ЛЕКЦИЯ 4

Соответствия между множествами. Отображения

Задание:

1. Изучить новый материал
2. Записать конспект

Основные понятия.

Пусть даны два множества А=\{a_1, a_2,...\} и В=\{b_1, b_2,...\}. Тогда пары (a_i, b_j) задают *соответствие* *между множествами А и В, если указано правило R, по которому для элемента a_i множества А выбирается элемент b_j из множества В.*

Например, соответствие между элементами множеств $x \in X$ и $y \in Y$ задает точечное множество (x_i, y_j) координат точек на плоскости; русско-английский словарь устанавливает соответствие значений и написаний слов русского и английского языков.

Пусть задано соответствие R между множествами A и B, т. е. R: (a; b), $a \in A, b \in B$

*Для некоторого элемента **a** множества **A** поставлен в соответствие некоторый элемент b из множества B, который называется образом элемента a и записывается b = R(a).*

Тогда a = R^{-1}(b) — прообраз элемента $b \in B$ *который обладает свойствами единственности и полноты:*

- *каждому прообразу соответствует единственный образ;*
- *образ должен быть полным, так же как полным должен быть и прообраз.*

Например, если

А — множество

парабол,

В — множество

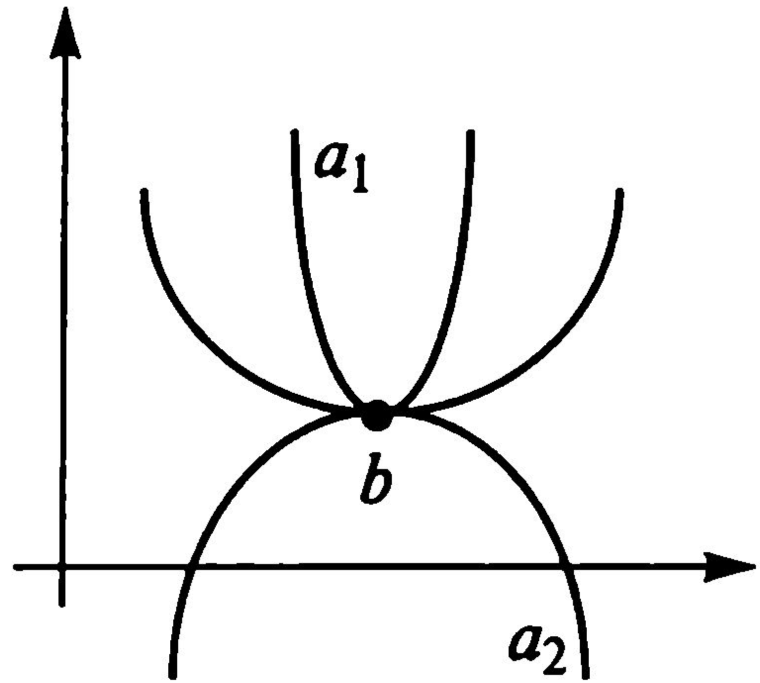
точек плоскости

R — соответствие

«вершина параболы»,

то R(a) — точка, являющаяся вершиной параболы a,

а $R^{-1}(b)$ состоит из всех парабол a_i с вершиной в точке b



Образ множества A при соответствии R называется множеством значений этого соответствия и обозначается R(A), если R(A) состоит из образов всех элементов множества A. Запись: $R(A)=\{b \mid \forall a \in A, b=R(a)\}$.

Прообраз множества B при некотором соответствии R называют областью определения этого соответствия и обозначают R^{-1}(B), т.е. $R^{-1}(B)=\{a \mid \forall b \in B, \exists a \in A : R(a)=b\}$.

R^{-1} является обратным соответствием для R.

Для описания соответствий между множествами используют понятие отображения (функции) одного множества на другое.

Функцией f , действующей из множества X в множество *Y* ($f\colon X \to Y$) называется правило или закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один или несколько $y \in Y$.

Задание отображений.

Для задания отображения необходимо указать:

- *множество, которое отображается (область определения данного отображения D(f));*
- *множество, в (на) которое отображается данная область определения (множество значений этого отображения E(f));*
- *закон или соответствие между этими множествами, по которому для элементов первого множества (прообразов, аргументов) выбраны элементы (образы) из второго множества.*

Приняты записи $A \xrightarrow{f} B$ *или f: A → B.*

Способ задания отображений в виде формул называется аналитическим. Существуют еще табличный и графический способы.

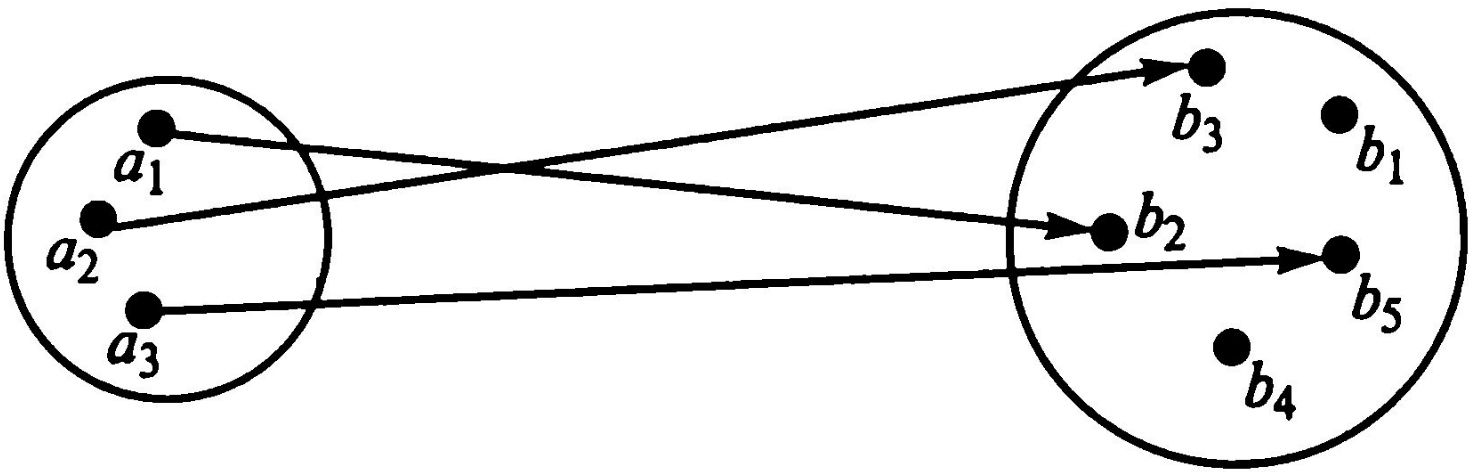
Для задания отображения множеств табличным способом принято строить таблицу, в которой первую строку составляют элементы области определения (прообразы вида a), а вторую строку — их образы, т. е. элементы вида γ (x) при отображении γ : a □ γ (a), где $a \in A$

x	a_1	a_2	…	a_n	…
$\gamma(x)$	$\gamma(a_1)$	$\gamma(a_2)$	…	$\gamma(a_n)$	…

Такой способ удобен при достаточно малой мощности прообраза (не более 10).

Графическое представление отображения связано со стрелочными схемами (диаграммами или графами).

Пример графического задания отображения множества $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ в $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.



Отображения *f: A □ B и g: A □ B* называются равными, если $\forall x \in A\ f(x) = g(x)$.

Отображения называются однозначными, если каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа.

Виды отображений.

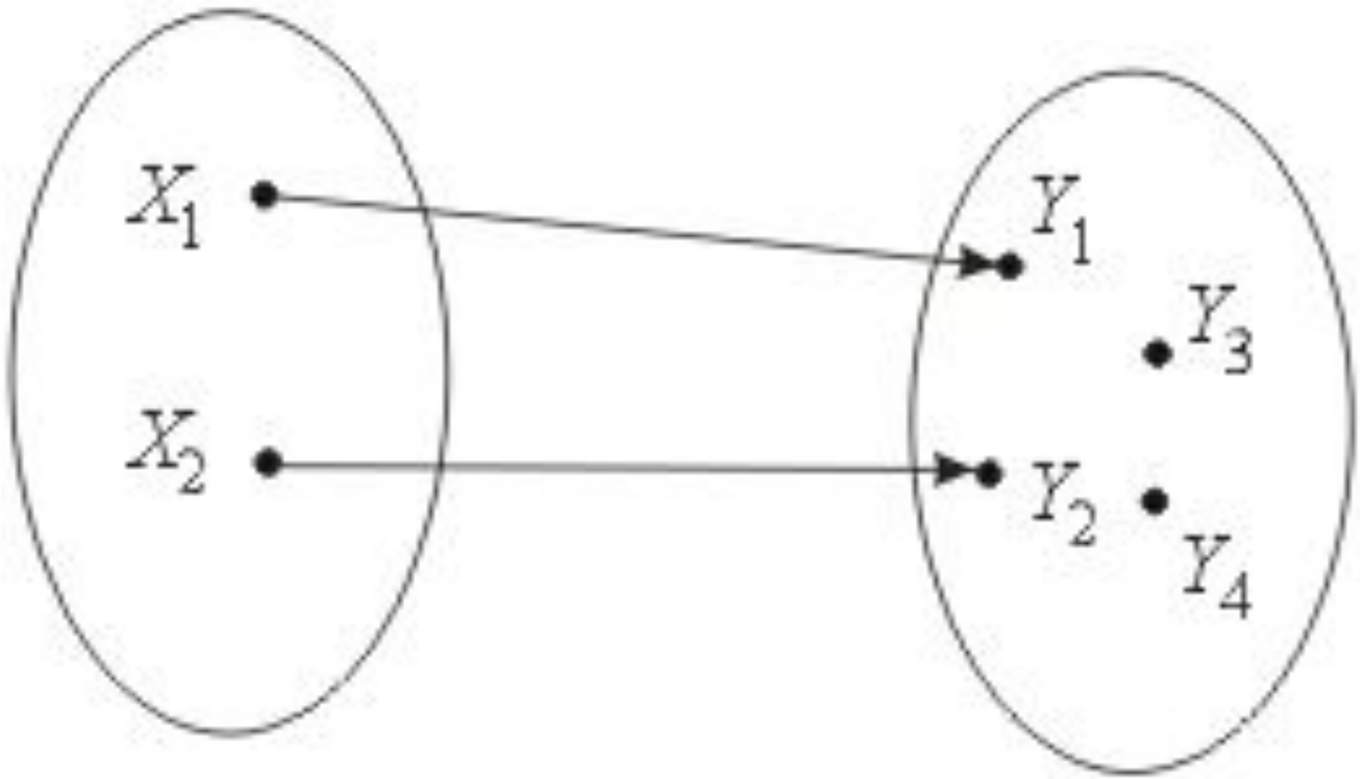
Различают два основных вида однозначных отображений (функций). По мощности они делятся на сюръективные и инъективные

Отображения

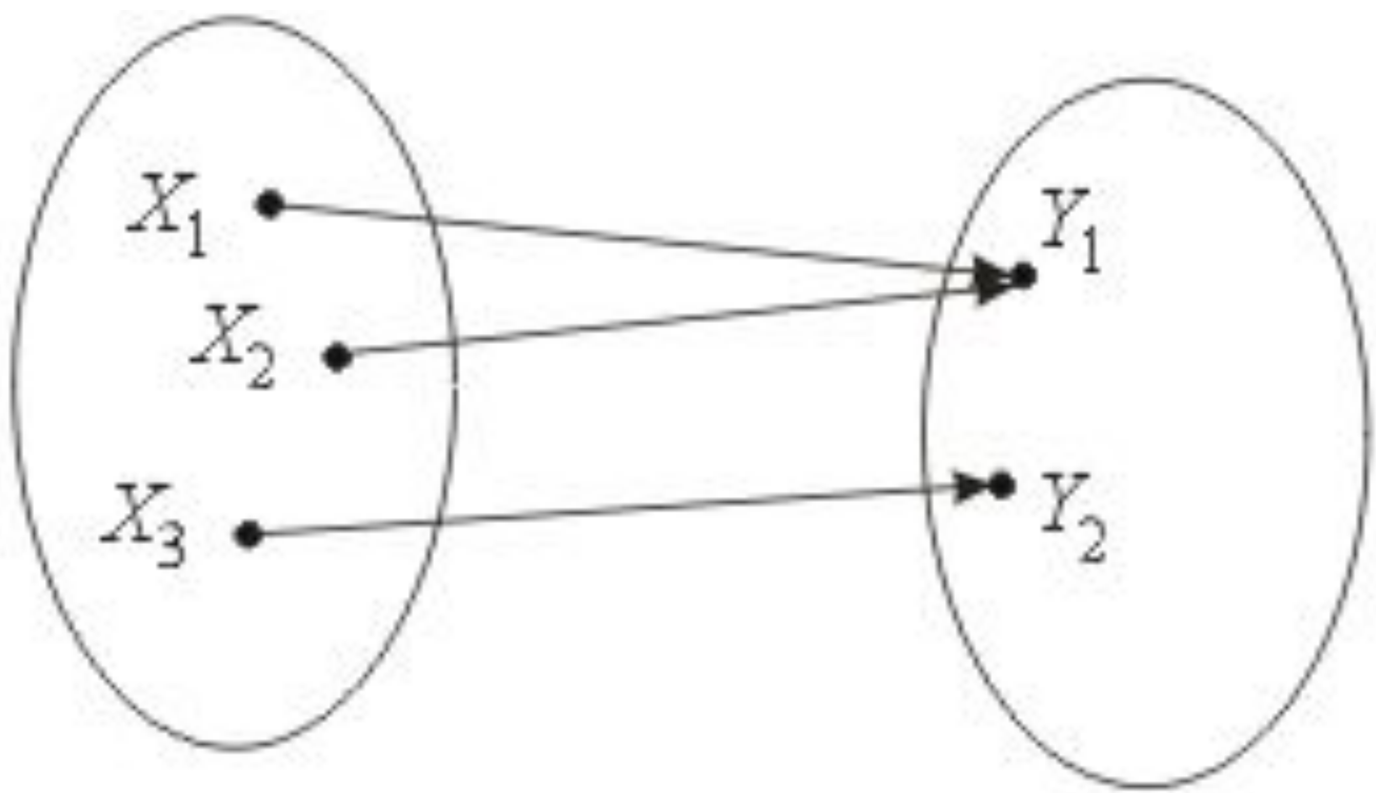
На множество
«сюръекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества A указан *единственный* элемент множества B, а каждому элементу множества B можно указать *хотя бы* один элемент множества A, называется отображением множества A **на** множество B

Во множество
«инъекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества A соответствует *единственный* элемент множества B, а каждому элементу B соответствует *не более* одного прообраза из A, называется отображением множества A **во** множество B

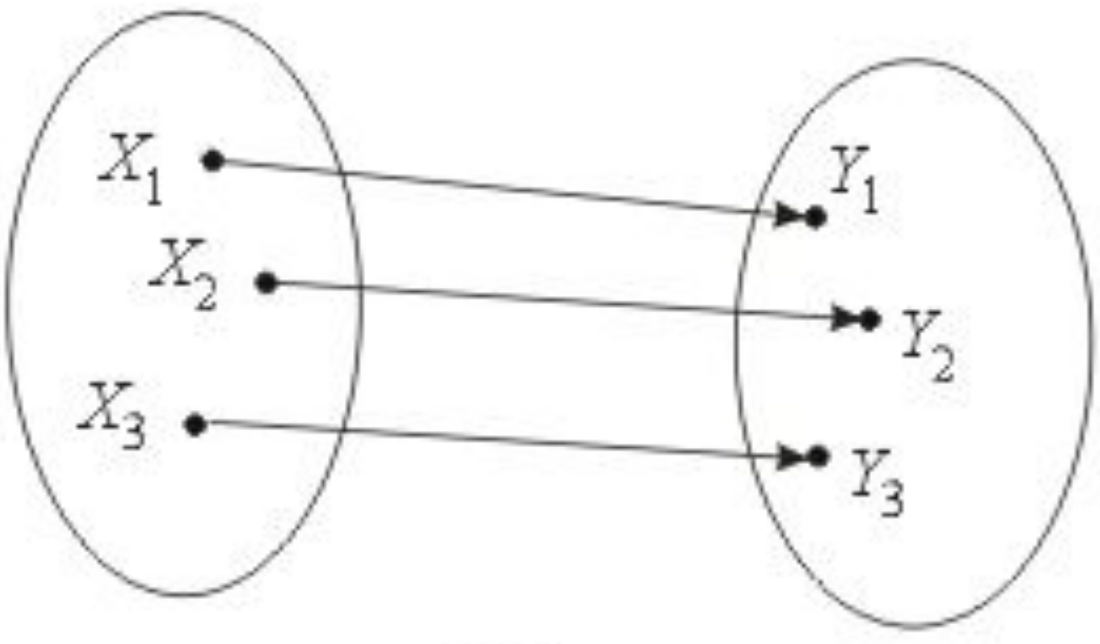
Инъекция



Сурьекция



Отображение множества А **на** множество В, при котором каждому элементу множества В соответствует единственный элемент множества А, называется **взаимно-однозначным соответствием** между двумя множествами, или **биекцией**.



Два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить биективное отображение.

Это обозначается следующим образом:

$$A \sim B.$$

Пусть множество А отображается взаимно-однозначно на множество В, т.е f:А□В. Тогда отображение f $^{-1}$*, при котором каждому элементу множества В ставится в соответствие его прообраз из множества А, называется* ***обратным отображением*** *для f и записывается*

$B \xrightarrow{f^{-1}} A$ *или f* $^{-1}$*:В□А.*

Так как одному образу при биекции соответствует в точности один прообраз, обратное отображение будет определено всюду на В и однозначно (отсюда название).

Для биекции принята запись: $A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B.$

Если между элементами множеств установлено взаимно-однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковое количество элементов.

Говорят, что они равносильны, равномощны, или эквивалентны.

Рассмотрим примеры отображений.

1) Каждому действительному числу поставим в соответствие его квадрат.

Отображение $x□x^2$ не является взаимно-однозначным соответствием, так как для любого образа $y=x^2$ можно найти два прообраза в области определения:

$x = +\sqrt{y}$ *и* $x = -\sqrt{y}$.

Рассмотрим примеры отображений.

2) Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов английского и русского языков. Такое соответствие не является однозначным, так как каждому английскому понятию соответствуют различные варианты перевода на русский язык, и наоборот.

***Рассмотрим примеры отображений*.**

3) Различные виды кодирования (азбука Морзе, представление чисел в различных системах счисления, шифрованные сообщения) являются чаще всего примерами взаимно-однозначного соответствия между множествами.

Композиция функций.

Пусть заданы отображения f_1*: A□B и* f_2*: B□C. Отображение f: A□C, при котором каждому элементу* $x \in A$ *соответствует определенный элемент* $z \in C$*, такой, что*

$z = f_2(y)$*, где* $y = f_1(x)$*, называется произведением, композицией, или суперпозицией отображений*

f_1 *и* f_2*.*

Отображение $e: A \to A$ называется ***тождественным*** (***единичным***), если каждому аргументу оно ставит в соответствие себя.

Очевидно, такое отображение можно задать на любом непустом множестве.

Если $e(x) = x$, то $E(e) = D(e) = A$.

Очевидно, что отображение, обратное единичному, также единичное.