ex}}, \quad (18)$$

$$F(g) = \frac{1}{4} - \frac{(1 + \exp(-\pi g))(1 - \exp(-\pi g))^2}{\pi g(4 + g^2)},$$

b – постоянный коэффициент, зависящий от типа колебательного контура усилителя.



Зависимости $x_{\text{вых}} = \varphi(x_{\text{вх}})$ для нескольких значений m и фиксированного $g = 0.2$.

Как видно из рисунка, формула (18) при $g = \text{const}$ описывает однопараметрическое семейство кривых типа параболы, крутизна падающего участка которых увеличивается с ростом m .

4. Хаотический аттрактор и гомоклинические траектории в генераторе

Многосторонний экспериментальный анализ механизмов возникновения и топологической структуры хаотических притягивающих множеств в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью обоснованно привел к мысли о существовании в автономной динамической системе гомоклинической траектории типа *петли сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокус*.

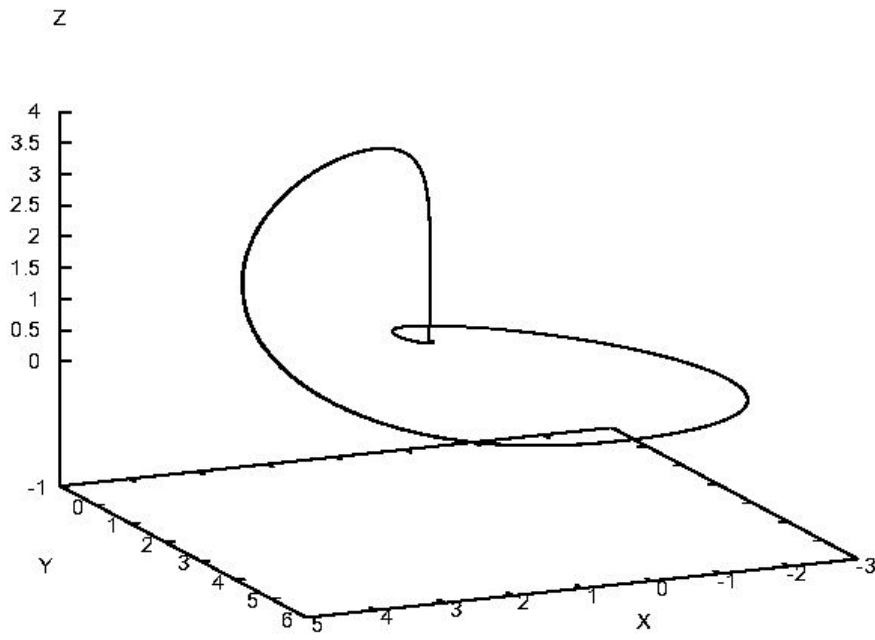
Добавим во второе уравнение исходной системы (8) постоянный положительный член γ и рассмотрим возмущенную таким способом систему:

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x + \gamma, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2. \quad (19)$$

Особая точка потока (19) по-прежнему единственная, слегка смещена относительно начала координат и представляет собой седло-фокус. Ее координаты:

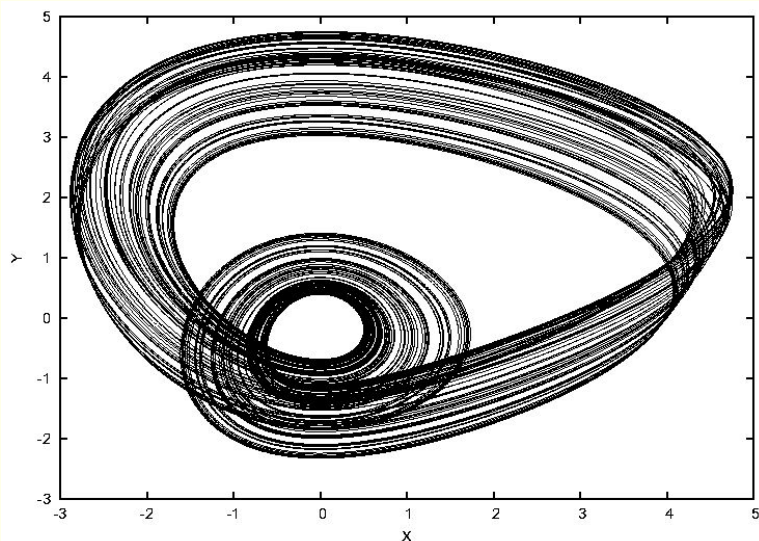
$$x^0 = \gamma, \quad y^0 = \gamma(\gamma^2 - m), \quad z^0 = \gamma^2.$$

Состояние равновесия в возмущенной системе (19) для $t > 0$ характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Для нахождения петли в уравнениях системы произведем замену времени на обратное и с начальными условиями на одномерном неустойчивом многообразии решим многократно задачу Коши для фиксированного $g = 0.3$ и различных t и γ . Выбрав малое значение $\gamma = 0.1$, найдем бифуркационную точку $t = 1.176\dots$, в которой реализуется однообходная петля седло-фокуса Γ_0^1 .

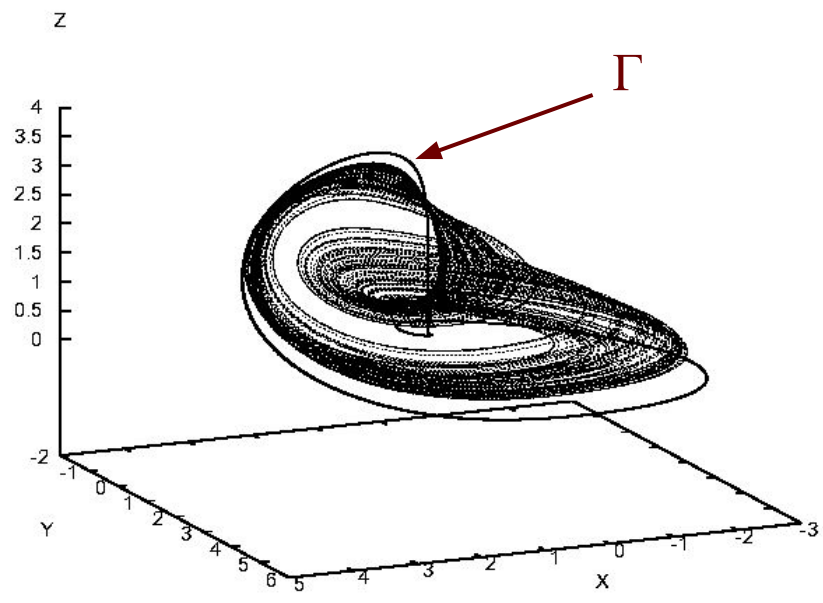


При отклонении любого из управляющих параметров системы (19) петля, естественно, разрушается. Детальные расчеты бифуркационных диаграмм для системы (8) и возмущенной системы (19) подтвердили их полную качественную эквивалентность. На основании этого можно утверждать, что структура и свойства хаоса в системе (8) полностью определяются фактом существования петли сепаратрисы седло-фокуса в системе (19).

Экспериментальные и численные исследования убедительно доказали возможность генерации хаотических автоколебаний различной структуры и взаимосвязь эффекта детерминированного хаоса с петлей сепаратрисы седло-фокуса в системе (8).

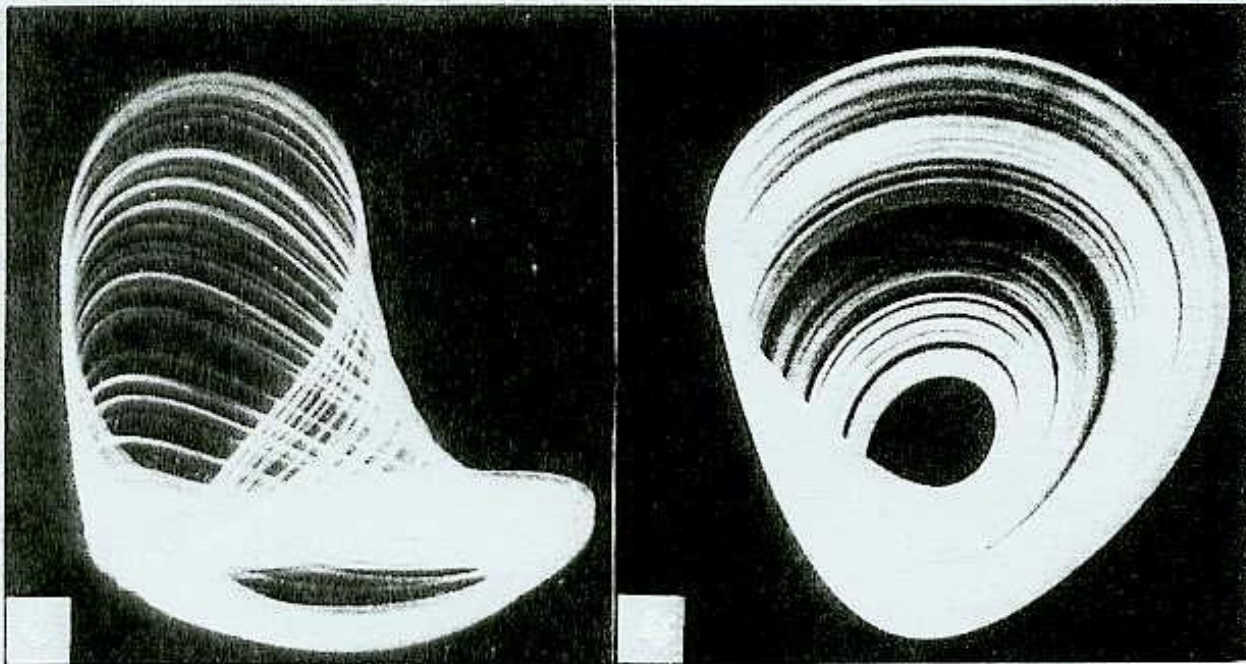


Спиральный аттрактор, представляющий собой как бы «размытый» двухтактный цикл (численный эксперимент)



Винтовой аттрактор, имеющий вид «размытой» петли сепаратрисы Γ (численный эксперимент)

Проекции фазовой траектории спирального аттрактора на
плоскости переменных (x, z) (а) и (x, y) (б)
(физический эксперимент, $m = 1.5, g = 0.2$)



(а)

(б)

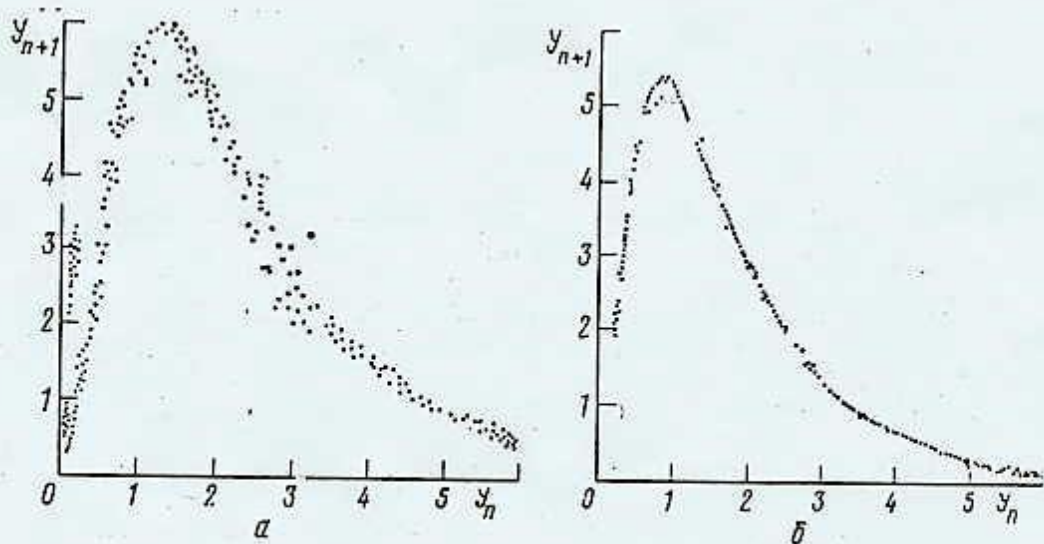


Рис. 7. Одномерные отображения $Y_{n+1}=f(Y_n)$, построенные численно для $g=0,097$ (а) и $g=0,3$ (б) в первой закрытой зоне СА

Анализ динамики генератора в режиме хаоса показал, что в отображении Пуанкаре система характеризуется отображением последования, которое близко к одномерной параболе Фейгенбаума.

Можно сделать следующий принципиально важный вывод. Для реализации простейшего типа генератора хаотических автоколебаний необходимо и достаточно:

1. Создать усилительный каскад с резонансным контуром на входе, обеспечивающий характеристику типа перевернутой параболы с управляемой крутизной падающего участка.
2. Ввести положительную обратную связь, удовлетворяющую всем условиям возбуждения автоколебаний.