

**Методика математического  
планирования эксперимента и  
анализа полученных результатов**

В данной работе применялись план **КОНО** второго порядка для двух факторов и план **БОКСа** второго порядка для трех факторов, которые позволили значительно сократить время проведения работы и повысить эффективность исследований.

Матрицы Д-оптимального плана обладают важными свойствами в отношении коэффициентов регрессионной модели и выходного параметра: ортогональностью, ротатабельностью и униформностью, и обеспечивают получение минимума обобщенной дисперсии, то есть минимума дисперсии всех коэффициентов регрессии (критерий  $S^2\{b\} \rightarrow \min$ ).

Свойство ортогональности обеспечивает независимость полученных коэффициентов регрессии  $b_i, b_{ij}$  математической модели второго порядка и возможность исключения членов модели с незначимыми коэффициентами без последующего пересчета значимых коэффициентов.

Свойство ротатабельности обеспечивает постоянство дисперсии выходного параметра на равных расстояниях от центра эксперимента.

Свойство униформности обеспечивает постоянство дисперсии выходного параметра в некоторой области эксперимента.

## Матрица планирования эксперимента КОНО-2

№	Кодированные значения	
	$X_1$	$X_2$
1	0	0
2	+1	+1
3	-1	+1
4	-1	-1
5	+1	-1
6	+1	0
7	0	+1
8	-1	0
9	0	-1

# Матрица планирования эксперимента БОКС-3

№	Кодированные значения		
	$X_1$	$X_2$	$X_3$
1	+	+	+
2	-	+	+
3	+	-	+
4	-	-	+
5	+	+	-
6	-	+	-
7	+	-	-
8	-	-	-
9	+	0	0
10	-	0	0
11	0	+	0
12	0	-	0
13	0	0	+
14	0	0	-

**Полиномиальное уравнение имеет общий вид:**

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{ij=1}^{ck} b_{ij} x_i x_j + \sum_{ijn=1}^{Mk} b_{ijn} x_i x_j x_n \quad (1)$$

где

$Y$  – расчетное значение критерия оптимизации,

$k$  – число факторов оптимизации,

$C_k$  – число сочетаний из двух факторов,

$M_k$  – число сочетаний из трех факторов,

$b_0$  – свободный член уравнения,

$b_i$  – линейные коэффициенты,

$b_{ij}$  – коэффициенты, характеризующие двойное взаимодействие факторов,

$b_{ijn}$  – коэффициенты, характеризующие тройное взаимодействие факторов,

$x_i, x_j, x_n$  – варьируемые факторы.

Для перехода от матрицы планирования к рабочей матрице используют соотношение, которое связывает кодированное значение факторов с натуральными:

$$X = \frac{x_i - x_{0i}}{I} \quad (2)$$

где  $X$  – кодированное значение  $i$ -го фактора;

$x_i$  – текущее натуральное значение  $i$ -го фактора,

$x_{0i}$  – натуральное значение  $i$ -го фактора на нулевом уровне,

$I$  – величина интервала варьирования  $i$ -го фактора в натуральных единицах.

Для случая, когда число факторов оптимизации равно двум, то есть для плана КОНО-2, уравнение (1) принимает вид:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 \quad (3)$$

Для случая, когда число факторов оптимизации равно трем, уравнение (1) принимает вид:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 \quad (4)$$

Определение коэффициентов регрессии проводится в следующей последовательности:

1) Нахождение среднего значения функции отклика по строкам:

$$Y_u = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i \quad (5)$$

2) Определение построчных дисперсий:

$$S_u^2 \{Y\} = \frac{1}{k(N - N_u + 1)} \sum_{i=1}^m (Y_i - Y_u)^2 \quad (6)$$

3) Проверка однородности дисперсий по критерию Кочрена, расчетное значение которого:

$$G_R = S_{u \max}^2 \{Y\} / \sum_{u=1}^N S_u^2 \{Y\} \quad (7)$$

Полученное значение сравнивается с табличным.

Если  $G_R < G_T$ , то гипотеза об однородности дисперсий не отвергается.

4) Оценка дисперсии воспроизводимости:

$$S^2 \{Y\} = \frac{1}{k(N - N_u + 1)} \sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^m (Y_i - Y_u)^2, \quad (8)$$

где  $N$  – число опытов в матрице.

5) Вычисление коэффициентов уравнения:

$$b_0 = g_1 \sum_{i=1}^N Y_u - g_2 \sum_{i=1}^m \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 Y_u \quad (9)$$

$$b_i = g_3 \sum_{u=1}^N x_{iu} Y_u \quad (10)$$

$$b_{ij} = g_4 \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} Y_u \quad (11)$$

$$b_{ii} = g_5 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 Y_u + g_6 \sum_{i=1}^m \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 Y_u - g_2 \sum_{u=1}^N Y_u \quad (12)$$

где

$Y_u$  – среднее экспериментальное значение критерия оптимизации,

$g_1 - g_6$  – постоянные коэффициенты.

6) Определение дисперсий коэффициентов регрессии:

$$S^2 \{b_0\} = g_1 S^2 \{Y\} \quad (13)$$

$$S^2 \{b_i\} = g_3 S^2 \{Y\} \quad (14)$$

$$S^2 \{b_{ij}\} = g_4 S^2 \{Y\} \quad (15)$$

$$S^2 \{b_{ii}\} = g_7 S^2 \{Y\} \quad (16)$$

Их ковариации:

$$\text{cov}\{b_0\} = g_2 S \{Y\} \quad (17)$$

$$\text{cov}\{b_{ii} b_{ij}\} = g_6 S \{Y\} \quad (18)$$

7) Расчет дисперсии адекватности:

$$S_{\text{ад}}^2 \{Y\} = \sum_{u=1}^N n(Y_u - Y_u)^2 / (N - Л) \quad (19)$$

где  $Y_u$  – расчетное значение критерия оптимизации,

Л – число коэффициентов регрессии:

$$Л = (k+2)(k+1)/2 \quad , \quad (20)$$

где  $k$  – число варьируемых факторов.

Например, для эксперимента, проводимого по матрице БОКС-3, Л=10.

8) Определение значимости коэффициентов регрессии с помощью критерия Стьюдента:

$$t_R\{b_i\} = |b_i| / S\{b_i\} > t_T \quad , \quad (21)$$

где  $t_T$  – табличное значение критерия Стьюдента.

9) Для проверки адекватности полученной регрессионной модели второго порядка используют критерий Фишера:

$$F_R = S_{ад}^2\{Y\} / S^2\{Y\} \quad (22)$$

Если  $F_R < F_T$ , то модель считается адекватной с выбранной доверительной вероятностью.

Полученные в результате расчетов конкретные уравнения регрессии оценивались аналитически и графически в виде поверхностей отклика.