§ 3. Предел и непрерывность функций

Опр. 20. Пусть даны два множества X и Y. Если каждому элементу x, $x \in X$ по определенному правилу (закону) f ставится в соответствие один элемент y, $y \in \mathbf{Y}$ то говорят, что на множестве X задана функция f.

Пишут: $X \xrightarrow{f} Y$ или $y = f(x)$

Основные элементарные функции:

Алгебраические: $y=C$ $y=x^{\alpha}$

Трансцендентные: $y=a^{x}$ $y=\log_a x$

Тригонометрические: $y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=\operatorname{tg} x$ $y=\operatorname{ctg} x$

Обратные тригонометрические: $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\operatorname{arctg} x$ $y=\operatorname{arcctg} x$

ТЕСТ в электронном курсе Т 3.0 ВЫПОЛНИТЬ!

Опр. 21. Функция, которая состоит из конечного числа алгебраических операций над основными элементарными функциями называется элементарной функцией

пропустить 5 клеточек

Общие свойства функций

Опр. 22. Функция $y=f(x)$ называется ограниченной, если

$$\exists C \in R \quad \forall x \in D[y] \quad | f(x) | \leq C$$

Опр. 23. Функция $y = f(x)$ называется

a) возрастающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$;

b) убывающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$;

c) невозрастающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$;

d) неубывающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Опр. 24. ε-окрестностью точки $x_0 \in$ R называется множество точек x из R таких, что расстояние от x до x_0 не превышает ε.

Пишут $U(x_0, \varepsilon) = \{x:\ x \in R,\ | x - x_0 | < \varepsilon\}$

Опр. 25. Проколотой ε-окрестность точки x_0, называется множество

$$\mathring{U}(x_0, \varepsilon) = \{x:\ x \in R,\ 0 < | x - x_0 | < \varepsilon\}$$

26. Определение предела функции (на языке ε–δ) (по Коши)

В силу полноты множества R $\forall a, b \in R, \quad a \neq b \ (a < b) \quad \exists c \in R: \ a < c < b$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Число A называется **пределом** (предельным значением**)** функции $f(x)$ при x стремящимся к x_0, если по любому сколь угодно малому числу $\varepsilon > 0$ всегда можно найти положительное δ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \ \ | x - x_0 | < \delta \ \ | f(x) - A | < \varepsilon$$

пропустить 1 страницу

Опр. 27. Определение предела функции по Гейне

(на языке последовательностей).

Пусть $y=f(x)$ определена в $\mathring{U}(x_0, \varepsilon)$. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в т. x_0 при $x \to x_0$, если

$$\forall \{x_n\} \in \mathring{U}(x_0, \varepsilon) \quad \text{из} \quad x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to A.$$

То есть верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

пропустить 10 строк

Замечание: Определение по Коши равносильно определению по Гейне

Следствия из замечания:

1. Функция $f(x)$ не может иметь двух пределов, т.к. сходящаяся последовательность $f(x_n)$ имеет 1 предел.

2. Все свойства, характерные для предела последовательности, будут иметь место и для предела функции.

Свойства пределов функции

(Можно переписать, а можно иметь ввиду)

1. О локальной ограниченности.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда $\exists\ U(x_0, \varepsilon)$, в которой $|f(x)| \le M$.

2. Об устойчивости знака функции.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \ne 0$. Тогда $\exists\ \mathrm{U}(x_0, \varepsilon)$, в которой $\operatorname{sign}\big(f(x)\big) = \operatorname{sign} A$.

3. Если $y = f(x)$ имеет предел, то ее можно представить как сумму постоянной, равной этому пределу и б.м.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \alpha(x) - \text{б.м.}$$

4. Об арифметических операциях.

Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. *Тогда*

$a)\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

$b)\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

$c)\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{A}{B}, \qquad B \ne 0$

О предельном переходе

5. Пусть $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ $f(x) \le g(x)$, $\exists$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$
Тогда, $A \le B$

6. Пусть $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ $f(x) \le F(x) \le g(x)$ и $\exists$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$
Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} F(x) = A$

7. О пределе сложной функции.

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ $\lim\limits_{y \to b} F(y) = A$

Пусть $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ $f(x) \ne b$ (т.е. $f(x)$ не $const.$).

Тогда в точке x_0 существует предел сложной функции $F(f(x))$ и

$$\lim_{x \to x_0} F(f(x)) = \lim_{y \to b} F(y)$$

8. Имеют место аналогичные свойства б.м. и б.б. функций.
б.м. функции
а) если $\alpha(x)$ – б.м., то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – б.б.
б) $\alpha(x) + \beta(x) + \ldots + \tau(x) = \gamma(x)$ – сумма конечного числа б.м. есть б.м.
в) $\alpha(x) \cdot M(x) = \beta(x)$ – произведение б.м. на ограниченную есть б.м.
г) $\alpha(x) \cdot \beta(x) = \gamma(x)$ – произведение б.м. на б.м. есть б.м.
д) $\alpha(x) \cdot c = \gamma(x)$ – произведение б.м. на $const$ есть б.м.

б.б. функции
е) $F(x) + G(x) = R(x)$ – сумма б.б. одного знака есть б.б.
ж) $F(x) \cdot M(x) = R(x)$ – произведение б.б. на ограниченную и $\neq 0$ есть б.б.
з) $F(x) + M(x) = R(x)$ – сумма б.б. и ограниченной есть б.б.

пропустить 0,5 страницы

§ 4. Односторонние пределы

Опр. 28. Число А называется правосторонним пределом $f(x)$, если

по Коши: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \ \forall x \in R: \quad 0 < x - x_0 < \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$

по Гейне: $\forall \{x_n\}: \ x_n > x_0, x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ выполняется $f(x_n) \to A$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

Опр. 28*. Число А называется левосторонним пределом $f(x)$, если

по Коши: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \ \forall x \in R: \quad -\delta < x - x_0 < 0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$

по Гейне: $\forall \{x_n\}: \ x_n < x_0, \ x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ выполняется $f(x_n) \to A$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

Теорема 4 (о существовании предела)

Для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал левосторонни и правосторонний пределы $f(x)$ и они оба были равны. В этом случае их значение и является двусторонним пределом $f(x)$ в точке x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

пропустить 0,5 страницы

§ 5. Непрерывность функций

Опр. 29. Ф. $y = f(x)$ называется непрерывной справа в x_0, если $\exists$ правосторонний предел и

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Ф. $y = f(x)$ называется непрерывной слева в x_0, если $\exists$ левосторонний предел и

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Опр. 30. $y = f(x)$ называется непрерывной в x_0, если

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Опр. 30*. $y = f(x)$ называется непрерывной в x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Б. м. приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$ соответствует б. м. приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

Общие свойства непрерывных функций

1. Всякая основная элементарная функция непрерывна в своей области определения.

пропустить 10 клеточек

Доказать для каждой

2. Сумма, произведение, частное непрерывных на (a,b) функций есть непрерывная на (a,b) функция

3. Непрерывность композиции элементарных функций.

Если $u = \phi(x)$ – непрерывна в x_0

$y = f(u)$ – непрерывна в u_0

то сложная функция $y = f(\phi(x))$ непрерывна в x_0

Следствие. Операция предельного перехода перестановочна.

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = f(\lim_{x\to x_0} u(x))$$

пропустить 4 клеточки

Точки разрыва и их классификация

Опр. 31. Т. x_0 называется точкой разрыва ф. $y = f(x)$, если для нее не выполняется определение непрерывности.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Т. x_0 - точка устранимого разрыва, если $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$

область 3х5 клеточек

$$но \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Т. x_0 - точка скачка (разрыв I рода), если

область 3х5 клеточек

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = B \quad и \quad A \neq B$$

Т. x_0 - точка разрыва II рода, если

хотя бы один из односторонних пределов ∞ или $\nexists$.

область 3х5 клеточек

План исследования функции на непрерывность

1. Найти точки, подозрительные на разрыв
2. Найти $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ u $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Вычислить $f(x_0)$
3. Назвать характер разрыва
4. Построить график. (При необходимость вычислить $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$).