

Дискретная математика



Высказывание

Высказывание – это утверждение или повествовательное предложение, которое может быть **либо истинным, либо ложным.**

Значением истинного высказывания является «И» – истина, ложного «Л» – «ложь».

Высказывание

Повелительные («Войдите, пожалуйста»), вопросительные («Который час?») и бессмысленные предложения («Сумма пяти и восемнадцати»), в которых ничего не утверждается, не являются высказываниями.

Высказывание

Не будет высказыванием утверждение, истинность или ложность которого нельзя определить однозначно.

Например: «Музыка Вагнера очень мелодична», «Картины Пикассо слишком абстрактны».

Высказывание

Предметом логики высказываний является анализ различных логических связей и методы построения на их основе правильных логических рассуждений.

Способы построения новых высказываний из заданных с помощью логических связок и определение истинности высказываний, изучаются в логике высказываний.

Высказывание

Основные логические связки – это связки: ***и, или, не, если ... то...***, которые в логике высказываний имеют специальные названия и обозначения. Иногда к ним добавляют еще две связки ***либо ..., либо ... (или ..., или ...)***; ***если, и только если (тогда и только тогда)***.

Для одной и той же связки в разных источниках используются разные названия и обозначения, которые приведены в таблице 1.

Связка	Название	Обозначение	Высказывание, полученное с помощью связки	Математическая запись
и	конъюнкция (или логическое умножение)	$\&$, \wedge , \cdot	А и В	$A \& B$, $A \wedge B$, $A \cdot B$, AB
или	дизъюнкция	\vee , $+$	А или В	$A \vee B$, $A + B$
не	отрицание, инверсия	\neg , $—$	не А	$\neg A$, \bar{A}
если ..., то ...	импликация	\rightarrow , \supset	если А, то В (А влечет В)	$A \rightarrow B$, $A \supset B$
либо ..., либо ...	исключающее «или», неравнозначность	\oplus , Δ , \neq	либо А, либо В	$A \oplus B$, $A \Delta B$
если и только если	эквивалентность, равнозначность	\equiv , \sim , \leftrightarrow	А, если и только если В	$A \equiv B$, $A \sim B$

Высказывание

В последней колонке табл. 1 записаны **формулы**, или выражения логики высказываний. С помощью букв A, B, C, \dots обозначающих высказывания, связок и скобок можно построить разнообразные формулы.

Высказывание

A – светит солнце, B – идет дождь,

AB – светит солнце и идет дождь.

C – контакт замкнут, D – лампа горит,

$C \rightarrow D$ – если контакт замкнут, то лампа горит.

Истинными или ложными будут составные высказывания, зависит от истинности простых высказываний, входящих в формулу.

Высказывание

A – Марс – спутник Земли, B – Лондон – столица Англии,

AB – Марс – спутник Земли и Лондон – столица Англии, *ложное высказывание;*

$A \vee B$ – Марс – спутник Земли или Лондон – столица Англии, *истинное;*

$A \rightarrow B$ – если Марс – спутник Земли, то Лондон – столица Англии, *истинное.*

Алгебра высказываний

Исследование свойств таких формул и способов установления их истинности и является основным предметом логики высказываний.

Существуют два подхода к построению логики высказываний, которые образуют два варианта этой логики: ***алгебру логики*** и ***исчисление высказываний***.

Алгебра высказываний

Алгебра высказываний рассматривает **логические формулы** как алгебраические выражения, связывающие высказывания, которые можно преобразовать по определенным правилам. Знаки операций обозначают логические операции (логические связки).

Алгебра высказываний

В формулах алгебры логики **переменные** – это высказывания. Они принимают только два значения – **ложь** и **истина**, которые обозначаются либо 0 и 1, либо Л и И, либо *false* и *true*.

Каждая формула задает **логическую функцию**: функцию от логических переменных, которая сама может принимать только два логических значения.

Алгебра высказываний

Таблица логических функций 1 переменной

x	<u>Константа 0:</u> $f(x) = 0$	<u>Тождество:</u> $f(x) = x$	<u>Отрицание:</u> $f(x) = \bar{x}$	<u>Константа 1:</u> $f(x) = 1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица функций 2 переменных и ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

		<u>Дизъюнкция</u>	<u>Конъюнкция</u>	<u>Импликация</u>	<u>Эквивалентность</u> (<u>равнозначность</u>)	<u>Неравнозначность</u> (<u>сложение по модулю 2</u>)	<u>Штрих Шеффера</u> (<u>НЕ – И</u>)	<u>Стрелка Пирса</u> (<u>НЕ – ИЛИ</u>)
X_1	X_2	$x_1 \sqcup x_2$	$x_1 \sqcap x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Алгебра высказываний

Интерпретацией

формулы логики

высказываний называется

набор значений

высказываний, входящих в

нее.

Алгебра высказываний

Формула F называется

тождественно истинной

или ***тавтологией***, если она

принимает значение «истина»

независимо от значений

входящих в нее

высказывательных

переменных, (на всех

интерпретациях).

Алгебра высказываний

Формула F называется **тождественно ложной** или **противоречивой**, если она принимает значение «ложь» независимо от значений входящих в нее высказывательных переменных, (на всех интерпретациях).

Алгебра высказываний

Формула F называется ***выполнимой***, если при некоторых интерпретациях она принимает значение «истина».

Такая интерпретация называется ***моделью формулы F*** .

Исчисление высказываний

Пусть интерпретация α определена на всех высказывательных переменных, встречающихся в формулах множества Γ .

Говорят, что α *выполняет* Γ или α *модель* Γ , если каждая формула Γ из принимает значение «истина», при интерпретации α .

Исчисление высказываний

Говорят, что Γ **выполнимо**, если имеет модель.

Если не выполнимо, то пишут:

$$\Gamma \models.$$

Исчисление высказываний

Пусть Γ – множество формул логики высказываний, F – произвольная формула. Говорят, что множество Γ **логически влечет формулу F** , если любая модель Γ является моделью для F . Обозначается:

$$\Gamma \models F.$$

Исчисление высказываний

Утверждение того, что некоторое высказывание *(заключение)* следует из других высказываний *(посылок)*, называется *аргументом*.

Аргумент

H_1

H_2

... ГИПОТЕЗЫ

H_n

заключение G

Исчисление высказываний

Аргумент называется
правильным, если из
множества гипотез логически
следует заключение
аргумента.

Пример 1.1

Проверить истинность,
выполнимость или ложность
формулы.

$$F = (A \vee B) \oplus A.$$

Построим таблицу истинности и
убедимся, в наличии моделей
формулы F.

Пример 1.1

Напомним, интерпретация α модель F , если значение функции на интерпретации α равен *Истине*.

Пример 1.1

A	B	$A \vee B$	F
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Моделью F является интерпретация (набор значений аргументов) $\alpha = (0, 1)$.

Пример 1.1

Так как у F *есть модель*, значит она **не является тождественно ложной** (противоречивой).

Так как *не все интерпретации F являются ее моделями*, значит она **не является тождественно истинной** (тавтологией).

F является **выполнимой**.

Пример 1.2

Проверить истинность,
выполнимость или ложность
формулы.

$$F = (A \wedge B) \vee (A \mid B).$$

Построим таблицу истинности и
убедимся, в наличии моделей
формулы F.

Пример 1.2

A	B	$A \wedge B$	$A B$	F
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Все интерпретации F является ее моделями.

Пример 1.2

Так как *все*
интерпретации F
являются ее моделями,
значит она **является**
тождественно истинной
(тавтологией).

Пример 2.1

Проверить, выполнимо ли множество Γ .

$$\Gamma = \{A \rightarrow B, A \downarrow B\}$$

Надо проверить, найдется ли такая интерпретация α , которая является моделью разу для всех формул множества Γ .

Построим таблицу для всех функций из Γ .

Пример 2.1

A	B	$A \rightarrow B$	$A \downarrow B$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	0

$\alpha = (0,0)$ является моделью всех формул Γ . **Значит Γ - выполнимо**

Пример 2.2

Проверить, выполнимо ли множество Γ .

$$\Gamma = \{A|B, A \sim B, A \vee B\}$$

Надо проверить, найдется ли такая интерпретация α , которая является моделью разу для всех формул множества Γ .

Построим таблицу для всех функций из Γ .

Пример 2.2

A	B	$A B$	$A \sim B$	$A \vee B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Γ не имеет моделей. Значит Γ не выполнимо: $\Gamma \models$

Пример 3.1

Проверить, будет ли из множества формул Γ логически следовать функция F .

$$\Gamma = \{\neg A \sim B, \neg A \vee B\}, F = A|B$$

Надо проверить, будет ли всякая модель множества Γ моделью формулы F .

Построим таблицу для функций Γ и F .

Пример 3.1

A	B	$\neg A \sim B$	$\neg A \vee B$	$A B$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Модель Γ ($\alpha=01$) является моделью F . Значит из Γ логически следует F .
 $\Gamma \models F$.

Пример 4.1

Проверить правильность аргумента.

Если Джон коммунист, то Джон атеист. Джон атеист. Значит Джон коммунист.

А- Джон коммунист;

В- Джон атеист.

Составим аргумент.

Пример 4.1

$$A \rightarrow B$$
$$\frac{B}{\quad}$$
$$\therefore A$$

Здесь $\Gamma = \{A \rightarrow B, B\}$ – множество посылок,
ПОСЫЛОК,

$F = A$ – заключение.

Пример 4.1

Чтобы проверить проверить
правильность аргумента,
необходимо убедиться в том, что из
множества посылок логически
следует заключение: $\Gamma \models F$.

В нашем случае:

$$\{A \rightarrow B, B\} \models A$$

Пример 4.1

A	B	$A \rightarrow B$	B	A
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$\alpha=11$ является моделью Γ и F .

$\alpha=01$ является моделью Γ и не является моделью F .

Пример 4.1

Таким образом, из множества посылок Γ **не следует логически заключение** F .

Это означает, что **аргумент неверный**.