# Закон Кулона.

Напряженность электростатического поля

***1.(9.13)*** Два точечных заряда $q_1$=7,5 нКл и $q_2$=–14,7 нКл расположены на расстоянии r=5 см друг от друга. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии a=3 см от положительного заряда и b=4 см от отрицательного заряда.

***Дано***

$q_1$=7,5 нКл
$q_2$=–14,7 нКл
r=5 см
a=3 см
b=4 см

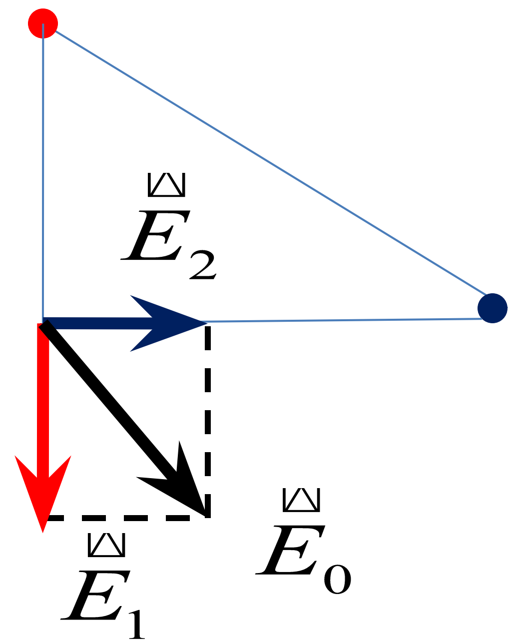
E=?

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{\left|\vec{E}_1\right|^2 + \left|\vec{E}_2\right|^2}$$

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$E_1 = \frac{kq_1}{a^2} \qquad E_2 = \frac{kq_2}{b^2}$$




$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{a^4} + \frac{q_2^2}{b^4}}$$

$$E_0 = \frac{1}{4\cdot 3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{(7,5\cdot 10^{-9})^2}{(3\cdot 10^{-4})^4} + \frac{(14,7\cdot 10^{-9})^2}{(4\cdot 10^{-2})^4}} = 112\cdot 10^3 \text{ В/м}$$

***2.(9.15)*** Два металлических шарика одинакового радиуса и массы подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд Q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной T=98 мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса равно *l*=10 см, масса каждого шарика m=5 г.

***Дано***

T=98 мН
*l*=10 см,
m=5 г.

Q=?

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_k = 0,$$

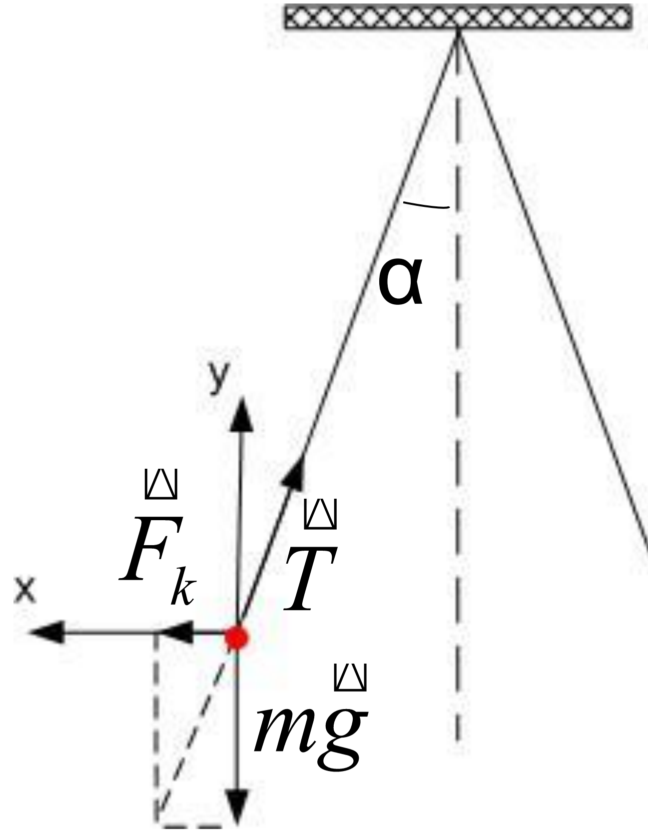
$$T\cos\alpha - mg = 0$$

$$F_k - T\sin\alpha = 0$$

$$T\sin\alpha = F_k$$

$$\cos\alpha = \frac{mg}{T}$$

$$\left|\vec{F}_k\right| = k\frac{(Q/2)^2}{r^2}, \qquad r = 2\ell\sin\alpha$$



$$Q=\sqrt{\frac{16T\ell^{2}\sin^{3}\alpha}{k}}=\sqrt{4\pi\varepsilon_{0}16T\ell^{2}\sin^{3}\alpha}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{mq}{T}\right)^{2}}\qquad Q=8\ell\sqrt{\pi T\varepsilon_{0}\left[1-\left(\frac{mg}{T}\right)^{2}\right]^{3/2}}$$

$$Q=8\cdot0{,}1\sqrt{3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot98\cdot10^{-3}\left[1-\left(\frac{5\cdot10^{-3}\cdot9{,}8}{9{,}8\cdot10^{-3}}\right)^{2}\right]^{3/2}}$$

***Ответ:*** Q=1,1 мкКл.

***3.(9.19)*** К вертикально расположенной бесконечной однородно заряженной плоскости прикреплена нить, на другом конце которой расположен одноименно заряженный шарик массой m=40 мг и зарядом q=31,8 нКл. Сила натяжения нити, на которой висит шарик, T=0,5 мН. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости. Диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряд ε=6. Ускорение свободного падения g=10 м/с$^2$.

***Дано***

m=40 мг
q=31,8 нКл
T=0,5 мН
ε=6
g=10 м/с$^2$

---

σ =?

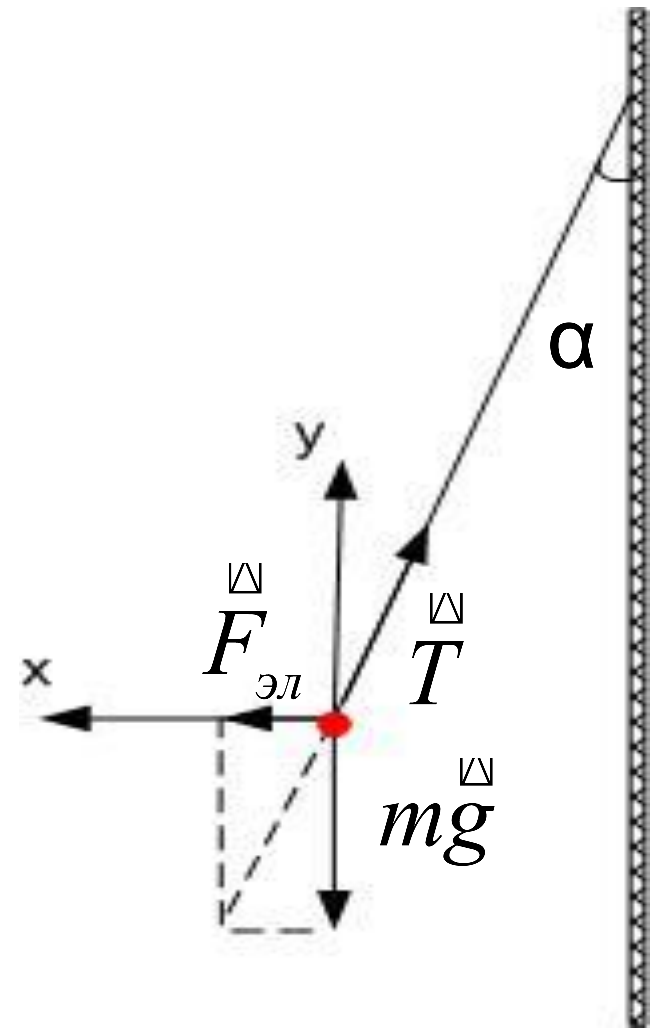
$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_k = 0,$$

$$T\cos\alpha - mg = 0$$

$$F_{эл} - T\sin\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{mg}{T}$$

$$T\sin\alpha = F_{эл}$$

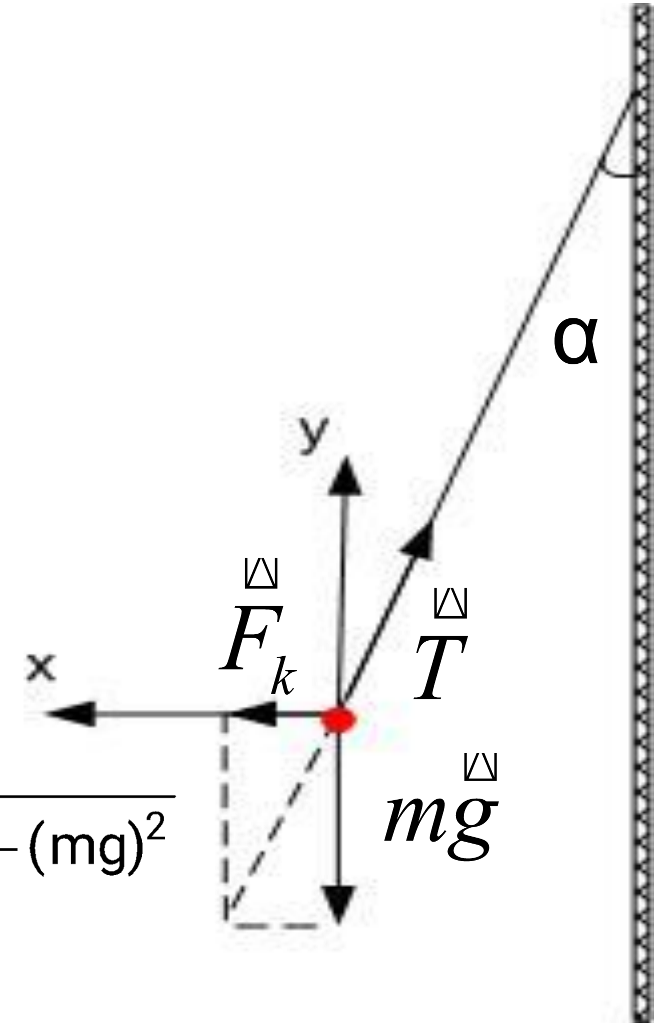


$$F_{эл} = qE \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$F_{эл} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = T\sin\alpha.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{mg}{T}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 T\sin\alpha}{q} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 T}{q}\sqrt{1-\left(\frac{mg}{T}\right)^2} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{q}\sqrt{T^2-(mg)^2}$$




$$\sigma = \frac{2\cdot 6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}}{31{,}8\cdot 10^{-9}}\sqrt{1-\left(\frac{40\cdot 10^{-6}\cdot 10}{0{,}5\cdot 10^{-3}}\right)^2}$$

***Ответ:*** $\sigma = 1\cdot 10^{-6}$ Кл/м$^2$.

***4.(9.20)*** Найти силу F, действующую на заряд q=0,66 нКл, если заряд помещен: а) на расстоянии $r_1$=2 см от длинной однородно заряженной нити с линейной плотностью заряда т=0,2 мкКл/м; б) в поле однородно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ=20 мкКл/м$^2$; в) на расстоянии $r_2$=2 см от поверхности однородно заряженного шара радиусом R=2 см и поверхностной плотностью заряда σ=20 мкКл/м$^2$. Диэлектрическая проницаемость среды ε=6.

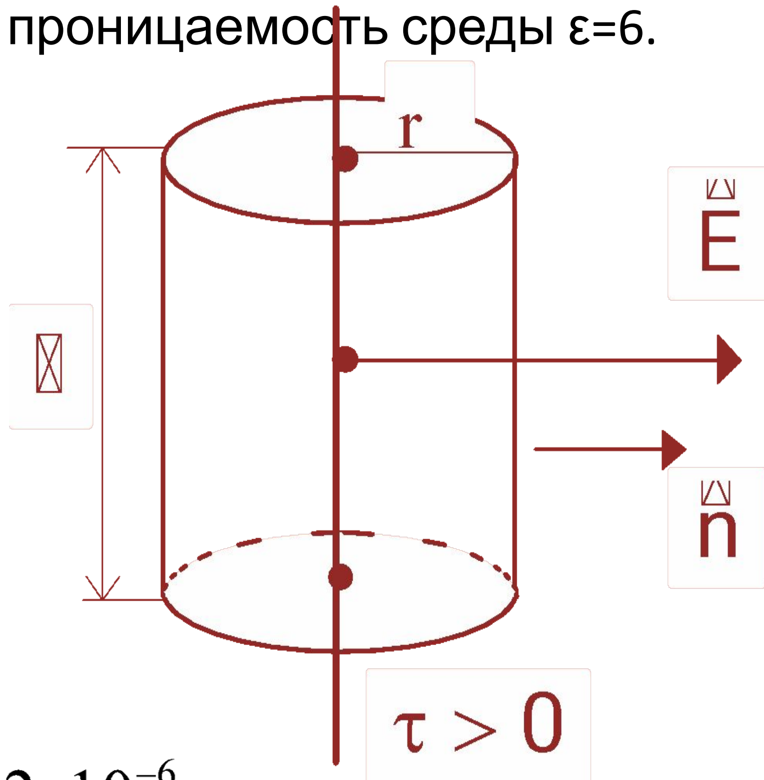
***Дано***

а)
q=0,66 нКл
$r_1$=2 см
т=0,2 мкКл/м
ε=6

F=?

$$F_1 = qE_1$$

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$$

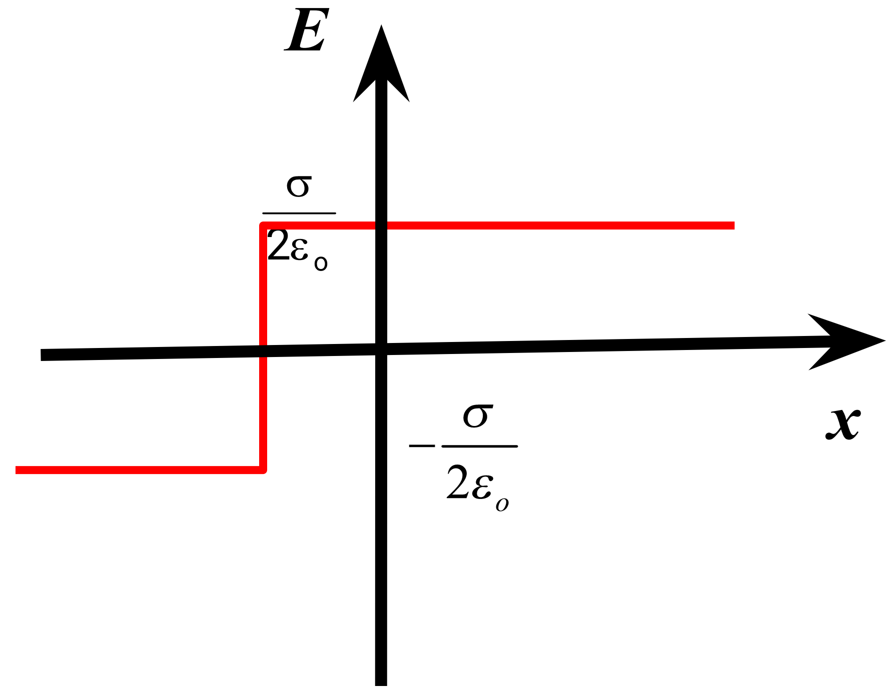



$$F_1 = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} = \frac{0,66\cdot10^{-9}\cdot0,2\cdot10^{-6}}{2\cdot3,14\cdot6\cdot8,85\cdot10^{-12}\cdot6\cdot2\cdot10^{-12}} = 19,7\cdot10^{-6}$$

***Дано***

б)
q=0,66 нКл
σ=20 мкКл/м$^2$
ε=6

F=?




$$F_2 = qE_2$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

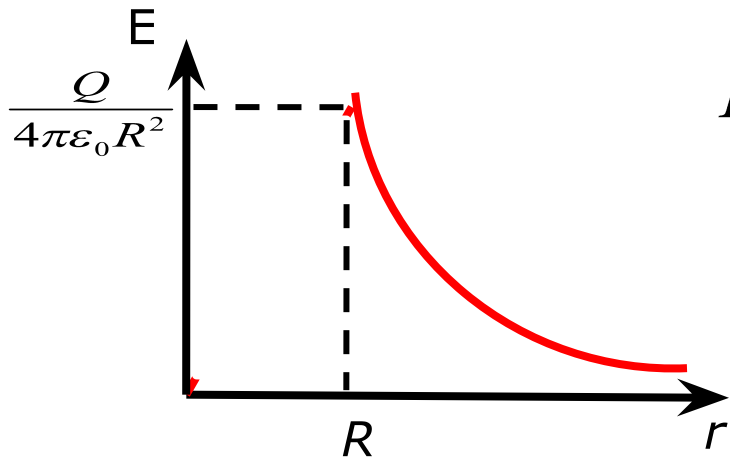
$$F_2 = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{0,66\cdot 10^{-9}\cdot 20\cdot 10^{-6}}{2\cdot 6\cdot 8,85\cdot 10^{-12}} = 124$$

$$F_3 = qE_3$$

***Дано***

в)
q=0,66 нКл
σ=20 мкКл/м$^2$
$r_2$=2 см
R=2 см
ε=6

F=?




$$E_3 = \frac{Q_ш}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+r_2)^2}$$

$$Q_ш = \sigma 4\pi R^2$$

$$F_3 = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R+r_2)^2}.$$

$$F_3 = \frac{0,66\cdot10^{-9}\cdot20\cdot10^{-6}(2\cdot10^{-2})^2}{6\cdot8,85\cdot10^{-12}(2\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-2})^2} = 62\cdot10^{-6}\,Í$$

**Ответ:** а) $F_1$=20мкН; б) $F_2$=126мкН; в) $F_3$=62,8 мкН.

***5.(9.23)*** С какой силой $F_l$ электрическое поле бесконечной однородно заряженной плоскости действует на единицу длины однородно заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле? Линейная плотность заряда на нити τ=3 мкКл/м и поверхностная плотность заряда на плоскости σ=20 мкКл/м$^2$.

***Дано***

τ=3 мкКл/м σ=20 мкКл/м$^2$.

F=?

$$F = qE, \qquad q = \tau\ell$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad F = \frac{\tau \ell \sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$F = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-12}} = 3{,}4 \,{}^{H}\!/_{м}$$

***Ответ:*** $F_l$=3,4 Н/м

***6.(9.26)*** С какой силой $F_s$ на единицу площади отталкиваются две одноименные однородно заряженные бесконечно протяженные плоскости. Поверхностная плотность заряда на плоскостях σ=0,3 мкКл/м².

***Дано***

σ=0,3 мкКл/м²

---

F=?

$$F = q_1 E_2$$

$$q_1 = \sigma_1 S \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma,$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \qquad F = \frac{\sigma_1 S \sigma_2}{2\varepsilon_0},$$

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} \qquad F = \frac{(0,3\cdot 10^{-6})^2\cdot 1}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}} = 5,1\cdot 10^{-3}$$

***Ответ:*** $F_s$=5,1 кН/м².

**7.(9.29)** Показать, что электрическое поле, образованное однородно заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

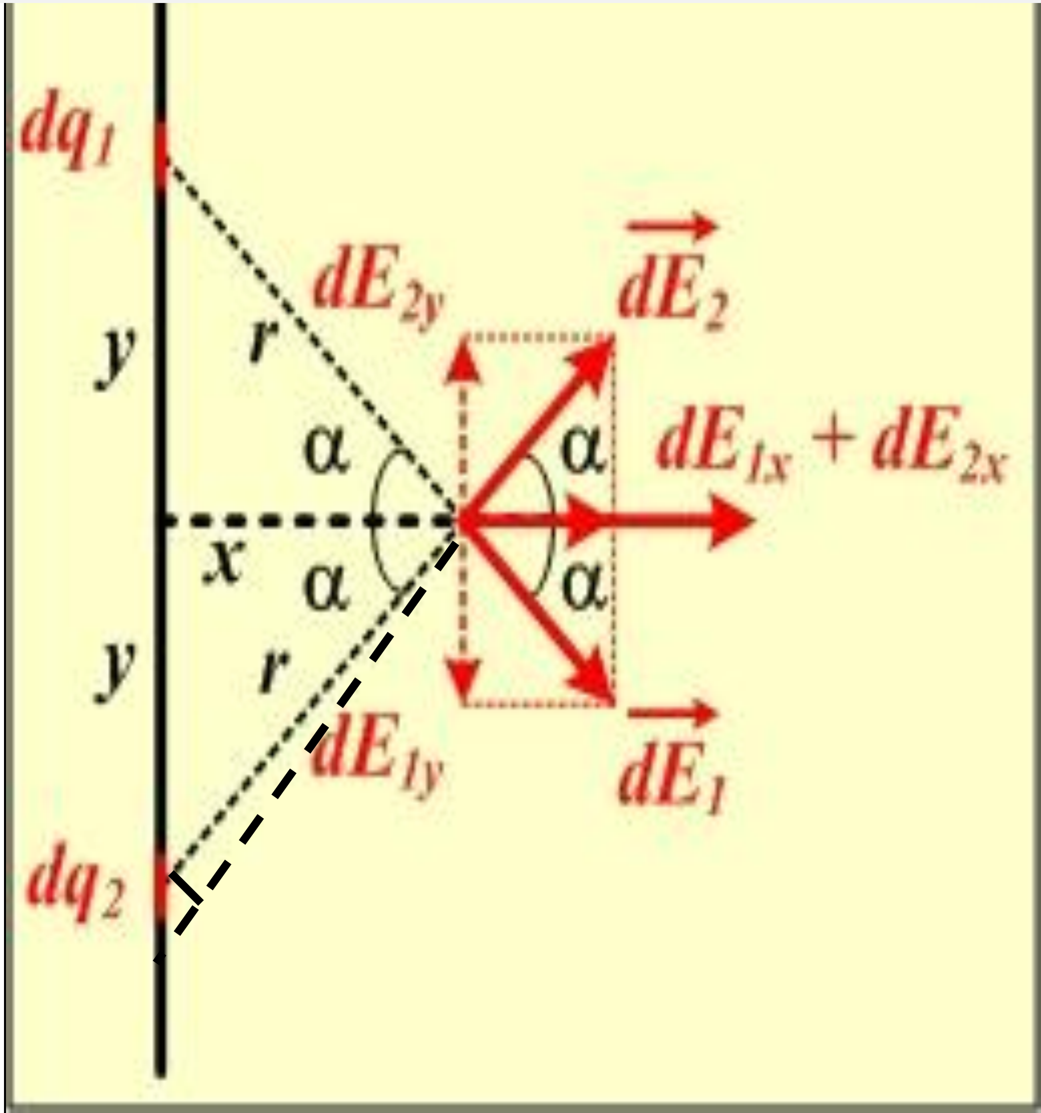
$$\vec{E} = \sum d\vec{E}_i$$

$$\sum_i dE_{yi} = 0$$

$$E = \sum E_{xi}$$

$$dE_{xi} = dE_i \cos\alpha_i$$

$$dE = \frac{\tau \cdot dl \cdot \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$dE = \frac{\tau \cdot \frac{dr}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

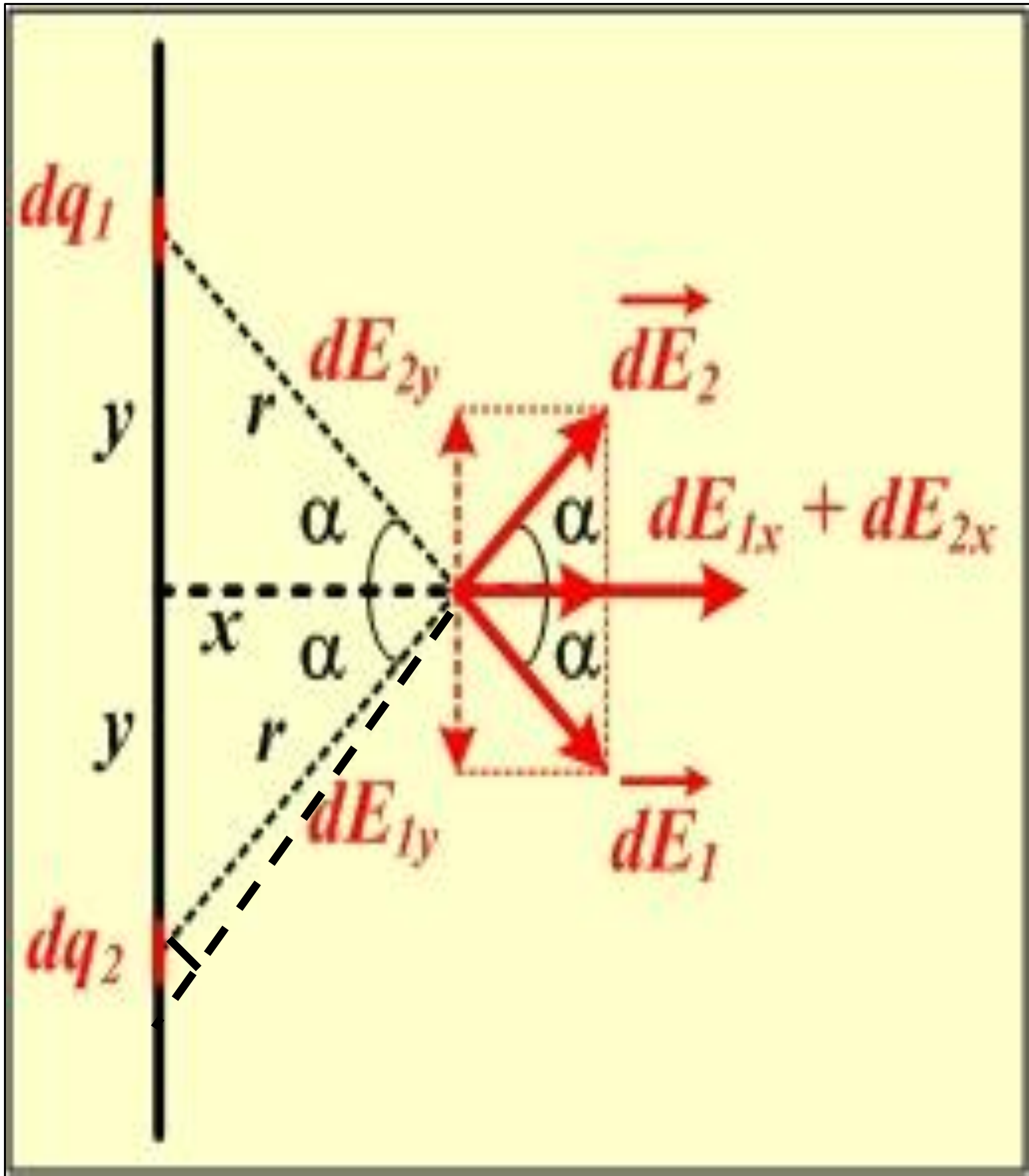
$$dr = r \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau \cdot cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0 x} \cdot d\alpha$$

$$E = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau \cdot cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 x} \cdot d\alpha$$



**7.(9.29)** Показать, что электрическое поле, образованное однородно заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

$$E = \frac{\tau \sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$\sin\theta = \frac{\ell/2}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + x^2}}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{\ell/2}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + x^2}}$$

$$\ell/2 >> x$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$x >> \ell/2$$

$$\tau\ell = q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

***8.*** Длина однородно заряженной нити $l$=25 см. При каком предельном расстоянии ***a*** от нити по нормали к ее середине возбуждаемое ею электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка δ при таком допущении не должна превышать 0,05. Указание: допускаемая ошибка δ равна $(E_2-E_1)/E_2$, где $E_2$ – напряженность электрического поля бесконечно длинной нити, $E_1$ – напряженность поля нити конечной длины.

***Дано***

$l$=25 см

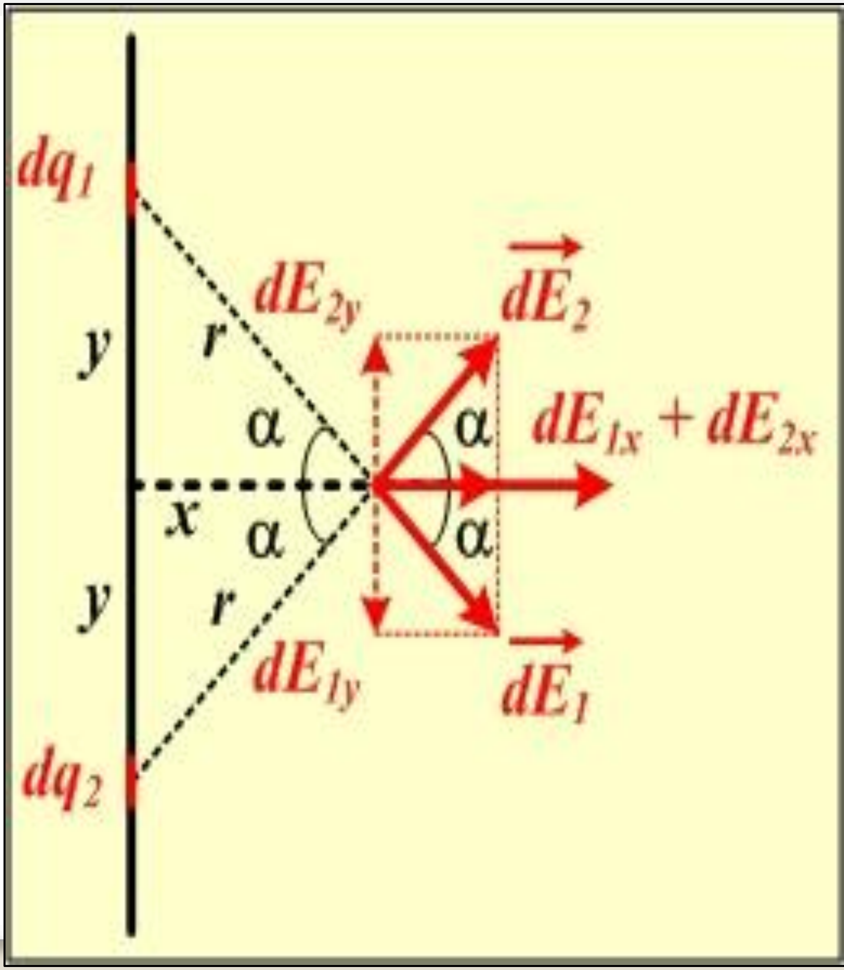
δ = 0,05

***a=?***

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_1 = \frac{\tau \sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2}.$$



$$\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2} = 1 - \sin\alpha = 1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}},$$

$$\delta = 1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}}$$

$$\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}} = 1 - \delta$$

$$4a^2 = \frac{\ell^2}{(1-\delta)^2} - \ell^2$$

$$\ell^2 = (1-\delta)^2(\ell^2 + 4a^2)$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell^2}{(1-\delta)^2} - \ell^2},$$

$$a = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{1}{(1-\delta)^2} - 1}$$

$$a = \frac{0,25}{2}\sqrt{\frac{1}{(1-0,05)^2} - 1} = 0,041$$

***Ответ:*** a=4,1 см.

***9.(9.33)*** Напряженность электрического поля на оси однородно заряженного кольца имеет максимальное значение на некотором расстоянии от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на половине этого расстояния, будет меньше максимального значения напряженности?

***Дано***

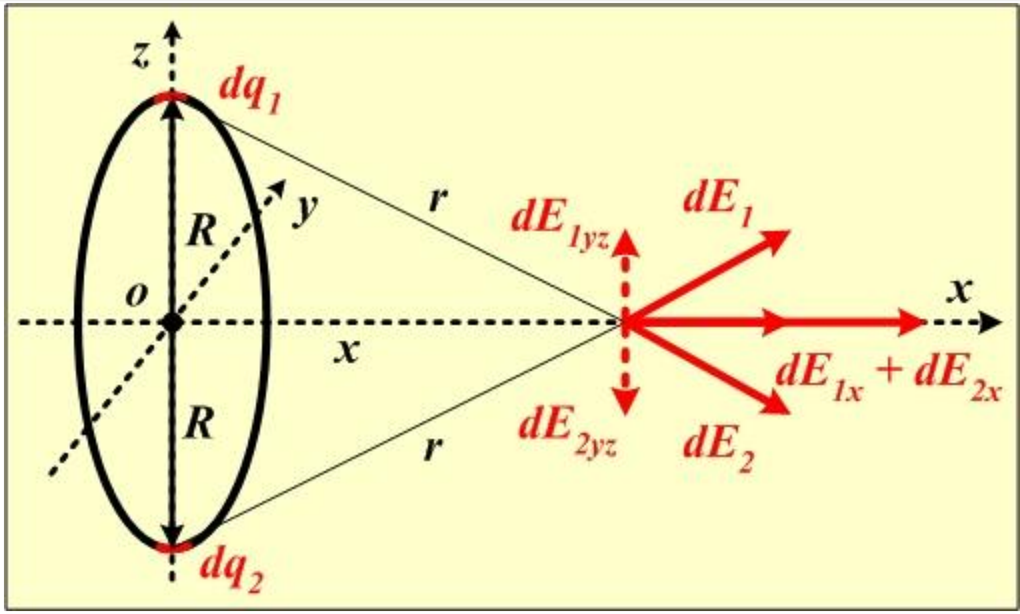
$$E(L) = E_{\max}$$

$$\frac{E_L}{E_{0,5L}} = ?$$

$$E = \sum E_{xi}$$

$$\sum_i dE_{yi} = 0$$

$$dE_{xi} = dE_i \cos\alpha$$




$$E = \int dE = \int \frac{dq\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dE(x)}{dx}=\frac{4\pi\varepsilon_0 q[(R^2+x^2)^{3/2}-3/2(R^2+x^2)^{1/2}2x\cdot x]}{(4\pi\varepsilon_0)^2(R^2+x^2)^3}$$

$$(R^2+x^2)^{3/2}-\frac{3}{2}(R^2+x^2)^{1/2}\cdot 2x^2=0$$

$$(R^2+x^2)-3x^2=0 \qquad x=\frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$E(0,5x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R/2\sqrt{2}}{\left(R^2+\dfrac{R^2}{8}\right)^{3/2}}.$$

$$\frac{E_x}{E_{0,5x}}=\frac{R\sqrt{2}(R^2+R^2/8)^{3/2}}{(R^2+R^2/2)^{3/2}R/2\sqrt{2}}=\frac{2(1+1/8)^{3/2}}{(1+1/2)^{3/2}}=1,3$$

**10.** По четверти кольца радиусом r=6,1 см однородно распределен отрицательный заряд с линейной плотностью τ=64 нКл/м. Найти силу F, действующую на заряд q=12 нКл, расположенный в центре кольца.

$$F = qE_0$$

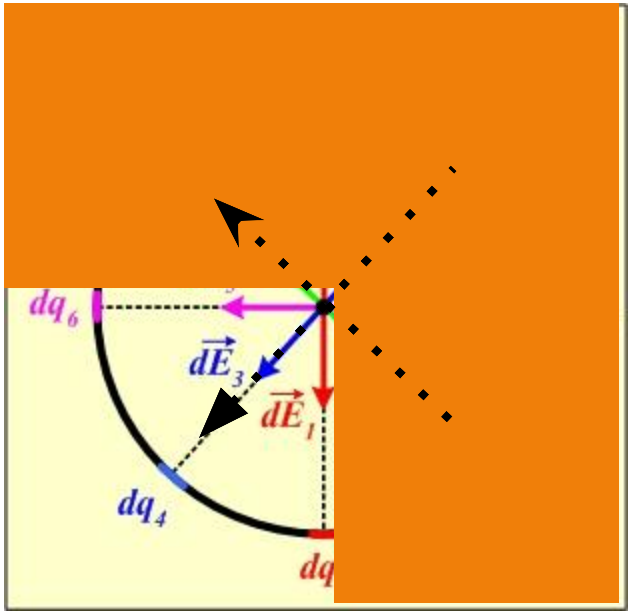
***Дано***

r=6,1 см
τ=64 нКл/м
q=12 нКл

F=?

$$\sum_i dE_{yi} = 0$$

$$E_o = \sum dE_{xi} \cos\alpha_i$$




$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{\tau r d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha$$

$$dq = \tau dl = \tau r d\alpha$$

$$dq = \tau dl = \tau r d\alpha$$

$$E_0 = 2\int_0^{\pi/4} dE_x = 2\int_0^{\pi/4} \frac{\tau r d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\pi/4}\cos\alpha d\alpha =$$

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\alpha\int_0^{\pi/4} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\pi/4.$$

$$F = qE_0 = \frac{12\cdot 10^{-9} 64\cdot 10^{-9}\sqrt{2}/2}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12} 6{,}1\cdot 10^{-2}} = 161$$

***Ответ:*** F = 161 мкН.

## *Напряженность поля заряженной сферы*

**11.** Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом R, несущей заряд Q, на расстоянии r от центра сферы:

внутри сферы ($r<R$): $E=0$;

на поверхности сферы ($r=R$): $$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$$

вне сферы ($r>R$): $$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

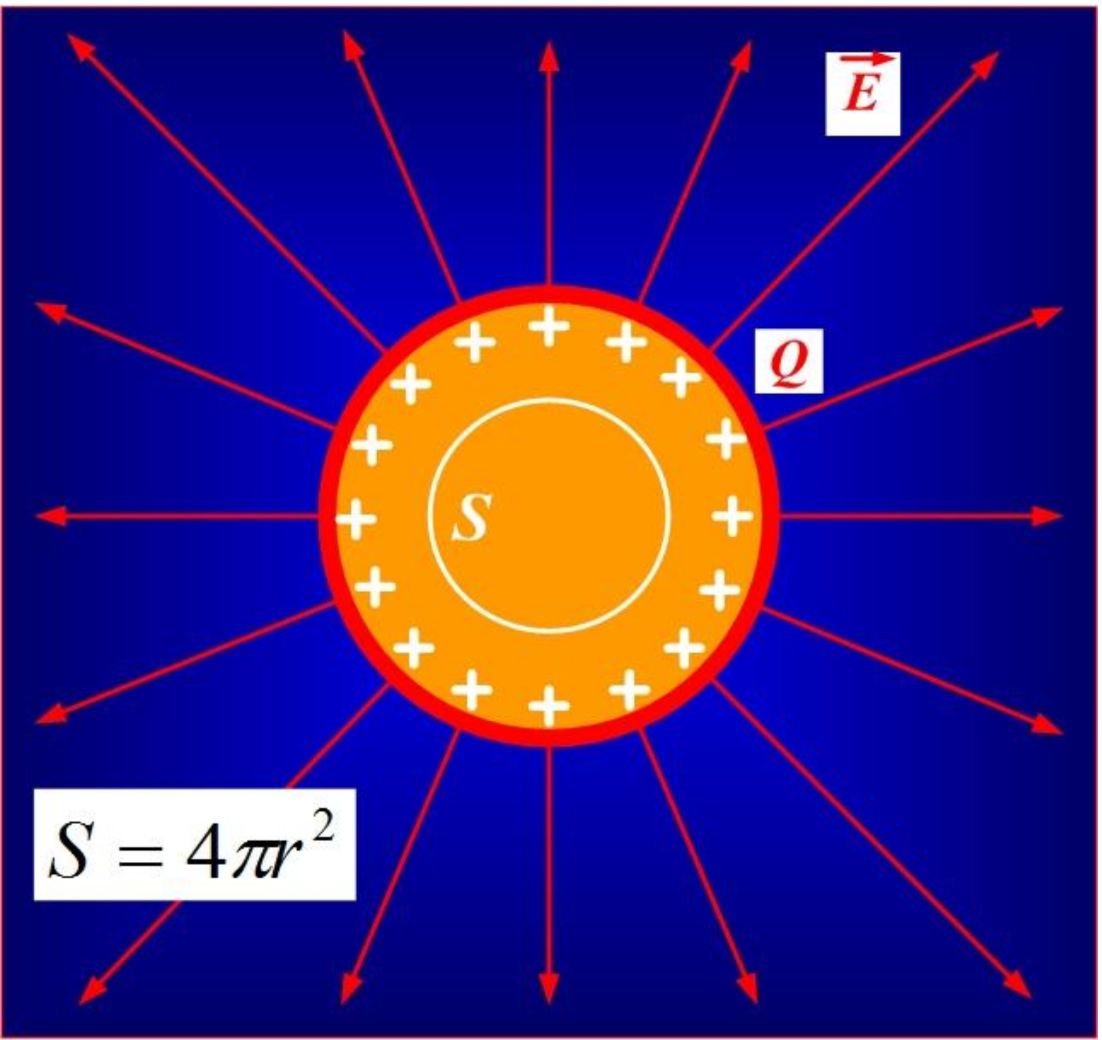
Получите данные соотношения.

## *Применение теоремы О.-Г. к расчету полей заряженных тел.*

## *Заряженная равномерно по поверхности сфера.*

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$




Поверхность сферы разделяет все пространство на две части: внутреннюю ($r < R$) и внешнюю ($r \geq R$ ).

$r < R \qquad Q = 0$

$$\Phi_E = ES =$$

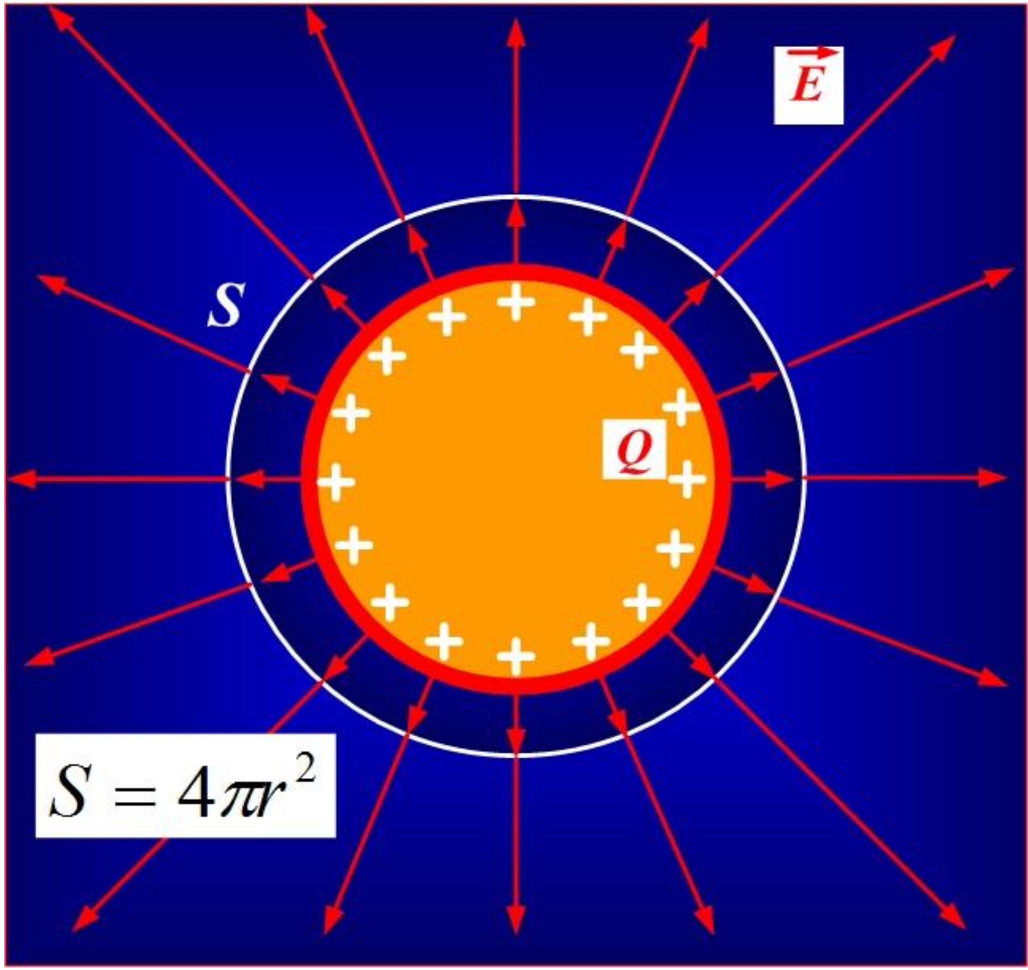
$$= E \cdot 4\pi \cdot r_1^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

## *Применение теоремы О.-Г. к расчету полей заряженных тел.*

### *Заряженная равномерно по поверхности сфера.*

$r \geq R \qquad Q = \sigma 4\pi R^2$




$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$= \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^2} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 {r_2}^2}.$$