АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАН ИЙ

- Изучить основные понятия алгебры высказываний.
- Познакомиться с основными логическими операциями.
- Научиться строить таблицы истинности основных логических операций
- Рассмотреть базовые логические законы и правила преобразования логических выражений

Алгебра логики ***(алгебра высказываний)*** **-** раздел математической логики, изучающий строение (форму, структуру) сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов .

в основе

математики ↓ число, переменная

логики ↓ высказывание

(логическая переменная)

Логическое высказывание

Высказывание- это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними.

Высказывание строится на основе понятий и по форме является повествовательным предложением.

Так, например, предложение " *Трава зеленая*" следует считать высказыванием, так как оно истинное.

Предложение " *Лев - птица*" тоже высказывание, так как оно ложное.

. **Не всякое предложение является логическим высказыванием.**

Высказываниями не являются, например, предложения "***ученик десятого класса***" и "***информатика — интересный предмет***".

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются *составными.*

Высказывания, не являющиеся составными, называются *элементарными.*

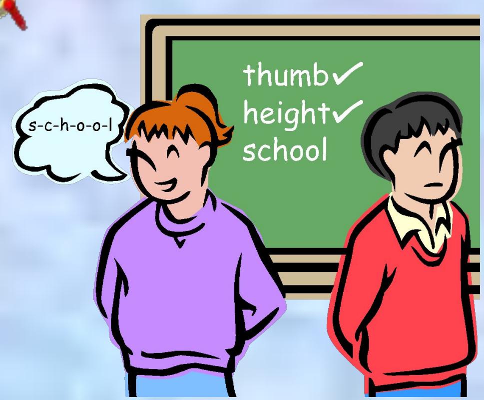
В алгебре высказываний высказывания обозначаются именами логических переменных, которые могут принимать лишь два значения:

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания *"не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда"* и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются *логическими связками*.

Над числами и переменными мы производим арифметические действия

Над переменными алгебраические преобразования

Над высказываниями (логическими переменными) мы можем производить **логические операции.**



Логическая операция

способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором значение истинности сложного высказывания полностью определяется значениями истинности исходных высказываний.

Логическое умножение

Объединение двух или нескольких высказываний в одно с помощью союза «И» называется операцией логического умножения или конъюнкцией.

Конъюнкция

Составное высказывание, образованное в результате операции логического умножения (конъюнкции),истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

КОНЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЯЕТ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ СОЮЗА

В прямоугольнике противоположные стороны равны И параллельны

В прямоугольнике противоположные стороны равны И пересекаются

КОНЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

A	B	F = A ^ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическое сложение

Объединение двух или нескольких высказываний с помощью союза «или» называется операцией логического сложения или дизъюнкцией.

Дизъюнкция

Составное высказывание, образованное в результате операции логического сложения (дизъюнкции), истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

ДИЗЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЯЕТ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ СОЮЗА

Все положительные числа больше отрицательных **или** больше 0

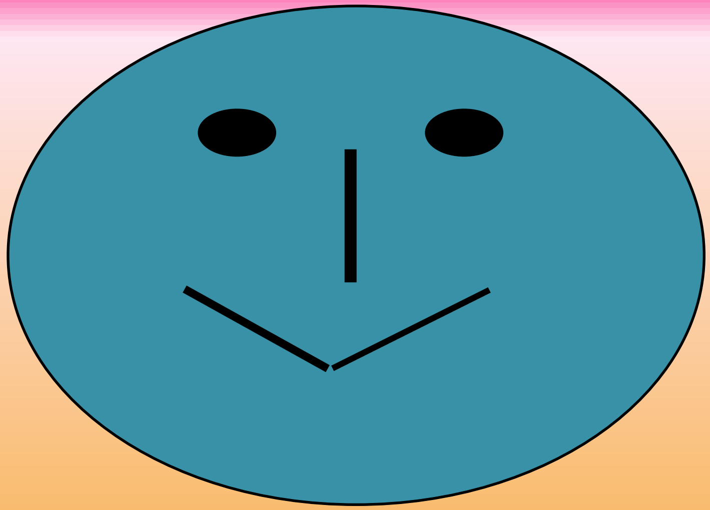
Все положительные числа больше 1 **или** больше нуля

ДИЗЪЮНКЦИЯ

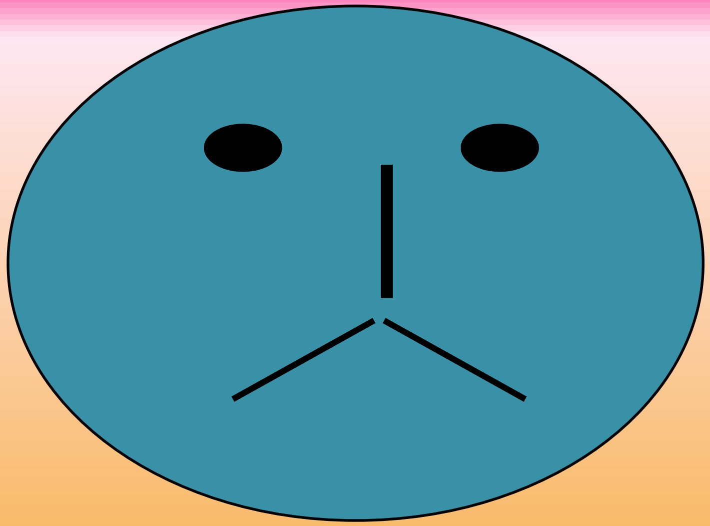
ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

A	B	F = A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

«Мнемоническое правило»



Логическое сложение



Логическое умножение

ЗАПОМНИ!

дИзъюнкцИя

ИЛИ

$\vee$

ДИЗ – галочка вниз

конъюнкцИя

И

$\wedge$

КОН – как крыша он

Логическое отрицание

Присоединение частицы «**не**» к высказываниям называется операцией логического отрицания или инверсией.

Инверсия

Логическое отрицание (инверсия) делает истинное высказывание ложным и, наоборот,

ложное - истинным.

ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

ОПРЕДЕЛЯЕТ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЧАСТИЦЫ

А - «На улице идет дождь»

Тогда $\neg A$ -

«На улице нет дождя»

$\bar{A}$ -

ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

А	¬ А
0	1
1	0

ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

Определите значение логического выражения (0 или 1):

а) ¬А, если А – «число 6 – четное»

б) ¬А, если А – «Петр I – не был императором»

в) ¬А, если А – «металлы проводят ток»

г) ¬А, если А – «Москва – столица России»

д) ¬А, если А – «идет второй урок»

РЕШИМ ЗАДАЧИ

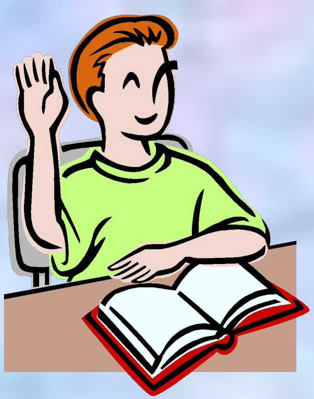
Обратите внимание на присутствие скобок!

Последовательность выполнения операция в логических формулах определяется старшинством операций. В порядке убывания старшинства, логические операции расположены так:

отрицание, конъюнкция, дизъюнкция.

Кроме того, на порядок операции влияют скобки, которые можно использовать в логических формулах.

РЕШИМ ЗАДАЧИ



определите, в каком порядке необходимо вычислять значение логического выражения:

¬ A & ¬ B

A & (B & C)

(A & B) v (C & ¬ D)

A v ¬ D v B

A ^ B ^ ¬ A

Импликация

Составное высказывание, образованное с помощью операции логического следования (импликации), ложно тогда и только тогда, когда из истинной предпосылки (первого высказывания) следует ложный вывод.(второе высказывание).

ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

условие => следствие

ЕСЛИ, ... ТО ...

Если будет дождь, то мы не пойдем на улицу.

Если я поленюсь, то получу двойку.

Если на траве роса, то скоро настанет вечер.

ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность

Составное высказывание, образованное с помощью логической операции (эквивалентности), истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность)

условие <=> условие

сравниваем условия

Чайник греет воду тогда и только тогда, когда он включен.

Мы дышим воздухом тогда и только тогда, когда гуляем в парке.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность)

A	B	A <=> B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B.$$

Эквиваленцию можно выразить через *отрицание*, *дизъюнкцию* и *конъюнкцию*:

$$A \leftrightarrow B = (\ A \vee B) \cdot (\ B \vee A).$$

Таблица истинности

Таблицу, показывающую,

какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний, называют ***таблицей истинности*** составного высказывания.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

1. Необходимо определить количество строк в таблице истинности.
   - количество строк = 2^n, где n – количество логических переменных
2. Необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.
3. Необходимо построить таблицу истинности с указанным количеством строк и столбцов, ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;
4. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений
5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

1. Необходимо определить количество строк в таблице истинности.
   - количество строк = 2^n, где n – количество логических переменных

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

2. Необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

3. Необходимо ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

4. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений

A	B	A ^ B	A v B	(A^B) & (AvB)

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

4. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений

A	B	A ^ B	A v B	(A^B) & (AvB)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	A ^ B	A v B	(A^B) & (AvB)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	A ^ B	A v B	(A^B) & (AvB)
0	0	0		
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1		

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	A ^ B	A v B	(A^B) & (AvB)
0	0	0	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
1	1	1	1	

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

F = (A ^ B) & (A v B)

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	A ^ B	A v B	(A^B) & (AvB)
0	0	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	1	1	**1**

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

A ^ (B v ┐B => ┐C)

Постройте таблицу истинности

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении:

1) **Инверсия**
2) **Конъюнкция**
3) **Дизъюнкция**
4) **Импликация**
5) **Эквивалентность**

1. … таблице истинности.
… о логических переменных
2. … в в таблице истинности,
… енных плюс количество
3. … с указанным количеством
… таблицы в соответствии с
… их операций с учетом
4. … борами значений
5. … о столбцам, выполняя
логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

A ^ (B v ┐B => ┐C)

Постройте таблицу истинности

A	B	C	┐B	┐C	B v ┐B (1)	(1) => ┐C	A ^(Bv┐B=>┐C)
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
1	0	0					
0	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	1	1					

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

A ^ (B v ┐B => ┐C)

Постройте таблицу истинности

A	B	C	┐B	┐C	B v ┐B (1)	(1) => ┐C	A ^(Bv┐B=>┐C)
0	0	0	1				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
1	1	0	0				
1	0	1	1				
1	1	1	0				

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

A ^ (B v ┐B => ┐C)

Постройте таблицу истинности

A	B	C	┐B	┐C	B v ┐B (1)	(1) => ┐C	A ^(Bv┐B=>┐C)
0	0	0	1	1			
0	0	1	1	0			
0	1	0	0	1			
1	0	0	1	1			
0	1	1	0	0			
1	1	0	0	1			
1	0	1	1	0			
1	1	1	0	0			

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

A ^ (B v ┐B => ┐C)

Постройте таблицу истинности

A	B	C	┐B	┐C	B v ┐B (1)	(1) => ┐C	A ^(Bv┐B=>┐C)
0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	0	1		
0	1	0	0	1	1		
1	0	0	1	1	1		
0	1	1	0	0	1		
1	1	0	0	1	1		
1	0	1	1	0	1		
1	1	1	0	0	1		

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

A ^ (B v ┐B => ┐C)

Постройте таблицу истинности

A	B	C	┐B	┐C	B v ┐B (1)	(1) => ┐C	A ^(Bv┐B=>┐C)
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	1	0	1	0	
0	1	0	0	1	1	1	
1	0	0	1	1	1	1	
0	1	1	0	0	1	0	
1	1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	1	0	

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

A ^ (B v ┐B => ┐C)

Постройте таблицу истинности

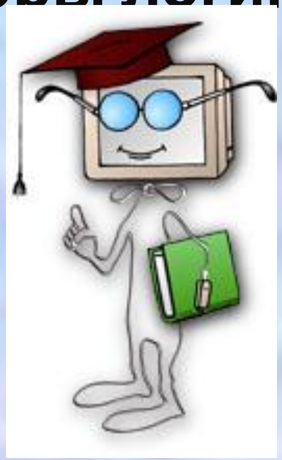
A	B	C	┐B	┐C	B v ┐B (1)	(1) => ┐C	A ^(Bv┐B=>┐C)
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Логические законы и правила преобразования логических выражени

При решении многих логических задач часто приходится упрощать формулы, полученные при формализации их условий.

Упрощение формул в алгебре высказываний производится на основе эквивалентных преобразований, опирающихся на основные логические законы.

Законы алгебры высказываний (алгебры логики) - это тафтологии



тавтология

всегда истинное выражение

Например, докажем, что

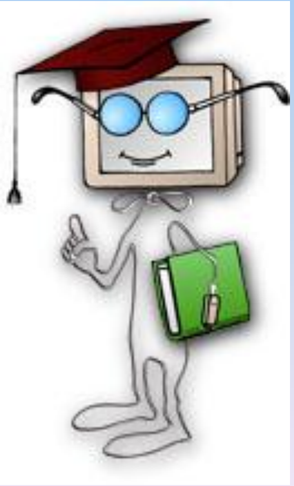
$$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$$

является тавтологией

Закон тождества

В процессе определенного рассуждения всякое понятие и суждение должны быть тождественны самим себе

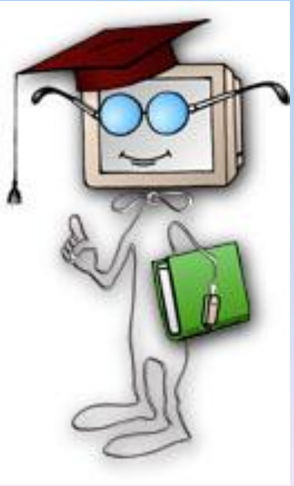
$$A \equiv A$$



Закон противоречия

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание *А* — истинно, то его отрицание *не А* должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно

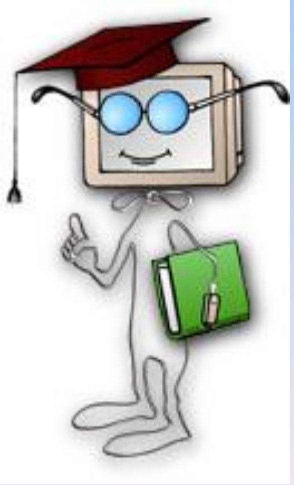
$$\neg A \wedge A = 0$$



Закон исключенного третьего

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение истина

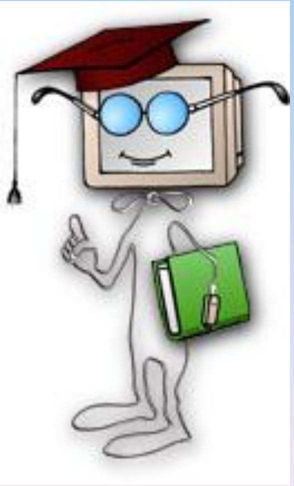
$$\neg A \vee A = 1$$



Закон двойного отрицания

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание

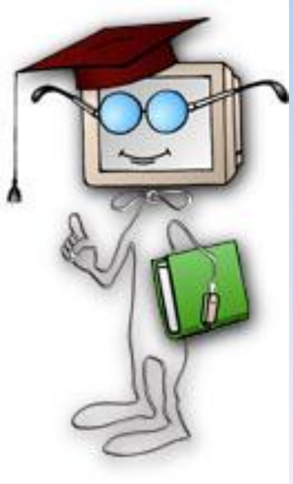
$$\neg\neg A = A$$



Законы Моргана

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

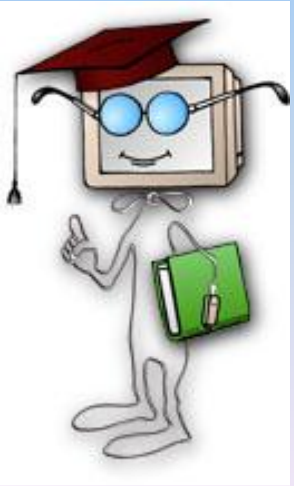
$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$



Правило коммутативности.

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$



В алгебре:

$ab = ba$

$a + b = b + a$

Правило ассоциативности

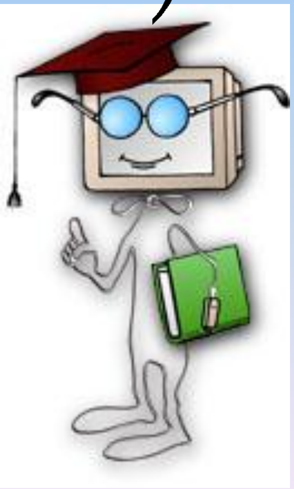
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

В алгебре:

$(ab)c = a(bc)$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

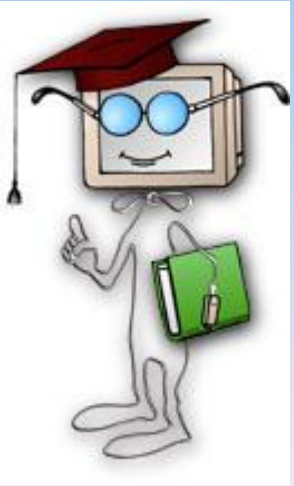


Правило дистрибутивности

$$A \wedge \left(B \vee C\right) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

В алгебре:

a(b+c)=ab+ac



ПОДУМАЙ

$$A \vee 1 = ?$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 1 = ?$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge 0 = ?$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee 0 = ?$$

$$A \vee 0 = A$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ

Упростить логическое выражение

(A &. B) v (A & ¬B)

$\boxed{= A}$

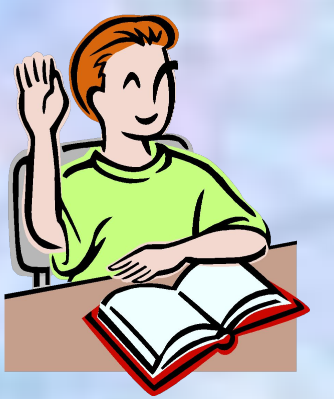
Попробуйте привлечь на помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge B$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить логическое выражение:

$$\overline{x \vee y} \wedge \left(x \wedge \overline{y}\right)$$

$$\boxed{= 0}$$

Попробуйте привлечь на помощь алгебру.

$$\neg\left(A \vee B\right) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\left(A \wedge B\right) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge \left(B \vee C\right) = A \wedge B \vee A \wedge B$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ

Упростить логическое выражение:

$$\overline{x} \& y \vee \overline{x \vee y} \vee x$$

$\boxed{= 1}$

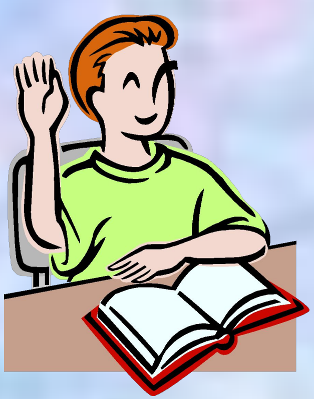
Попробуйте привлечь на помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge B$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить логическое выражение:

$$(x \vee y) \& (\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y})$$

$$\boxed{= y \& \bar{x}}$$

Попробуйте привлечь на помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge B$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ

Упростить логическое выражение:

$$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge z$$

$$\boxed{= x \wedge \bar{y} \vee y \wedge z}$$

Попробуйте привлечь на помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge B$$

Подсказка: последнее слагаемое домножить на единицу, т.е. на $(\bar{y}+y)$

РЕШИМ ЗАДАЧИ

Упростить логическое выражение:

$$\overline{x \,\&\, y \vee \overline{z}}$$

$$\boxed{= \left(\overline{x} \vee \overline{y}\right) \& \, z}$$

Попробуйте привлечь на помощь алгебру.

$$\neg\left(A \vee B\right) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\left(A \wedge B\right) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge \left(B \vee C\right) = A \wedge B \vee A \wedge B$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ

Упростить логическое выражение:

$$x \wedge y \vee x \wedge y \wedge z \vee x \wedge z \wedge p$$

$$\boxed{= x \wedge \left(y \vee p\right)}$$

Попробуйте привлечь на помощь алгебру.

$$\neg\left(A \vee B\right) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\left(A \wedge B\right) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge \left(B \vee C\right) = A \wedge B \vee A \wedge B$$

Связка	Название	Обозначение	Высказывание, получаемое с помощью связки	Математическая запись сложного высказывания
И	Конъюнкция	&, $\wedge$, $\cdot$	A и B	$A \& B$, $A \wedge B$, $A \cdot B$
Или	Дизъюнкция	$\vee$, $+$	A или B	$A \vee B$, $A + B$
Не	Отрицание, инверсия	$\neg$, $\overline{}$	не A	$\neg A$, $\overline{A}$
Если ..., то	Импликация	$\to$, $\Rightarrow$	если A, то B	$A \to B$, $A \Rightarrow B$
Либо ..., либо	Исключающее ИЛИ, неравнозначность	$\oplus$, Δ	либо A, либо B	$A \oplus B$, $A \Delta B$
...тогда и только тогда, когда... ...необходимо и достаточно...	Эквивалентность, равнозначность	$\Leftrightarrow$, $\sim$, $\equiv$	A тогда и только тогда, когда B. Для того чтобы A необходимо и достаточно, чтобы B	$A \Leftrightarrow B$, $A \sim B$, $A \equiv B$

Кроссворд

По горизонтали:

2.Мысль, в которой что-либо утверждается или отрицается.

5. Это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

6. Логическое умножение.

7. Логическое сложение.

9. Форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного предмета или класса однородных предметов.

10. Наука о законах и формах мышления.

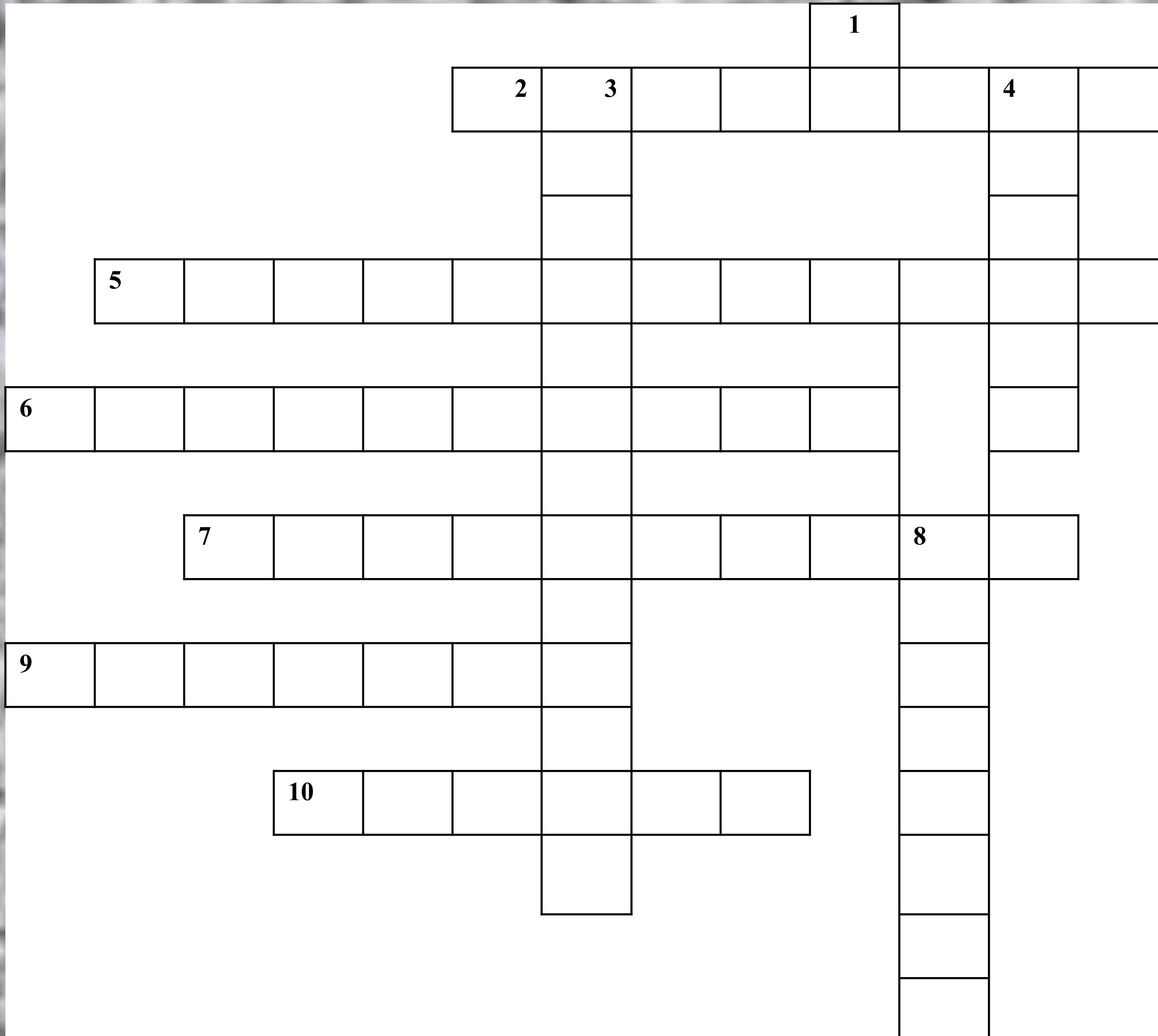
По вертикали:

1. Частица, используемая для образования сложного высказывания.

3. Прием мышления, посредством которого из исходного знания получается новое знание.

4. Одно из двух возможных значений, которые могут принимать логические формулы.

8. Отрицание.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

									[1]н			
					[2]с	[3]у	ж	д	е	н	[4]и	е
						м					с	
						о					т	
	[5]в	ы	с	к	а	з	ы	в	а	н	и	е
						а					н	
[6]к	о	н	ъ	ю	н	к	ц	и	я		а	
						л						
		[7]д	и	з	ъ	ю	н	к	ц	[8]и	я	
						ч				н		
[9]п	о	н	я	т	и	е				в		
						н				е		
			[10]л	о	г	и	к	а		Р		
						е				с		
										и		
										я		

Подведение итогов урока

Произнесите определения основных новых понятий

Домашнее задание

Уровень знания: выучить основные определения, знать обозначения.

Уровень понимания:

Выделите в составных высказываниях простые. Обозначьте каждое их них буквой; запишите с помощью логических операций каждое составное высказывание.

1) Число 376 четное и трехзначное.
2) Неверно, что делится на 3, то число делится на 3
4) Число 15 делится на Солнце движется вокруг Земли.
3) Если сумма цифр числа 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа 15 делится на 3

Упростить логическое выражение:

Пример 1. **(A ∨ B) & (A ∨ ¬B).**

Пример 2. **A & B ∨ A & ¬B.**

Пример 3. **¬(¬ X ∨ ¬ У).**

Рефлексия

Метод «КЛЮЧЕВОЕ СЛОВО».

Поочередно назовите вслух свое ключевое слово,

лишь одно слово, с которым ассоциируются содержание (или оценка) состоявшегося дела, взаимодействия и его результата.

Об авторе

Ханбикова Алсу Эмирзяновна, учитель информатики МОУ «Убеевская средняя школа Дрожжановского муниципального района РТ»