Тема Теория игр

1 Основные понятия теории игр

2 Классификация игр

3 Формальное представление игр

4 Решение матричных игр в чистых стратегиях

5 Решение матричных игр в смешанных стратегиях

6 Игры с природой

1 Основные понятия теории игр

Всякая претендующая на адекватность математическая модель социально-экономического явления должна отражать при сущие ему черты *конфликта,* т.е. описывать:

а) множество заинтересованных сторон, именуемых *игроками ;*

б) возможные действия каждой из сторон, именуемые также *стратегиями или ходами;*

в) интересы сторон, представленные *функциями выигрыша (платежа)* для каждого из игроков.

Теория игр впервые была систематически изложена Дж.фон Нейманом и О. Моргенштерном в 1944 г.

Формализация содержательного описания конфликта представляет собой его математическую модель, которую называют *игрой.*

2 Классификация игр

1. В <u>зависимости от числа игроков</u> различают игры с двумя, тремя и более участниками. В принципе возможны также игры с бесконечным числом игроков.
2. <u>По количеству стратегий</u> - различают конечные, и бесконечные игры.

В *конечных* играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий. Сами стратегии в конечных играх нередко называются *чистыми* стратегиями (смешанная стратегия в которой все компоненты кроме одной равны 0).

Соответственно, в *бесконечных* играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий

3 По <u>свойствам функций</u> выигрыша (платежных функций) различают:

- *игры с нулевой суммой* - когда выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого (*антагонистическая* игра)
- игры *с постоянной разностью,* в которых игроки и выигрывают, и проигрывают одновременно, так что им выгодно действовать сообща.
- игры *с ненулевой суммой,* где имеются и конфликты, и согласованные действия игроков.

4 от <u>возможности предварительных переговоров</u> между игроками различают

- Кооперативные игры.

Игра называется *кооперативной,* если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях

- Некооперативные игры.

Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется *некооперативной.*

3 Формальное представление игр

- Множество всех *игроков,* обозначаемое I, в случае конечного их числа может задаваться простым перечислением игроков
- Множество *стратегий* игрока i обозначим через X_i
- В каждой партии игрок выбирает некоторую свою стратегию $x_i \in X_i$ в результате чего складывается набор стратегий $x = \{x_1, x_2, .., x_n\}$, называемый *ситуацией.*

- Заинтересованность игроков в ситуациях проявляется в том, что каждому игроку *i* в каждой ситуации *x* приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в данной ситуации. Это число называется *выигрышем* игрока *i* и обозначается через *hi(x),* а соответствие между набором ситуаций и выигрышем игрока i называется *функцией выигрыша (платежной функцией)* этого игрока *Hi*

- В случае конечной игры двух лиц функции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде *матрицы выигрышей,* где строки представляют стратегии одного игрока, столбцы - стратегии другого игрока, а в клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков в каждой из образующихся ситуаций.

Орел или Решка

		Стратегии 2-го игрока	
		Орел	Решка
Стратегии 1-го игрока	Орел	1	-1
	Решка	-1	1

		Стратегии 2-го игрока	
		Орел	Решка
Стратегии 1-го игрока	Орел	-1	1
	Решка	1	-1

		Стратегии 2-го игрока	
		Орел	Решка
Стратегии 1-го игрока	Орел	1;-1	-1;1
	Решка	-1;1	1;-1

Дилемма Заключенного

		Стратегии 2-го игрока	
		сознаваться	не сознаваться
Стратегии 1-го игрока	сознаваться	5;5	0;10
	не сознаваться	10;0	1;1

Бесконечная игра

Если функцию спроса в зависимости от цены на товар обозначить как *d(p),* то функция выигрыша 1-й фирмы П1(p1,p2) будет им

$$П1(p1, p2) = \begin{cases} p1d(p1), \text{ если } p1 < p2 \\ p1\dfrac{d(p1)}{2}, \text{ если } p1 = p2 \\ 0, \text{ если } p1 > p2 \end{cases}$$

Аналогично выглядит функция выигрыша 2-й фирмы П2(p1,p2)

4 Решение матричных игр в чистых стратегиях

Оптимальная стратегия Игрока 1, которая обеспечит ему наибольший из возможных вы $\max_i \min_j h_{ij}$.

Это значение называется *нижней ценой игры – α*. Данная стратегия называется максиминной.

Игрок 2 выберет *j*-ю (минимаксную) $\min_j \max_i h_{ij}$.

Это значение называется называемого *верхней ценой игры– β.*

В итоге, если Игрок 1 придерживается избранной стратегии (называемой *максиминной* стратегией), его выигрыш в любом случае составит

$$h_{ij} \geq \max_i \min_j h_{ij}.$$

Соответственно, если Игрок 2 придерживается своей *минимаксной стратегии,* его проигрыш будет

$$h_{ij} \leq \min_j \max_i h_{ij}.$$

Пример

Ai	Bj				αi
	B1	B2	B3	B4	
A1	4	2	3	2	2
A2	6	1	-1	-3	-3
A3	9	-2	-5	1	-5
βj	9	2	3	2	

α = **max** αi = **max** (2; -3; -5) = 2

β **= min**βj**; = min** (9; 2; 3; 2) = 2, так что $v = \alpha = \beta = 2$

5 Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Смешанной стратегией игрока называется полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей. Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры: $h_н \le V \le h_в$.

При этом условии величина V называется *ценой игры*.

Для игр без седловых точек оптимальные стратегии игроков находятся в области смешанных стратегий.

Смешанной стратегией игрока А называют вектор $\overline{p} = (p_1, p_2 \dots, p_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \ge 0 \quad (i = \overline{1, m})$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Смешанной стратегией игрока В называют вектор $\overline{q} = (q_1, q_2 \dots, q_n)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $q_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n})$; $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

p_i и q_j - вероятности, с которыми игроки А и В выбирают свои чистые стратегии A_i и B_j в ходе игры.

При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайной становится и величина выигрыша игрока А (проигрыша игрока В). Эта величина является функцией смешанных стратегий $\overline{p}$ и $\overline{q}$ и определяется по формуле $f(\overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$.

Функцию $f(\bar{p},\bar{q})$ называют функцией выигрыша или платежной функцией.

Смешанные стратегии называются оптимальными, если они образуют седловую точку для платежной функции $f(\bar{p},\bar{q})$, т.е. если они удовлетворяют неравенству $f(\bar{p},\bar{q}^*)\le f(\bar{p}^*,\bar{q}^*)\le f(\bar{p}^*,\bar{q})$.

Величину $f(\bar{p}^*,\bar{q}^*)=v$ называют ценой игры.

Сведение решения задачи в смешанных стратегиях к ЗЛП

Для первого игрока:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/v \\ x_1 \geq 0 : x_2 \geq 0 \ldots x_m \geq 0 \end{cases}$$

min Z=min 1/V=min ($x_1 + x_2 + \ldots + x_m$).

Для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq 1 \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1 \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/V \\ y_1 \geq 0 : y_2 \geq 0 \ldots y_n \geq 0 \end{cases}$$

max Z=max 1/V=max ($y_1 + y_2 + \ldots + y_n$).

Где x_i равно p_i/V, а q_j/V – y_j.

Пример

Ai	Bj		αi
	B1	B2	
A1	2	9	2
A2	6	3	3
Bj	6	9	

$\alpha = 3, \quad \beta=6$

Для первого игрока:

$2x1+6x2 \geq 1$

$9x1+3x2 \geq 1$

$minZ=x1+x2$

Для второго игрока:

$2y1+9y2 \leq 1$

$6y1+3y2 \leq 1$

$maxZ=y1+y2$

Для первого игрока:

$2x1+6x2\geq1$

$9x1+3x2\geq1$

minZ=x1+x2

	x1	x2	
	0,0625	0,145833	
Z	0,208333		
	1	1	
	1	1	
V	4,8		V=1/Z
p1	0,3		p1=V*x1
p2	0,7		p2=V*x2

Для второго игрока:

$2y1+9y2\leq1$

$6y1+3y2\leq1$

maxZ=y1+y2

	y1	y2	
	0,125	0,083333	
Z	0,208333		
	1	1	
	1	1	
V	4,8		V=1/Z
q1	0,6		q1=V*y1
q2	0,4		q2=V*y2

6 Игры с природой

Если вероятности q_j состояний $П_j$ природы известны, то пользуются *критерием Байеса,* в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ игрока A, т. е. обеспечивается

$$\max_i \bar{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j .$$

Если игроку A представляются в равной мере правдоподобными все состояния $П_j$ природы, то иногда полагают $q_1 = \ldots = q_n = 1/n$ и, учитывая "принцип недостаточного основания" *Лапласа*, оптимальной считают чистую стратегию A_i, обеспечивающую

$$\max_i \bar{a}_i = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} .$$

Оптимальной по *критерию Вальда* считается чистая стратегия A_i, при которой наименьший выигрыш игрока A будет максимальным, т.е. ему обеспечивается $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

Оптимальной по *критерию Гурвица* считается чистая стратегия A_i, найденная из условия

$$\max_i (\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij}),$$

где γ принадлежит интервалу (0; 1) и выбирается из субъективных соображений. При $\gamma=1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\gamma = 0$ — в критерий крайнего оптимизма.

Оптимальной по *критерию Сэвиджа* считается та чистая стратегия A_i, при которой минимизируется величина r_{ij} максимального риска, т. е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$. Таким образом, критерий Сэвиджа советует ориентироваться не на выигрыш, а на риск. Это тоже критерий крайнего пессимизма, но здесь пессимизм понимается в ином свете: рекомендуется всячески избегать большого риска при принятии решения.

Для определения оптимальной стратегии по данному критерию на основе платёжной матрицы рассчитывается матрица рисков, каждый коэффициент которой (r_{ij}) определяется по формуле:

$$r_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

Пример

Задача. Небольшая частная фирма производит молочную продукцию. Один из ее продуктов — творожная масса. Необходимо решить, какое количество творожной массы следует производить в течение месяца, если вероятность того, что спрос составит 100, 150 или 200 кг равна соответственно 0,2; 0,5; 0,3. Затраты на производство 1 кг равны 1 тыс. ден. ед. Фирма продает массу по цене 1 тыс. 200 ден. ед. за 1 кг. Если масса не продается в течение месяца, то она снимается с реализации и фирма не получает дохода. Дать рекомендации, сколько творожной массы производить фирме.

$\gamma = 0{,}5$

	100	150	200
100	-100·1+100·1,2	-100·1+100·1,2	-100·1+100·1,2
150	-150·1+100·1,2	-150·1+150·1,2	-150·1+150·1,2
200	-200·1+100·1,2	-200·1+150·1,2	-200·1+200·1,2

	100	150	200
100	20	20	20
150	-30	30	30
200	-80	-20	40