КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

17.02.2022г.

Задание высылать не позднее **16:00 19.02.2022**г в личном сообщении в вк или на почту SHPAK.IRINA.S@yandex.ru

Перед каждым заданием в тетради пишем ФИО, дата, тема урока

После изучения темы «Комплексные числа студенты должны:

Знать:

- алгебраическую, геометрическую и тригонометрическую формы комплексного числа.

Уметь:

- производить над комплексными числами операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексного числа;
- переводить комплексные числа из алгебраической формы в геометрическую и тригонометрическую;
- пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;
- в простейших случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами.

I. Подготовка к изучению нового материала

КАКИЕ ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА ВАМ ЗНАКОМЫ?

$N \Rightarrow Z \Rightarrow Q \Rightarrow R$

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, Z	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, C	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

C_1) Существует квадратный корень из , т.е. существует комплексное число, квадрат которого равен .

C_2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

C_3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество C комплексных чисел.

МНИМЫЕ ЧИСЛА

***i* = -1, *i* – мнимая единица**

i, 2i, -0,3i — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием С3.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \qquad ai - bi = (a - b)i;$$

$$a(bi) = (ab)i; \qquad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где *a* и *b* — действительные числа.

Комплексные числа

Определение 1. **Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.**

$$z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R,$$

$$i - \textit{мнимая единица.}$$

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

Определение 2. **Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:**

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

Классификация комплексных чисел

Комплексные числа
a + bi

- **Действительные числа**
  b = o
  - **Рациональные числа**
  - **Иррациональные числа**
- **Мнимые числа**
  b ≠ o
  - **Мнимые числа с ненулевой действительной частью**
    a ≠ 0, b ≠ 0.
  - **Чисто мнимые числа**
    a = 0, b ≠ 0.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

СОПРЯЖЕННЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному.**

Если данное комплексное число обозначается буквой z, то сопряженное число обозначается $\overline{z}$:

$$z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.

Числа *a + bi* и *a - bi* *называются взаимно сопряженными комплексными числами.*

Свойства сопряженных чисел

1. Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a \qquad z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

СВОЙСТВА СОПРЯЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

5. Число, сопряженное *n*-ой степени комплексного числа z, равно *n*-ой степени числа, сопряженного к числу z, т.е.

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n, \quad n \in N$$

6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}}$$

СТЕПЕНИ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью – число -1:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1$$

Более высокие степени числа *i* находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -\cdot i^2 = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном *n*

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$
$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i.$$

На практике вместо полученной формулы используют следующий прием: умножают числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 2. Даны комплексные числа $10+8i,\ 1+i$. Найдем их сумму, разность, произведение и частное.

Решение.

а) $(10+8i)+(1+i)=(10+1)+(8+1)i=11+9i;$

б) $(10+8i)-(1+i)=(10-1)+(8-1)i=9+7i;$

в) $(10+8i)(1+i)=10+10i+8i+8i^2=2+18i;$

г) $$\frac{10+8i}{1+i}=\frac{(10+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{10-10i+8i-8i^2}{1-i^2}=\frac{18-2i}{2}=9-i.$$

содержание

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ.

- ***Определение***. Число *w* называют квадратным корнем из комплексного числа *z*, если его квадрат равен *z*: $w^2 = z$
- ***Теорема***. Пусть $z=a+bi$ – отличное от нуля комплексное число. Тогда существуют два взаимно противоположных комплексных числа, квадраты которых равны *z*. Если $b \neq 0$, то эти два числа выражаются формулой:

$$w = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \cdot signb\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], где$$

$$signb = \begin{cases} 1, если\, b > 0 \\ -1, если\, b < 0 \\ 0, если\, b = 0 \end{cases}$$

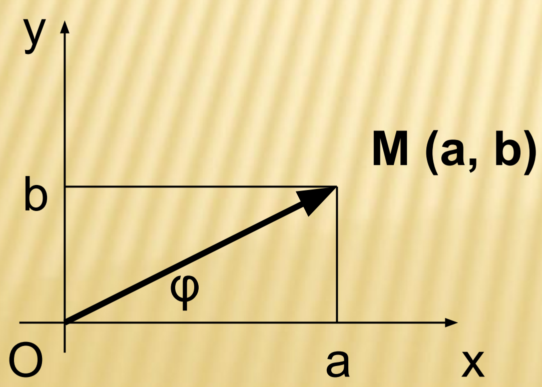
$$При\;\; b=0,\, a \geq 0\; имеем: w = \pm\sqrt{a}, при\; b=0,\, a < 0\; имеем: w = \pm i\sqrt{|a|}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка М(a, b).
Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы $\overrightarrow{OM}$

Определение: **Модулем** комплексного числа *z = a + bi* называют неотрицательное число $\sqrt{a^2+b^2}$, равное расстоянию от точки М до начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$



$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\varphi - аргумент \quad комплексного \quad числа$$

$$\varphi \in (-\pi;\pi]$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ, ЗАДАННЫХ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Теорема 1.
Если $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$ то:

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, *n* — любое целое число. Тогда

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Извлечение корня из комплексного числа.

- Теорема. Для любого натурального числа n и отличного от нуля комплексного числа z существуют n различных значений корня n-степени.

Если

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

то эти значения выражаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,1,\ldots,(n-1)$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!