

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАН ИЙ

- Изучить основные понятия алгебры высказываний.
- Познакомиться с основными логическими операциями.
- Научиться строить таблицы истинности основных логических операций
- Рассмотреть базовые логические законы и правила преобразования логических выражений

Алгебра логики (*алгебра высказываний*)

- раздел математической логики, изучающий строение (форму, структуру) сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов .

В ОСНОВЕ

математики



число,
переменная

ЛОГИКИ



высказывание
(логическая переменная)



Логическое высказывание

**Высказывание- это форма мышления,
в которой что-либо утверждается или отрицается о
свойствах реальных предметов и отношениях
между ними.**

**Высказывание строится на основе понятий и по
форме является повествовательным
предложением.**

Так, например, предложение
" *Трава зеленая* " следует считать
**высказыванием, так как оно
истинное.**

Предложение **" *Лев - птица* "** тоже
**высказывание, так как оно
ложное.**



***. Не всякое предложение
является логическим
высказыванием.***

Высказываниями не являются,
например, предложения
***"ученик десятого класса" и
"информатика — интересный
предмет".***



**Высказывания,
образованные из других
высказываний с помощью
логических связок, называются**
составными.

**Высказывания,
не являющиеся составными,
называются**
элементарными.



**В алгебре высказываний
высказывания
обозначаются именами
логических переменных,
которые могут принимать
лишь два значения:**

Употребляемые в обычной речи
слова и словосочетания
*"не", "и", "или", "если... , то",
"тогда и только тогда"*
и другие позволяют из уже
заданных высказываний строить
новые высказывания.

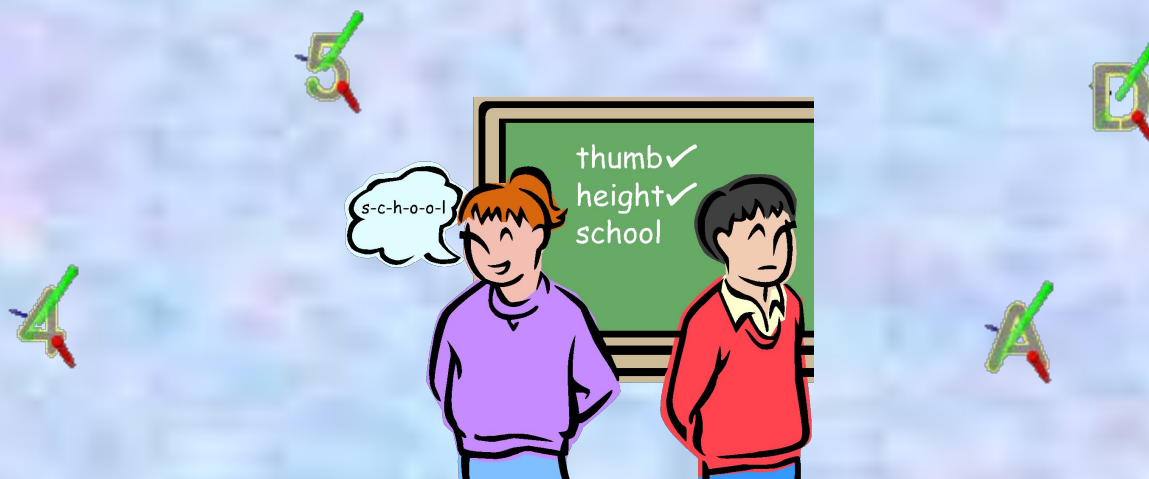
Такие слова и словосочетания
называются

логическими связками.

Над числами и переменными мы производим
арифметические действия

Над переменными алгебраические
преобразования

Над высказываниями (логическими переменными)
мы можем производить **логические операции.**



Логическая операция

способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором значение истинности сложного высказывания полностью определяется значениями истинности исходных высказываний.

Логическое умножение

Объединение двух или нескольких высказываний в одно с помощью союза «И» называется операцией логического умножения или конъюнкцией.

КОНЪЮНКЦИЯ

Составное высказывание, образованное в результате операции логического умножения (конъюнкции), истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

КОНЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЯЕТ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С
ПОМОЩЬЮ СОЮЗА

В прямоугольнике противоположные стороны равны **и** параллельны

В прямоугольнике противоположные стороны равны **и** пересекаются

КОНЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

A	B	$F = A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическое сложение

Объединение двух или нескольких высказываний с помощью союза **«ИЛИ»** называется операцией логического сложения или дизъюнкцией.

ДИЗЪЮНКЦИЯ

Составное высказывание, образованное в результате операции логического сложения (дизъюнкции), истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

ДИЗЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЯЕТ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ
СОЮЗА

Все положительные числа больше отрицательных **или** больше 0

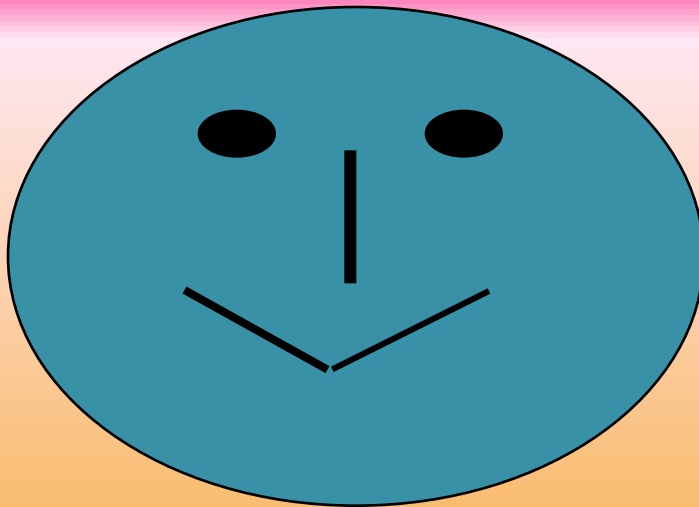
Все положительные числа больше 1 **или** больше нуля

ДИЗЪЮНКЦИЯ

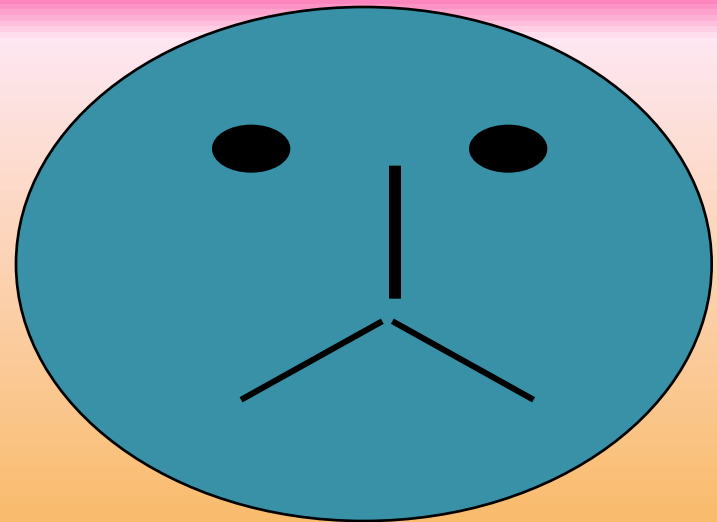
ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

A	B	$F = A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

«Мнемоническое правило»



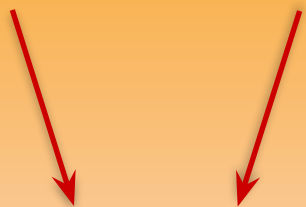
Логическое сложение



*Логическое
умножение*

ЗАПОМНИ!

ДИЗЪЮНКЦИЯ



ИЛИ



V



ДИЗ – галочка вниз

КОНЪЮНКЦИЯ



И



Л



КОН – как крыша он

Логическое отрицание

Присоединение частицы «**не**» к высказываниям называется операцией логического отрицания или инверсией.

Инверсия

**Логическое отрицание
(инверсия) делает
истинное высказывание
ложным и, наоборот,
ложное-истинным.**

ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

ОПРЕДЕЛЯЕТ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЧАСТИЦЫ

A - «На улице идет дождь»

Тогда $\neg A$ - «На улице нет дождя»
 \bar{A} -

ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

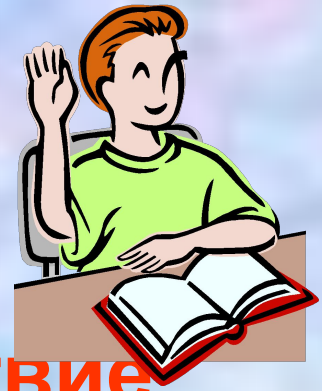
A	$\neg A$
0	1
1	0

ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

Определите значение логического выражения (0 или 1):

- а) $\neg A$, если A – «число 6 – четное»
- б) $\neg A$, если A – «Петр I – не был императором»
- в) $\neg A$, если A – «металлы проводят ток»
- г) $\neg A$, если A – «Москва – столица России»
- д) $\neg A$, если A – «идет второй урок»

РЕШИМ ЗАДАЧИ



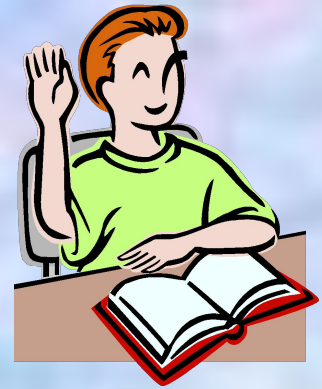
Обратите внимание на присутствие
скобок!

Последовательность выполнения операций в логических формулах определяется старшинством операций. В порядке убывания старшинства, логические операции расположены так:

отрицание, конъюнкция, дизъюнкция.

Кроме того, на порядок операции влияют скобки, которые можно использовать в логических формулах.

РЕШИМ ЗАДАЧИ



определите, в каком порядке необходимо
вычислять значение логического выражения:

$\neg A \& \neg B$

$A \& (B \& C)$

$(A \& B) \vee (C \& \neg D)$

$A \vee \neg D \vee B$

$A \wedge B \wedge \neg A$

ИМПЛИКАЦИЯ

Составное высказывание, образованное с помощью операции логического следования (импликации), ложно тогда и только тогда, когда из истинной предпосылки (первого высказывания) следует ложный вывод. (второе высказывание).

ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

условие \Rightarrow *следствие*

ЕСЛИ, ... *ТО ...*

Если будет дождь, то мы не пойдём на улицу.

Если я поленюсь, то получу двойку.

Если на траве роса, то скоро настанет вечер.

ИМПЛИКАЦИЯ

(логическое следование)

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

**Составное высказывание,
образованное с помощью
логической операции
(эквивалентности), истинно тогда и
только тогда, когда оба
высказывания одновременно
либо ложны, либо истинны.**

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность)

условие $\langle \Rightarrow \rangle$ *условие*

сравниваем условия

Чайник греет воду тогда и только тогда, когда он включен.

Мы дышим воздухом тогда и только тогда, когда гуляем в парке.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B.$$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \longleftrightarrow B = (A \vee B) \cdot (B \vee A).$$

Таблица истинности

Таблицу, показывающую, какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний, называют *таблицей истинности* составного высказывания.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

1. Необходимо определить количество строк в таблице истинности.
 - количество строк = 2^n , где n – количество логических переменных
2. Необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.
3. Необходимо построить таблицу истинности с указанным количеством строк и столбцов, ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;
4. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений
5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

1. Необходимо определить количество строк в таблице истинности.
 - количество строк = 2^n , где n – количество логических переменных

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

2. Необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

3. Необходимо ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

4. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \& (A \vee B)$

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

4. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \& (A \vee B)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \& (A \vee B)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \& (A \vee B)$
0	0	0		
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1		

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \& (A \vee B)$
0	0	0	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
1	1	1	1	

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$F = (A \wedge B) \& (A \vee B)$$

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \& (A \vee B)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$ Постройте таблицу истинности

1. Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении:

1) Инверсия

2) Конъюнкция

3) Дизъюнкция

4) Импликация

5) Эквивалентность

таблице истинности.

о логических переменных

в в таблице истинности,
енных плюс количество

указанным количеством
таблицы в соответствии с
их операций с учетом

борами значений

столбцам, выполняя

логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$$

Постройте таблицу истинности

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee \neg B$ (1)	(1) $\Rightarrow \neg C$	$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
1	0	0					
0	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	1	1					

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$$

Постройте таблицу истинности

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee \neg B$ (1)	(1) $\Rightarrow \neg C$	$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$
0	0	0	1				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
1	1	0	0				
1	0	1	1				
1	1	1	0				

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$$

Постройте таблицу истинности

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee \neg B$ (1)	$(1) \Rightarrow \neg C$	$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$
0	0	0	1	1			
0	0	1	1	0			
0	1	0	0	1			
1	0	0	1	1			
0	1	1	0	0			
1	1	0	0	1			
1	0	1	1	0			
1	1	1	0	0			

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$$

Постройте таблицу истинности

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee \neg B$ (1)	(1) $\Rightarrow \neg C$	$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$
0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	0	1		
0	1	0	0	1	1		
1	0	0	1	1	1		
0	1	1	0	0	1		
1	1	0	0	1	1		
1	0	1	1	0	1		
1	1	1	0	0	1		

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$$

Постройте таблицу истинности


A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee \neg B$ (1)	(1) $\Rightarrow \neg C$	$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	1	0	1	0	
0	1	0	0	1	1	1	
1	0	0	1	1	1	1	
0	1	1	0	0	1	0	
1	1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	1	0	

Учимся составлять таблицу истинности сложных выражений

$$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$$

Постройте таблицу истинности

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee \neg B$ (1)	(1) $\Rightarrow \neg C$	$A \wedge (B \vee \neg B \Rightarrow \neg C)$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0



ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ЗАКОНЫ И ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТА

При решении многих логических задач часто приходится упрощать формулы, полученные при формализации их условий.

Упрощение формул в алгебре высказываний производится на основе эквивалентных преобразований, опирающихся на основные логические законы.

Законы алгебры высказываний (алгебры логики) - это тафтологии



ТАВТОЛОГИЯ

всегда истинное выражение

Например, докажем, что

$$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$$

является тавтологией

Закон тождества

В процессе определенного рассуждения
всякое понятие и суждение должны
быть тождественны самим себе

$$A \equiv A$$



Закон противоречия

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание A — истинно, то его отрицание *не* A должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно

$$\neg A \wedge A = 0$$



Закон исключенного третьего

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение истина

$$\neg A \vee A = 1$$



Закон двойного отрицания

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание

$$\neg\neg A = A$$



Законы Моргана

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$



Правило коммутативности.

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

В алгебре:

$$ab=ba$$

$$a+b = b+a$$



Правило ассоциативности

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

В алгебре:

$$(ab)c = a(bc)$$

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$



Правило дистрибутивности

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

В алгебре:

$$a(b+c) = ab+ac$$



ПОДУМАЙ

$$A \vee 1 = ?$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 1 = ?$$

$$A \wedge 1 = A$$

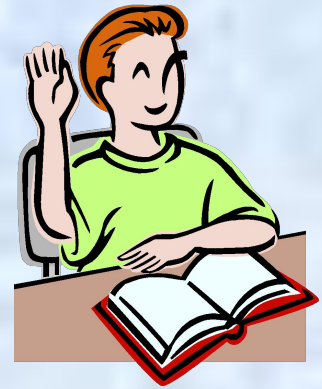
$$A \wedge 0 = ?$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee 0 = ?$$

$$A \vee 0 = A$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить
логическое
выражение

$$(A \& B) \vee (A \& \neg B)$$

$$= A$$

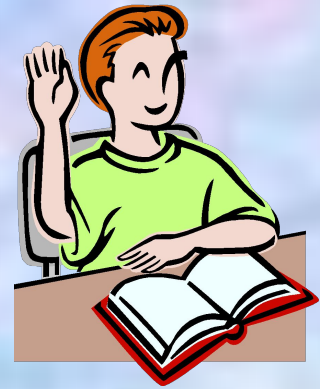
Попробуйте привлечь на
помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить
логическое
выражение:

$$\overline{x \vee y} \wedge (x \wedge \overline{y})$$

$$= 0$$

Попробуйте привлечь на
помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить
логическое
выражение:

$$\overline{x \& y} \vee \overline{x \vee y} \vee x$$

$$= 1$$

Попробуйте привлечь на
помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить
логическое
выражение:

$$(x \vee y) \& (\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y})$$
$$= y \& \bar{x}$$

Попробуйте привлечь на
помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить
логическое
выражение:

$$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge z$$

$$= x \wedge \bar{y} \vee y \wedge z$$

Попробуйте привлечь на
помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

Подсказка: последнее слагаемое
домножить на единицу, т.е. на $(y \vee \bar{y})$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить
логическое
выражение:

$$\overline{x \& y \vee z}$$

$$= (\overline{x} \vee \overline{y}) \& z$$

Попробуйте привлечь на
помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

РЕШИМ ЗАДАЧИ



Упростить
логическое
выражение:

$$x \wedge y \vee x \wedge y \wedge z \vee x \wedge z \wedge p$$

$$= x \wedge (y \vee p)$$

Попробуйте привлечь на
помощь алгебру.

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$$

Связка	Название	Обозначение	Высказывание, получаемое с помощью связки	Математическая запись сложного высказывания
И	Конъюнкция	$\&, \wedge, \cdot$	A и B	$A \& B, A \wedge B, A \cdot B$
Или	Дизъюнкция	$\vee, +$	A или B	$A \vee B, A + B$
Не	Отрицание, инверсия	$\neg, \bar{}$	не A	$\neg A, \bar{A}$
Если ..., то	Импликация	\rightarrow, \Rightarrow	если A , то B	$A \rightarrow B, A \Rightarrow B$
Либо ..., либо	Исключающее ИЛИ, неравнозначность	\oplus, Δ	либо A , либо B	$A \oplus B, A \Delta B$
...тогда и только тогда, когда... ...необходимо и достаточно...	Эквивалентность, равнозначность	$\Leftrightarrow, \sim, \equiv$	A тогда и только тогда, когда B . Для того чтобы A необходимо и достаточно, чтобы B	$A \Leftrightarrow B, A \sim B, A \equiv B$

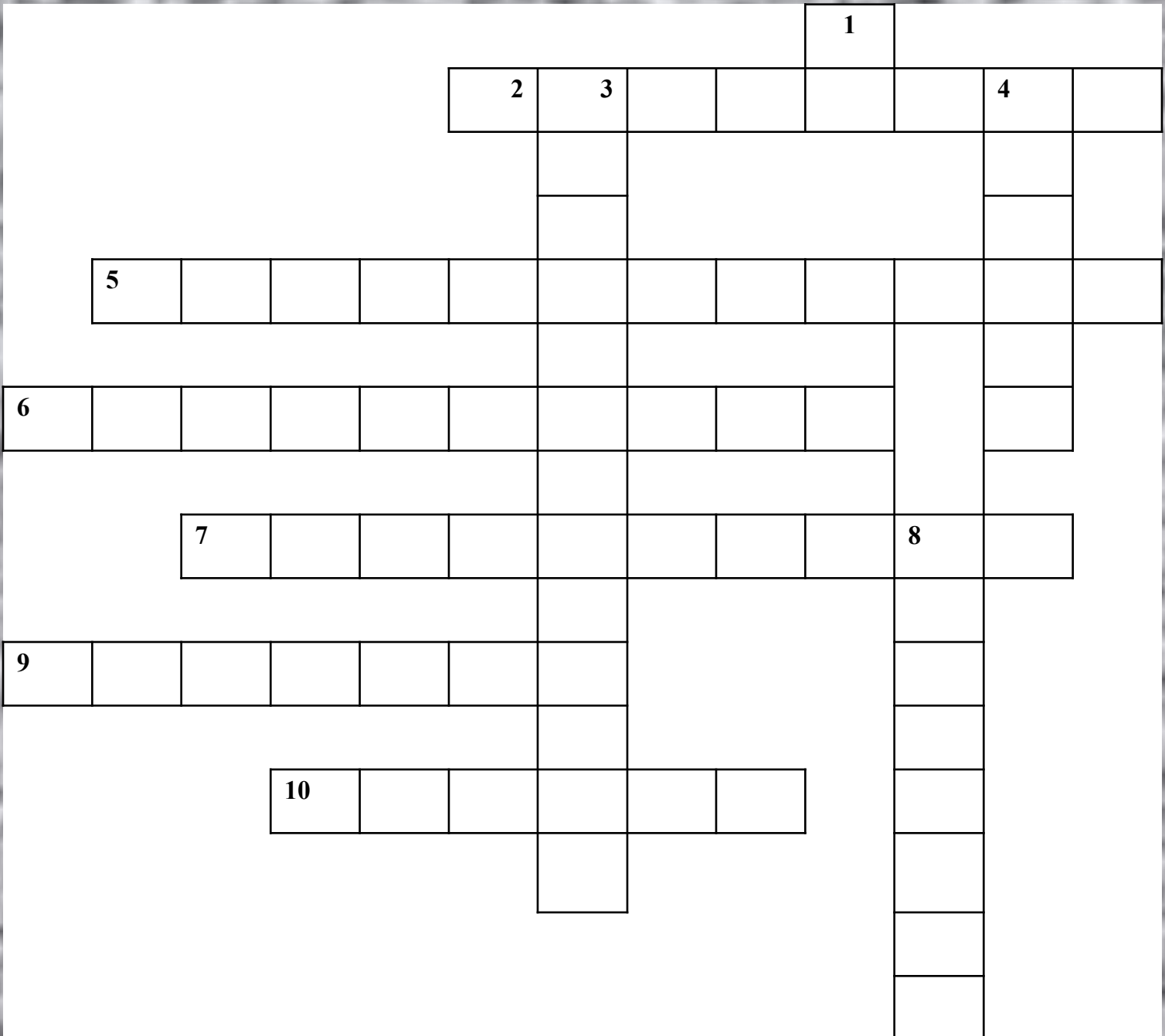
Кроссворд

По горизонтали:

2. Мысль, в которой что-либо утверждается или отрицается.
5. Это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.
6. Логическое умножение.
7. Логическое сложение.
9. Форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного предмета или класса однородных предметов.
10. Наука о законах и формах мышления.

По вертикали:

1. Частица, используемая для образования сложного высказывания.
3. Прием мышления, посредством которого из исходного знания получается новое знание.
4. Одно из двух возможных значений, которые могут принимать логические формулы.
8. Отрицание.



Подведение итогов
урока
Произнесите
определения
основных новых
понятий

Домашнее задание

Уровень знания: выучить основные определения, знать обозначения.

Уровень понимания:

Выделите в составных высказываниях простые. Обозначьте каждое из них буквой; запишите с помощью логических операций каждое составное высказывание.

- 1) Число 376 четное и трехзначное.
- 2) Неверно, что делится на 3, то число делится на 3
- 4) Число 15 делится на Солнце движется вокруг Земли.
- 3) Если сумма цифр числа 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа 15 делится на 3

**Упростить логическое
выражение:**

Пример 1. $(A \vee B) \& (A \vee$

Пример 2. $\neg A \& B \vee A \&$

Пример 3. $\neg B \cdot (\neg X \vee \neg Y).$

Рефлексия

Метод **«КЛЮЧЕВОЕ СЛОВО»**.

Поочередно назовите вслух свое
ключевое слово,

лишь одно слово, с которым
ассоциируются содержание (или
оценка) состоявшегося дела,
взаимодействия и его результата.

Об авторе

**Ханбикова Алсу
Эмирзяновна, учитель
информатики
МОУ «Убеевская средняя
школа Дрожжановского
муниципального района
РТ»**

