**Бесконечно малые и бесконечно большие.**

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются сравнимыми, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ или $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – сравнимые бесконечно малые при $x \to x_0$, и пусть, для определенности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Тогда:

а) Если $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка $\alpha = O(\beta)$. В частности, при $C = 1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными и пишут $\alpha \sim \beta$.

б) Если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$. Если при этом существует действительное число $r > 0$ такое, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)^r} \neq 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой порядка $r$ относительно $\beta(x) : \alpha = O\left(\beta^r\right)$.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty$.

Подобно тому как это сделано выше для бесконечно малых, вводится понятие сравнимых бесконечно больших и их классификация.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых:

$1^{\circ}$. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями, т.е. если* $\gamma = \alpha\beta$, *то* $\gamma = o(\alpha)$ *и* $\gamma = o(\beta)$.

$2^{\circ}$. *Бесконечно малые* $\alpha$ *и* $\beta$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность* $\alpha - \beta = \gamma$ *является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* $\alpha$ *и* $\beta$, *т.е.* $\gamma = o(\alpha)$ *и* $\gamma = o(\beta)$, *то* $\alpha \sim \beta$.

$3^{\circ}$. *Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой, т.е. если* $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = m$, $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, *то* $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = m$.

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых: если $x \to 0$, то

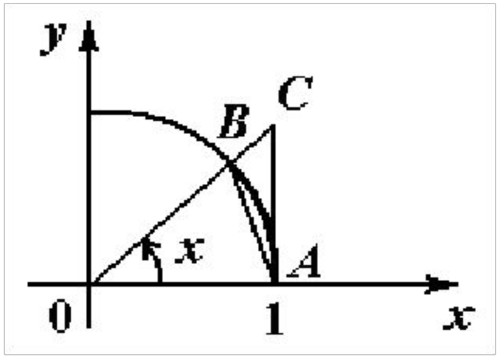
$$\sin x \sim x,\ tgx \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ arctgx \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x.$$

**Два замечательных предела.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\approx 2{,}71828. \qquad (2)$$

## Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$




Пусть $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $S_{\Delta OAB}<S_{\text{сект.}OAB}<S_{\Delta OAC}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin x<\frac{1}{2}x|OA|^2<\frac{1}{2}|OA|\cdot|AC|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx\Rightarrow\sin x<x<tgx$$

(*использована формула площади сектора с радиусом $R$ и центральным углом $x$: $S=\dfrac{1}{2}xR^2$*).

Отсюда (у нас $x>0,\sin x>0,tgx>0$) $\dfrac{1}{\sin x}>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{tgx}\Rightarrow$(*умножаем на $\sin x>0$*)$\Rightarrow 1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$. Так как $\lim\limits_{x\to 0+}1=1$, $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=\cos 0=1$ (*$\cos x\in C\{0\}$*), то $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Далее, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=$(*$x=-t,\ t=-x,\ t\to 0+$*)$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin(-t)}{-t}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t}{t}=$(*по доказанному*)=1. Теперь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

**Пример.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

**Решение:** Так как $x \neq 0$ под знаком предела, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{3x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$

**Пример.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

**Решение:** Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}.$$

Положим $\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{1}{y}$. Тогда $x=y-\dfrac{1}{2}$ и при $x\to+\infty$, $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y-\frac{1}{2}}=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{3}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{3}$$

**Пример.** Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

**Решение:** Имеем:

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}=\lim\limits_{t=\frac{-2}{2+x}\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{2+x}\cdot 3x=-6$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{2x}=e^{-6}$.

(здесь использована непрерывность композиции непрерывных функций).

**Пример.** Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

**Решение:** Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть: $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\dfrac{8x-3}{x^2-3x+7}$.

Таким образом, при $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (неопределенность вида $1^\infty$). Преобразуя функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}}.$$

Так как $\dfrac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$ при $x\to\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} = e.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-3x}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}} = 8$, находим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = e^8.$$

**Пример.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}$.

**Решение:** Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми: $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x$. $tgx^2 \sim x^2$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3.$$

**Пример.** Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

**Решение:** Так как

$\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\ln(1-x) \sim (-x)$

при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = -1.$$

**Пример.** Пусть $t$ – бесконечно малая. Сравнить бесконечно малые $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ и $\beta = 3t^2 + 2t^3$.

**Решение:** Имеем $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5t^2 + 2t^5}{3t^2 + 2t^3} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5 + 2t^3}{3 + 2t} = \dfrac{5}{3}$.

Так как предел отношения $\alpha$ и $\beta$ есть число, отличное от нуля, то $\alpha$ и $\beta$ – бесконечно малые одного и того же порядка.

**Пример.** Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\sin^2 t$ и $\beta = 2t\sin t$, при $t \to 0$.

**Решение:** Здесь $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\sin^2 t}{2t\sin t} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\sin t = 0$, т.е. $\alpha = o(\beta)$.

**Пример.** Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\ln(1+t)$ и $\beta = t\sin t$, при $t \to 0$.

**Решение:** Находим

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0}\frac{t\ln(1+t)}{t\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = 1,$$

т.е. $\alpha \sim \beta$.

**Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва.** Функция $y = f(x)$ с областью определения $D$ называется *непрерывной* в точке $x_0$, если выполнены следующие три условия:

а) функция $y = f(x)$ определена в точке $x_0$, т.е. $x_0 \in D$;

б) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если а) выполнено, то условия б) и в) эквивалентны следующему:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f\left(x_0, \Delta x\right) = 0,$$

где

$$\Delta f\left(x_0, \Delta x\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$$

– *приращение функции* $y = f\left(x\right)$ в точке $x_0$, соответствующее *приращению аргумента* $\Delta x = x - x_0$.

Если в точке $x_0$ нарушено хотя бы одно из условий а)-в), то $x_0$ называется точкой разрыва функции $y = f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке $x_0$ или нарушено условие $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В этом случае $x_0$ называется *точкой устранимого разрыва* функции.

б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует. Если при этом существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ (очевидно, не равные друг другу), то $x_0$ называется *точкой разрыва* 1-*го рода*.

в) в остальных случаях $x_0$ называется *точкой разрыва* 2-*го рода*.

**Односторонние пределы.** Если $x < a$ и $x \to a$, то условно пишут $x \to a - 0$; аналогично, если $x > a$ и $x \to a$, то это записывается так: $x \to a + 0$. Числа

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) \text{ и } f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

называются соответственно *пределом слева* функции $f(x)$ в точке $a$ и *пределом справа* функции $f(x)$ в точке $a$ (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$f(a-0) = f(a+0).$$

**Пример.** Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна для любого аргумента $x$.

**Решение:**

Имеем:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ и $\left|\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$,

то при любом $x$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Следовательно, функция $\sin x$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

**Пример.** Найти пределы справа и слева функции

$$f(x) = arctg\,\frac{1}{x}$$

при $x \to 0$.

**Решение:**

Имеем:

$$f(+0) = \lim_{x \to +0}\left(arctg\,\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

и

$$f(-0) = \lim_{x \to -0}\left(arctg\,\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Предела же функции $f(x)$ при $x \to 0$ в этом случае, очевидно, не существует.

**Пример.** Найти левый и правый пределы функции

$$f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$$

при $x \to 3$.

**Решение:**

Если $x \to 3-0$, то $\dfrac{1}{x-3} \to -\infty$ и $2^{\frac{1}{x-3}} \to 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x)=\dfrac{1}{3}$.

Если же $x \to 3+0$, то $\dfrac{1}{x-3} \to +\infty$, $2^{\frac{1}{x-3}} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x)=0$.

**Пример.** Найти левый и правый пределы функции

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-a}} \qquad \text{при } x \to a.$$

**Решение:** Если $x \to a-0$, то $\dfrac{1}{x-a} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = 0$.

Если же $x \to a+0$, то $\dfrac{1}{x-a} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$.

**Пример.** Показать, что при $x = 4$ функция $y = \dfrac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

**Решение:** Находим $\lim\limits_{x \to 4-0} \dfrac{x}{x-4} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4+0} \dfrac{x}{x-4} = +\infty$. Таким образом, функция при $x \to 4$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва II рода.

**Пример.** Показать, что при $x = 4$ функция $y = arctg\,\dfrac{1}{x-4}$ имеет разрыв.

**Решение:** Если $x \to 4-0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4-0} y = -\dfrac{\pi}{2}$. Если же $x \to 4+0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4+0} y = \dfrac{\pi}{2}$. Итак, при $x \to 4$ функция имеет как правый так и левый конечный предел, причем эти пределы различны. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва I рода – точкой скачка. Скачок функции в этой точке равен $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.