1. Определение логарифма

- Рассмотрим показательное уравнение

$$a^x = b, \quad \text{где} \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1, \quad x \in R.$$

- При $b \leq 0$ это уравнение не имеет решений; при $b > 0$ показательное уравнение имеет единственный корень. Этот корень называют *логарифмом* ***b*** *по основанию a* и обозначают $log_a b$.

Определение.

- ***Логарифмом*** положительного числа *b* по основанию *a*, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести основание *a*, чтобы получить число *b*, т.е.

$$a^x = b; \quad x = log_a b, \quad \Rightarrow \quad a^{log_a b} = b$$

Формулу $\underline{a^{\log_a b} = b}$

(где $b > 0, a > 0, a \neq 1$) называют *основным логарифмическим тождеством.*

Примеры. Заполнить пропуски:

1. $log_2 8 = \ldots, \quad \text{т.к. } 2^{\cdots} = 8, \quad a = 2, b = 8$

2. $log_3 \dfrac{1}{9} = \ldots, \quad \text{т.к. } 3^{\cdots} = \dfrac{1}{9}, \quad a = 3, b = \dfrac{1}{9}$

3. $log_7 7 = \ldots, \quad \text{т.к. } 7^{\cdots} = 7, \quad a = 7, b = 7$

4. $log_4 1 = \ldots, \quad \text{т.к. } 4^{\cdots} = 1, \quad a = 4, b = 1;$

5. $log_{\ldots} 16 = 4, \quad \text{т.к.} \quad \ldots^4 = 16;$

6. $log_{\ldots} \dfrac{1}{32} = -5, \quad \text{т.к.} \quad \ldots^{-5} = \dfrac{1}{32};$

Примеры. Заполнить пропуски:

7. $4^{\log_4 5} = \ldots;$

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = \ldots;$

9. $5^{\log_{\ldots} 4} = 4$

10. $13^{\log_{13} \ldots} = \frac{3}{4}.$

Примеры.

11. Вычислить

$$\log_{64} 128 = ?$$

$$\log_{64} 128 = x,$$

$$\text{по определению}: \quad 64^x = 128$$

$$2^{6x} = 2^7$$

$$6x = 7$$

$$x = \frac{7}{6}$$

$$\text{Ответ}: \log_{64} 128 = \frac{7}{6}.$$

Примеры.

12. $3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = 1/25$;

13. Решить уравнение

$$log_3(1-x)=2$$

$$3^2 = 1 - x$$

$$\underline{x = -8}$$

2. Свойства логарифмов

- При работе с логарифмами применяются следующие их свойства, вытекающие из свойств показательной функции:
- При любом $a > 0$ $(a \neq 1)$ и любых положительных чисел *x* и *y* выполнены равенства:

Свойства логарифмов:

1. $\underline{\log_a 1 = 0},\quad \text{т.к.}\quad a^0 = 1$

2. $\underline{\log_a a = 1},\quad \text{т.к.}\quad a^1 = a$

3. логарифм произведения равен сумме логарифмов:

$$\underline{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

4. логарифм частного равен разности логарифмов:

$$\underline{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

5. логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени:

$$\underline{\log_a x^p = p \cdot \log_a x},\quad \text{где } p \in R$$

- Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразований выражений, содержащих логарифмы. При этом используются *формулы перехода* от одного основания логарифма к другому основанию:

1. $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$ где $b > 0, a > 0, a \neq 1, c \neq 1, c > 0.$

2. $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

3. $$\log_{1/a} b = -\log_a b$$

4. $$\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b,$$ $a > 0, a \neq 1, b > 0, p \neq 0.$

Примеры:

14. $$\log_{12} 2 + \log_{12} 72 =$$

15. $$\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} =$$

16. $$\log_{13} \sqrt[5]{169} =$$

17. $$\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 =$$

18. $$\frac{\log_3 8}{\log_3 16} =$$

Примеры:

14.

$$log_{12} 2 + log_{12} 72 = log_{12}(2 \cdot 72) = log_{12} 144 = 2$$

15.

$$\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 \frac{15}{15/16} = \log_2 16 = 4$$

16.

$$log_{13} \sqrt[5]{169} = log_{13} 169^{\frac{1}{5}} = log_{13} 13^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} log_{13} 13 = \frac{2}{5}$$

17.

$$log_8 12 - log_8 15 + log_8 20 = log_8\left(\frac{12 \cdot 20}{15}\right) = log_8 16 = \left| \begin{array}{l} 8^x = 16 \\ 2^{3x} = 2^4 \\ x = 4/3 \end{array} \right| = \frac{4}{3}$$

18.

$$\frac{log_3 8}{log_3 16} = \frac{log_3 2^3}{log_3 2^4} = \frac{3 log_3 2}{4 log_3 2} = \frac{3}{4}$$

3. Логарифмирование и потенцирование

- Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*.
- Нахождение положительного числа по его логарифму называют *потенцированием*.

Примеры.

19. Прологарифмировать выражения:

а) $x = 2a^3 b;$ б) $x = \sqrt{\dfrac{ab}{c^3}};$ в) $x = \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{b}}$

Ответ. а) $\log x = \log 2 + 3\log a + \log b;$

б) $\log x = \dfrac{1}{2}\left(\log a + \log b - 3\log c\right);$

в) $\log x = \dfrac{1}{2}\log a + \dfrac{1}{6}\log b.$

20. Пропотенцировать выражения:

$$\text{а) } \log x = \frac{1}{3}\log a - \frac{1}{2}\log b;$$

$$\text{б) } \log x = \frac{1}{4}\log a + \frac{3}{4}\log b - \frac{2}{3}\log c.$$

Ответ.

$$\text{а) } x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}; \quad \text{б) } x = \frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

4. Десятичные и натуральные логарифмы.

- ***Десятичным логарифмом числа*** называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут: $\underline{\log_{10} b = \lg b}$

- ***Натуральным логарифмом числа*** называют логарифм этого числа по основанию *e*, где $e = 2{,}7182818... \approx 2{,}7$

– иррациональное число, и пишут:

$$\underline{log_e b = ln b}$$

Вычислите самостоятельно:

à) $\log_2 16 = \ldots;$

á) $\log_2 64 = \ldots;$

â) $\log_2 2 = \ldots;$

ã) $\log_2 1 = \ldots;$

ä) $\log_2 \frac{1}{2} = \ldots;$

å) $\log_2 \frac{1}{8} = \ldots.;$

æ) $3^{\log_3 18} = \ldots;$

ç) $3^{5\log_3 2} = \ldots.$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

à) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} =$

á) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} =$

â) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9} =$

ã) $8^{\log_2 5} =$

ä) $9^{\log_3 12} =$

å) $16^{\log_4 7} =$

æ) $0{,}125^{\log_{0,5} 7} =$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

$$\grave{a})\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}2}\right)^{6}=2^{6}=64;$$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

à) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}2}\right)^{6} = 2^{6} = 64;$

á) $0{,}3^{2\log_{0,3}6} = \left(0{,}3^{\log_{0,3}6}\right)^{2} = 6^{2} = 36;$

Упростить выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

$$\text{à)}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2}\right)^{6} = 2^{6} = 64;$$

$$\text{á)}\quad 0{,}3^{2\log_{0,3} 6} = \left(0{,}3^{\log_{0,3} 6}\right)^{2} = 6^{2} = 36;$$

$$\text{â)}\ \ 7^{\frac{1}{2}\log_{7} 9} = \left(7^{\log_{7} 9}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3;$$

Найти число x по определению логарифма:

$log_6 x = 3$ $6^3 = x$ $\underline{x = 216}$	$log_2(5 - x) = 3$ $2^3 = 5 - x$ $\underline{x = -3}$	$log_{\frac{1}{6}}(0{,}5 + x) = -1$ $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 0{,}5 + x$ $6 = 0{,}5 + x$ $\underline{x = 5{,}5}$