

# Решение вычислительных задач на компьютере

§ 69. Точность вычислений

§ 70. Решение уравнений

§ 71. Дискретизация

§ 72. Оптимизация

§ 73. Статистические расчёты

§ 74. Обработка результатов  
эксперимента

# Решение вычислительных задач на компьютере

## **§ 69. Точность вычислений**

# Погрешности измерений

*«Недостатки математического образования с наибольшей отчетливостью проявляются в чрезмерной точности численных расчетов».*

*Карл Фридрих Гаусс.*

**Погрешность** (ошибка) – отклонение измеренного или вычисленного значения от истинного значения.



цена деления 0,1 см

измерено

8,2 см

фактически

**8,1 ... 8,3 см**

7,8 см

**7,7 ... 7,9 см**

**Толщина дна:**

вычислено

0,4 см

фактически

**0,2 ... 0,6 см**

**$0,4 \pm 0,2$  см**

# Погрешности измерений

абсолютная  
погрешность  $\Delta x$

$0,4 \pm 0,2$  см



Можно ли оценить  
точность измерений?

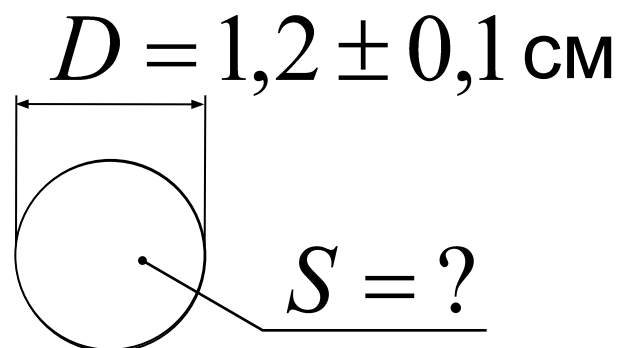
**Относительная погрешность:**

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x^*}$$

измеренное  
значение

$$\delta_x = \frac{0,2}{0,4} = 0,5 = 50\%$$

# Погрешности вычислений



$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 1,1309733552923255658465516179806\dots$$

$$S_{\min} = \frac{\pi \cdot 1,1^2}{4} = 0,950\dots$$

$$S_{\max} = \frac{\pi \cdot 1,3^2}{4} = 1,327\dots$$

$$S = 1,1 \pm 0,2 \text{ с}$$

М

$$\delta_x = \frac{0,2}{1,1} \cdot 100\% \approx 18\%$$

Все практические расчеты выполняются неточно. Погрешность результата вычислений определяется погрешностью исходных данных.

# Погрешности вычислений

$$x = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$$

$$a = 1000 \pm 0,001; \quad b = 0,002 \pm 0,001;$$

$$c = 1000 \pm 0,001; \quad d = 0,003 \pm 0,001.$$

$$\delta_a = \delta_c = \frac{0,001}{1000} = 0,01\%$$

$$\delta_b = \frac{0,001}{0,002} = 50\% \quad \delta_d = \frac{0,001}{0,003} = 33\%$$

$$x = \frac{1000}{0,002} - \frac{1000}{0,003} = 166667$$

неточные числа  
в знаменателе

$$x_{\max} = \frac{1000}{0,001} - \frac{1000}{0,004} = 750000$$

$$x_{\min} = \frac{1000}{0,003} - \frac{1000}{0,002} = -166667$$

$$\delta_x = \frac{750000 - 166667}{166667} \approx 352\%$$

Метод **вычислительно неустойчив**: малые погрешности в исходных данных могут привести к большим погрешностям в решении.

# Погрешность вычислений с помощью функций MS Excel

С использованием встроенных функций Excel расчет доверительного интервала проводится следующим образом.

1) Рассчитывается среднее значение

**=СРЗНАЧ(число1; число2; ...)**

число1, число2, ... — аргументы, для которых вычисляется среднее.

2) Рассчитывается стандартное отклонение

**=СТАНДОТКЛОНП(число1; число2; ...)**

число1, число2, ... — аргументы, для которых вычисляется стандартное отклонение.

3) Рассчитывается абсолютная погрешность

**=ДОВЕРИТ(альфа ; станд\_откл; размер)**

альфа — уровень значимости используемый для вычисления уровня надежности.

( , т.е. означает надежности , для расчета возьмите равным 0,5 );

станд\_откл — стандартное отклонение, предполагается известным;

размер — размер выборки.

$$\alpha = 1 - \beta \quad \alpha = 0,05 \quad \beta = 0,95$$

**Относительная погрешность** – это отношение абсолютной погрешности к приближенному значению числа

# Источники погрешностей

---

- неточность **исходных данных**
- неточность записи **вещественных чисел** в двоичном коде конечной длины
- погрешности приближенного вычисления некоторых стандартных **функций** ( $\sin$ ,  $\cos$ , ...)
- накопление погрешностей при **арифметических действиях** с неточными данными
- погрешность **метода**



# Решение вычислительных задач на компьютере

## § 70. Решение уравнений

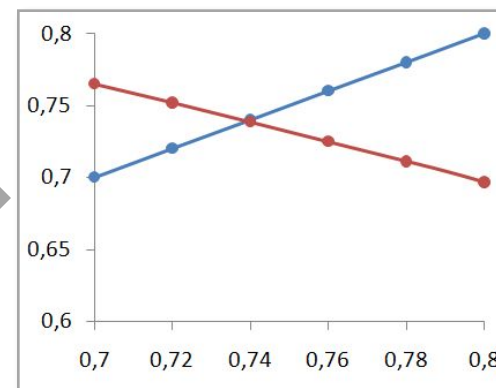
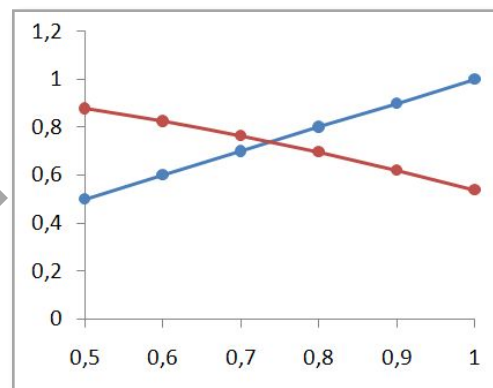
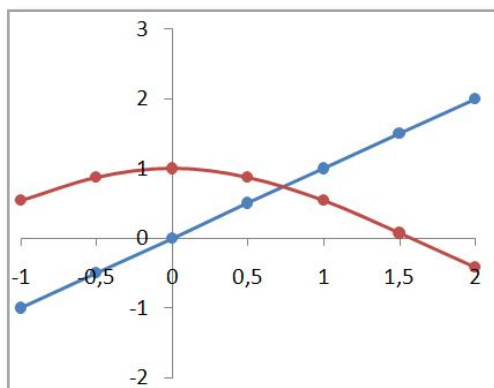
# Методы решения уравнений

Точные (аналитические) методы:

$$ax + b = 1, \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-b}{a}$$

$x = \cos x$   Как решать?

Графический метод:



Можно поручить такой поиск компьютеру!

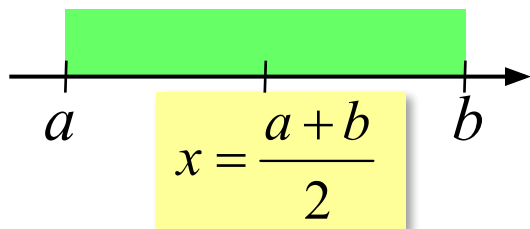


Можно ли получить точное решение?

# Приближённые методы

## Сжатие отрезка:

- 1) выбрать начальный отрезок  $[a_0, b_0]$  (одно решение!)
- 2) уточнить решение с помощью некоторого алгоритма:  $\Rightarrow [a, b]$
- 3) повторять шаг 2, пока длина отрезка  $[a, b]$  не станет достаточно мала



Что лучше выбрать в качестве решения?



Как оценить ошибку?

$$|x - x^*| \leq \frac{b - a}{2}$$

Завершение работы:

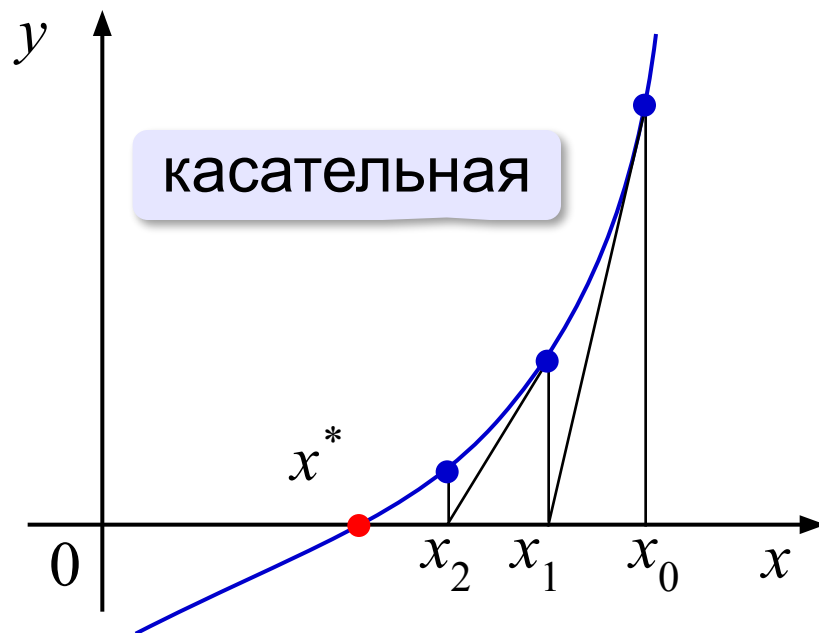
$$b - a \leq 2\varepsilon$$

допустимая  
ошибка

# Приближенные методы

## По одной точке:

- 1) выбрать начальное приближение  $x_0$
- 2) уточнить решение с помощью некоторого алгоритма:  
 $\Rightarrow x$
- 3) повторять шаг 2, пока два последовательных приближения не будут отличаться достаточно мало



## Завершение работы:

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$$

метод Ньютона  
(метод касательных)

# Приближенные методы

**Итерационные методы** (лат. *iteratio* – повторение) – основаны на многократном выполнении одинаковых шагов, каждый из которых уточняет решение.

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

следующее  
приближение

предыдущее  
приближение



- дают какое-то решение, если точное неизвестно
- могут давать меньшие ошибки, чем вычисления по точным формулам

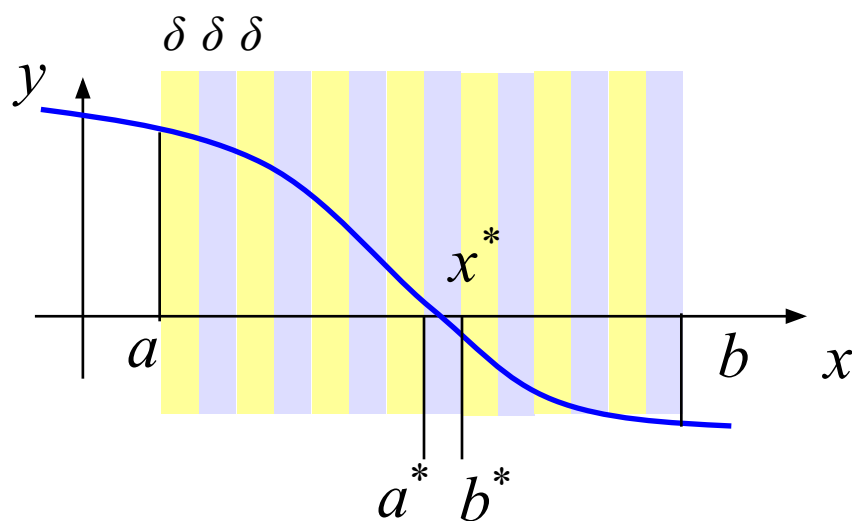


- решение приближенное:  $x \approx 1,23345$
- ответ – число (зависимость от параметра?)
- большой объем вычислений
- не всегда просто оценить погрешность

# Метод перебора

$$f(x) = 0 \quad x = \cos x \quad \Rightarrow \quad x - \cos x = 0$$

**Задача.** Найти решение уравнения справа от точки  $x = a$  с точностью  $\varepsilon$ .



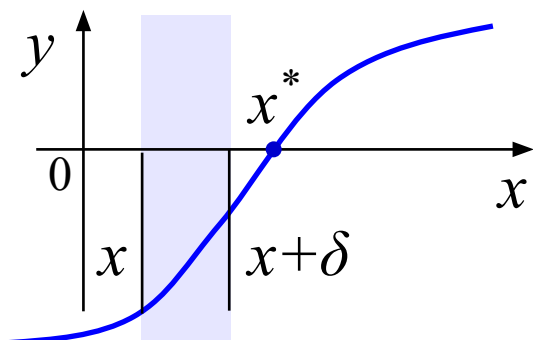
## Алгоритм:

- 1) разбить отрезок  $[a, b]$  на полосы шириной  $\delta = 2\varepsilon$
- 2) найти полосу  $[a^*, b^*]$ , в которой находится  $x^*$
- 3) решение:

$$x^* \approx \frac{a^* + b^*}{2}$$

# Есть ли решение на $[x, x+\delta]$ ?

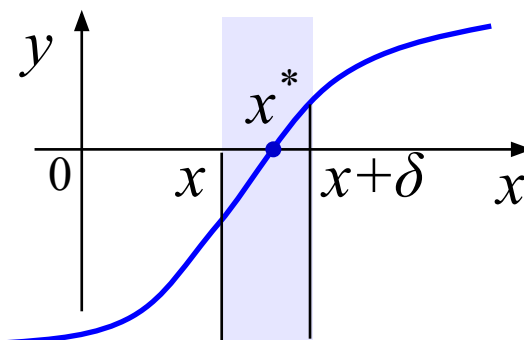
нет решения



$$f(x) < 0$$

$$f(x+\delta) < 0$$

есть решение!



$$f(x) < 0$$

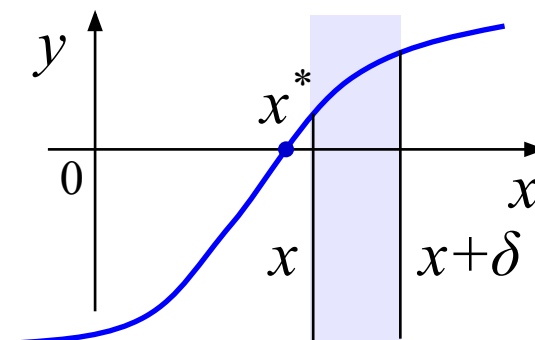
$$f(x+\delta) > 0$$



В чём отличие?

$$f(x)f(x+\delta) \leq 0$$

нет решения



$$f(x) > 0$$

$$f(x+\delta) > 0$$



Если *непрерывная* функция  $f(x)$  имеет разные знаки на концах интервала  $[a, b]$ , то в некоторой точке  $x^*$  внутри  $[a, b]$  она равна 0, то есть  $f(x^*) = 0$ !

# Метод перебора ( $a = 0$ )

```
алг Перебор
нач
  вещ eps, x, delta
  eps := 0.001
  x := 0 | x := a
  delta := 2*eps
  нц пока f(x)*f(x+delta) > 0
    x := x + delta
  кц
  вывод 'x = ', x+eps
кон
```



Когда остановится?



Зацикливание?

```
алг вещ f( вещ x )
нач
  знач := x - cos(x)
кон
```



## Метод перебора ( $a = 0$ )

```
const eps = 0.001;  
var x, delta: real;
```

```
function f(x: real): real;  
begin  
    f := x - cos(x)  
end;
```

```
begin  
    x := 0; {x := a;}  
    delta := 2*eps;  
    while f(x)*f(x+delta) > 0 do  
        x := x + delta;  
    writeln('x = ', (x+eps):6:3)  
end.
```





Когда остановится?



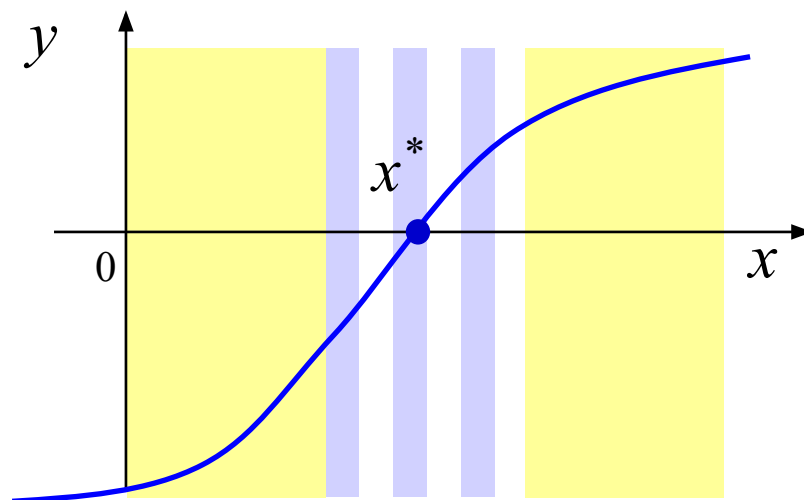
Зацикливание?

# Метод перебора

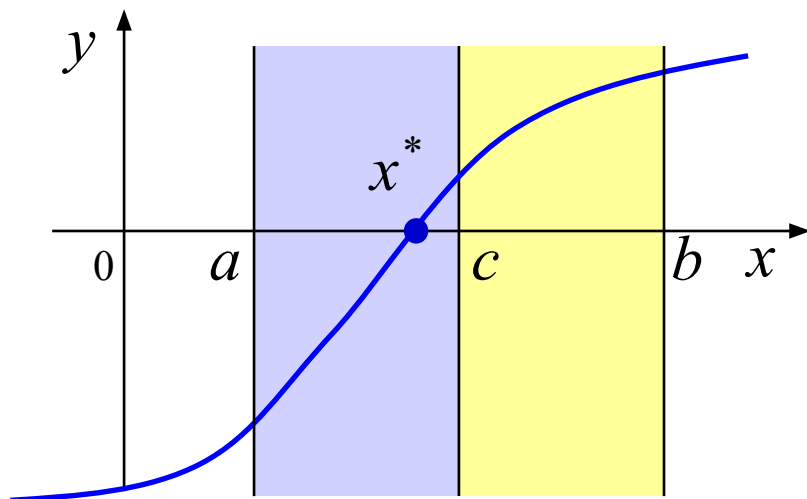
-  **▪ простота**
  - можно получить решение с любой заданной точностью**
-  **▪ большой объем вычислений**

## Усовершенствованный перебор:

- 1) **отделение корней** – перебор с большим шагом
- 2) **уточнение корней** – перебор с шагом  $2\varepsilon$



# Метод деления отрезка пополам



## Алгоритм:

- 1) вычислить середину отрезка:  $c = \frac{a+b}{2}$
- 2) если на отрезке  $[a, c]$  есть решение, присвоить  $b := c$ , иначе  $a := c$
- 3) повторять шаги 1-2 до тех пор, пока  $b - a > 2\varepsilon$

**?** Что напоминает?

**?** п.2: как определить, есть ли решение?

$$f(a) \cdot f(c) \leq 0$$

Вариант:  $\text{sign}[f(a)] \neq \text{sign}[f(c)]$

$$\text{sign } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

# Метод деления отрезка пополам

## Алгоритмический язык:

```
delta := 2*eps
нц пока b - a > delta
  c := (a + b) / 2
  если f(a)*f(c) <= 0 то
    b := c
  иначе
    a := c
все
кц
вывод 'x = ', (a+b)/2
```

~~sign(f(a)) <> sign(f(c))~~

 Как меняется длина отрезка?

 За сколько шагов уменьшится в 1000 раз?

# Метод деления отрезка пополам

Паскаль:

```
delta := 2*eps;  
while b - a > delta do begin  
  c := (a + b) / 2;  
  if f(a)*f(c) <= 0 then  
    b := c  
  else a := c;  
end;  
writeln('x = ', (a+b)/2:6:3);
```

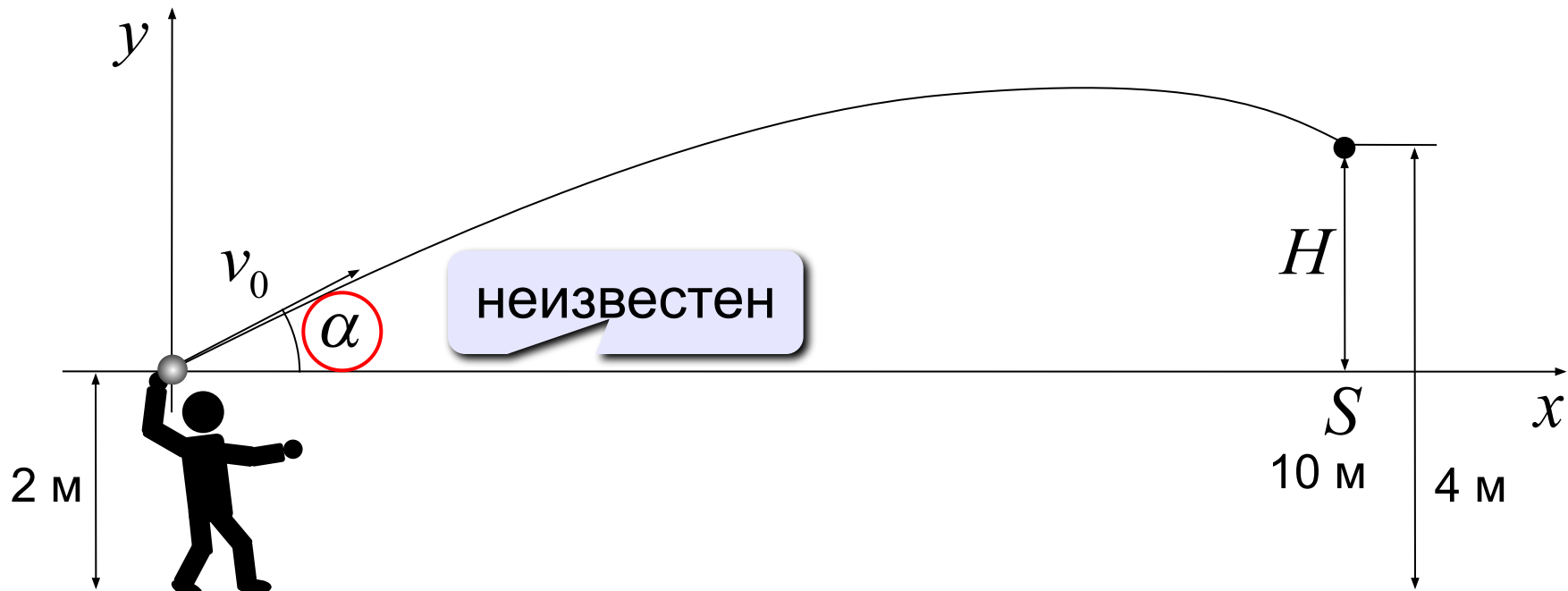


Как меняется длина отрезка?



За сколько шагов уменьшится в 1000 раз?

# Полёт мяча



$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha,$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

# Полёт мяча

Задача. Найти **угол  $\alpha$**  (и время  $t$ ) при котором  $x = S$  и  $y = H$ :

$$S = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad H = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Решение:

$$t = \frac{S}{v_0 \cdot \cos \alpha} \rightarrow H = \frac{\cancel{v_0} \cdot S \cdot \sin \alpha}{\cancel{v_0} \cdot \cos \alpha} - \frac{g \cdot S^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

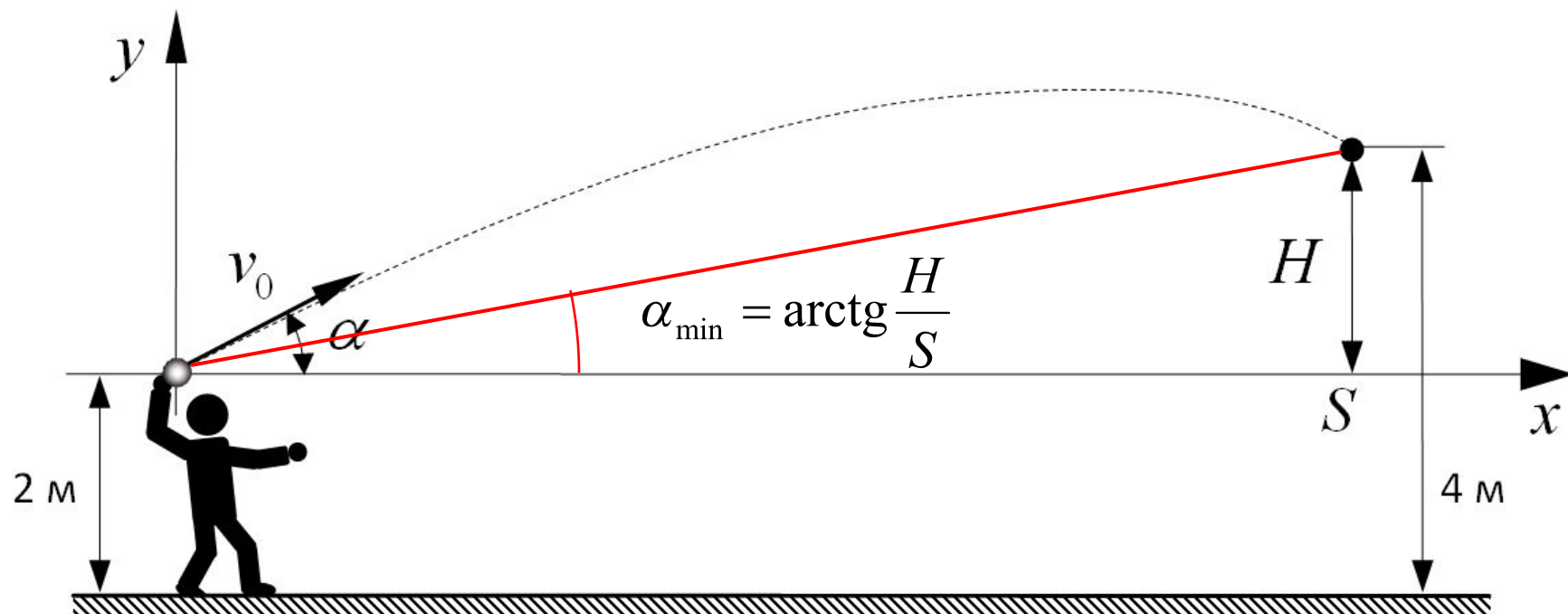
$$f(\alpha) = S \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot S^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - H = 0$$

Диапазон углов для поиска:  $[0^\boxtimes \dots 90^\boxtimes]$   $\Rightarrow$   $\left[ 0 \dots \frac{\pi}{2} \right]$



Как уточнить?

# Уточнение диапазона углов



Диапазон углов для поиска:  $\left[ \operatorname{arctg} \frac{H}{S} \dots \frac{\pi}{2} \right]$



# Полёт мяча

Программа на алгоритмическом языке:

```
pi := 3.1415926
u := 0
delta := 2*eps
нц пока u < pi/2
  если f(u)*f(u+delta) <= 0 то
    вывод 'Угол: ', (u+eps)*180/pi
    вывод ' градусов', нс
  все
  u := u + delta
кц
```

$$\alpha_1 \approx 35,6^\circ \quad \alpha_2 \approx 65,8^\circ$$

# Полёт мяча

## Программа на языке Паскаль:

```
u := 0;  
delta := 2*eps;  
while u < pi/2 do begin  
  if f(u)*f(u+delta) <= 0 then begin  
    alpha := (u+eps)*180/pi;  
    writeln('Угол: ', alpha:4:1, ' градусов');  
  end;  
  u := u + delta  
end;
```

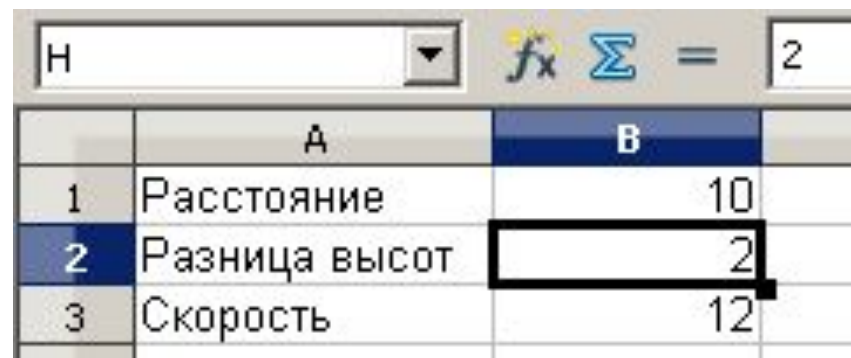
$$\alpha_1 \approx 35,6^\circ$$

$$\alpha_2 \approx 65,8^\circ$$

# Полёт мяча

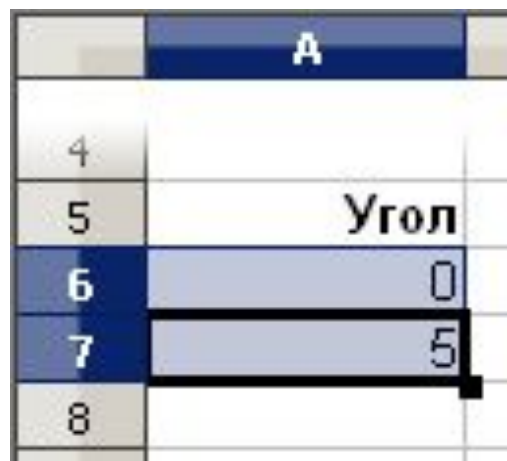
## Использование табличного процессора:

— имя ячейки  
или диапазона



	A	B
1	Расстояние	10
2	Разница высот	2
3	Скорость	12

## Диапазон углов:



	A
4	
5	Угол
6	0
7	5
8	

# Полёт мяча

	А	В	С	Д	Е
1	Расстояние	10			
2	Разница высот	2			
3	Скорость	12			
4					
5	Угол	Угол(рад)	Время	у	f(alpha)
6	0	=RADIANS(A6)	=S/W/COS(B6)	=v*SIN(B6)*C6-9,81*C6^2/2	=D6-H
7	5				
8	10				

**S**  $\Leftrightarrow$  **\$B\$1**

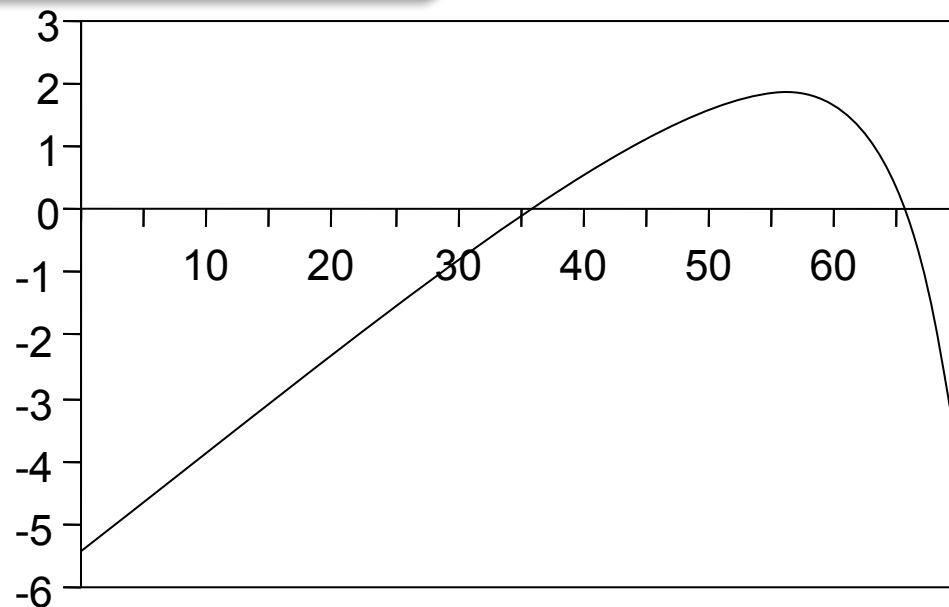
Excel: **РАДИАНЫ**

Диаграмма XY:

Excel: **Точечная**

$$\alpha_1 \approx 35^\circ$$

$$\alpha_2 \approx 65^\circ$$



# Полёт мяча

с графика!

	I	J	K	L
1	Угол	Угол(рад)	Время	у
2	35			f(alpha)

начальное приближение

целевая  
ячейка

Сервис – Подбор параметра:

нужно  
 $f(\alpha) = 0$

?

Как найти второе  
решение?

изменяем  
начальное  
приближение



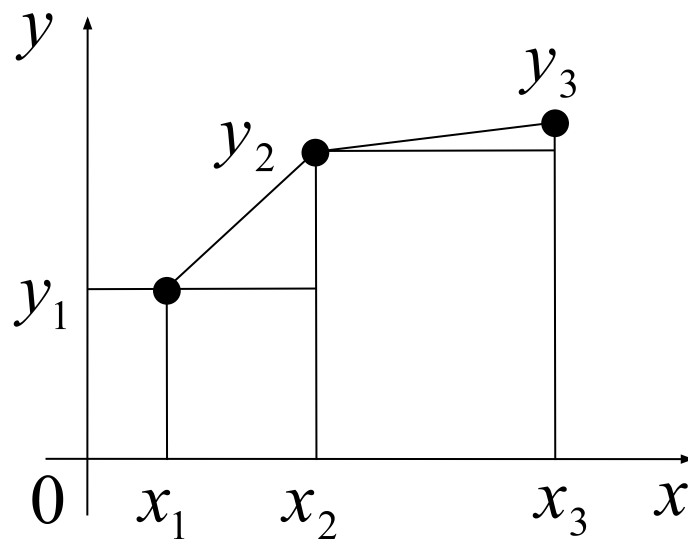
результат  
в H2!

# Решение вычислительных задач на компьютере

## **§ 71. Дискретизация**

# Вычисление длины линии

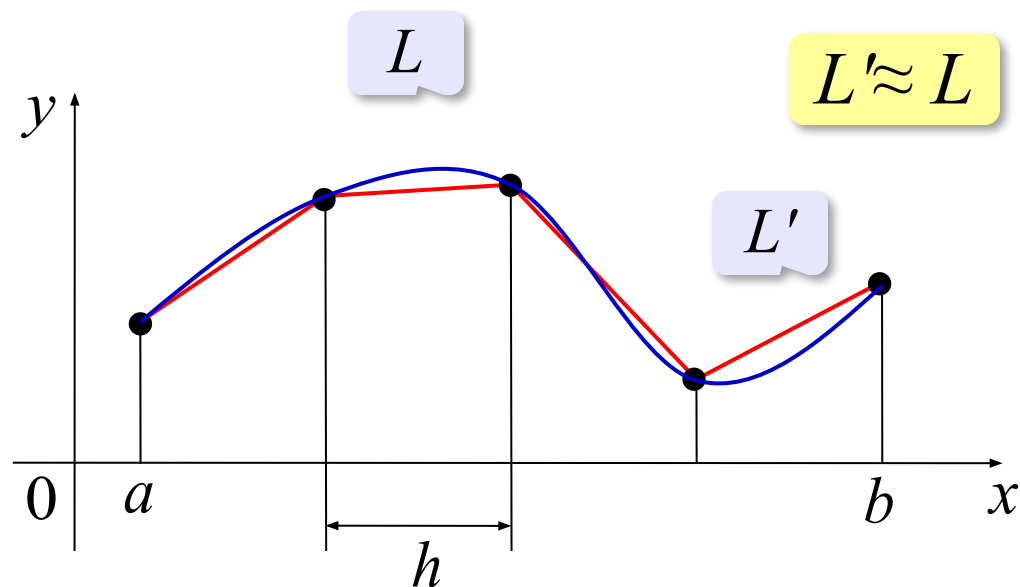
Ломаная:



$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

# Вычисление длины линии

Кривая:



шаг дискретизации



Выполнена дискретизация!



Как увеличить точность?



$\downarrow h$



# Дискретизация

---

- цель – представить задачу в виде, пригодном **для компьютерных расчётов**
- есть **потеря информации**
- методы **приближённые**
- для уменьшения погрешности нужно **уменьшать шаг дискретизации**



Что ухудшится?

- при малом шаге на результат могут сильно влиять **погрешности вычислений**

# Вычисление длины кривой

Программа на алгоритмическом языке:

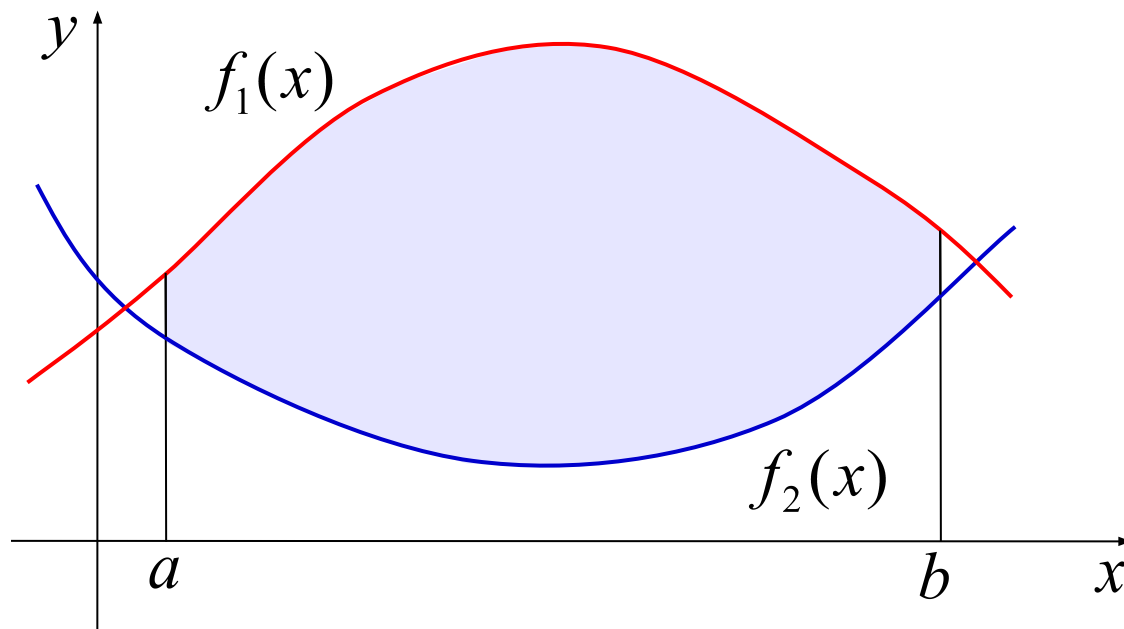
```
х := а
L := 0
нц пока х < b
  у1 := f (х)
  у2 := f (х+h)
  L := L + sqrt (h*h + (у1-у2) * (у1-у2) )
  х := х + h
кц
вывод ' Длина кривой ', L
```

# Вычисление длины кривой

## Программа на Паскале:

```
x := a ;  
L := 0 ;  
while x < b do begin  
  y1 := f (x) ;  
  y2 := f (x+h) ;  
  L := L + sqrt (h*h + (y2-y1) * (y2-y1)) ;  
  x := x + h  
end ;  
writeln ( ' Длина кривой ' , L:10:3) ;
```

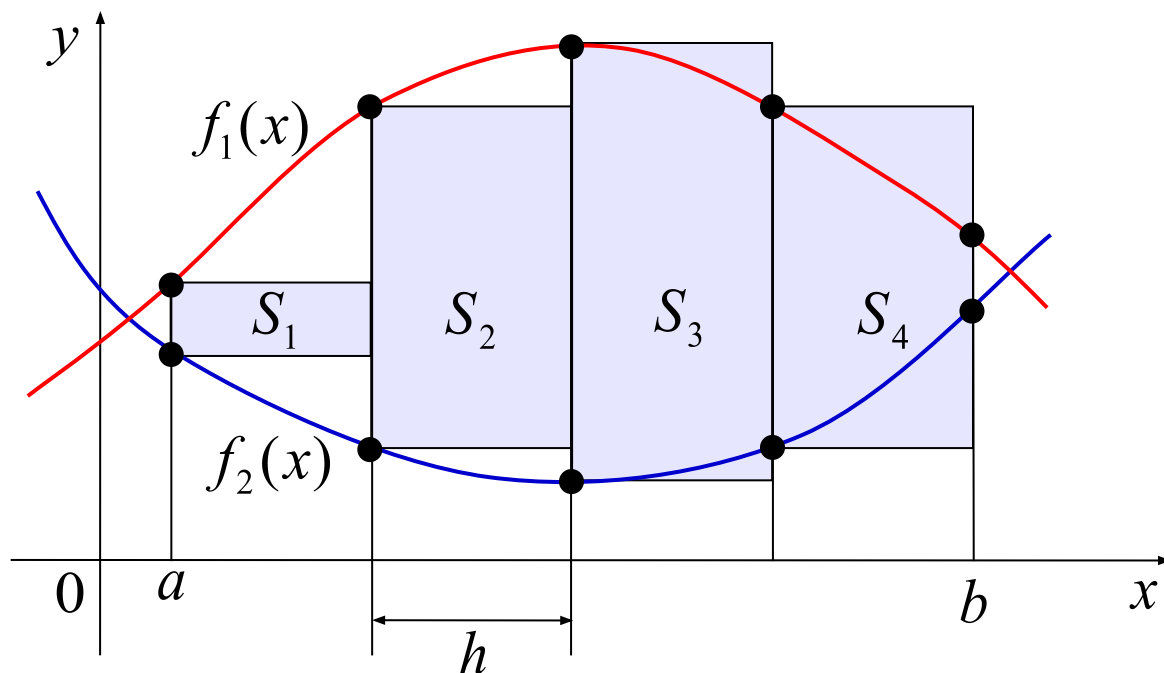
# Площадь фигуры



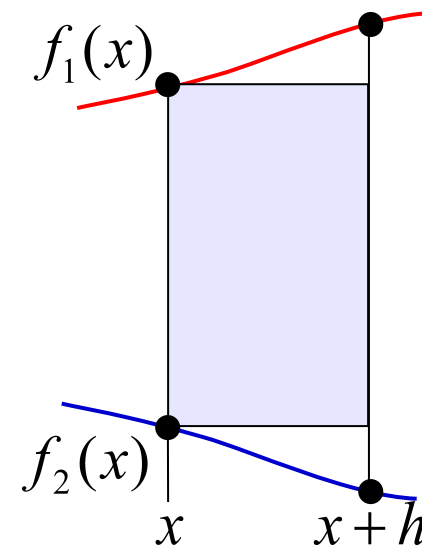
Аналитически решается не всегда!

# Дискретизация

## Метод прямоугольников:



$$S \approx S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$



$$S_x \approx h \cdot (f_1(x) - f_2(x))$$



Как улучшить?

# Метод прямоугольников

## Алгоритмический язык:

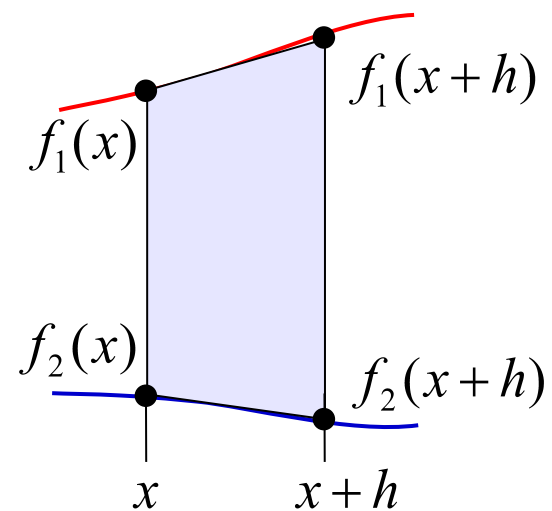
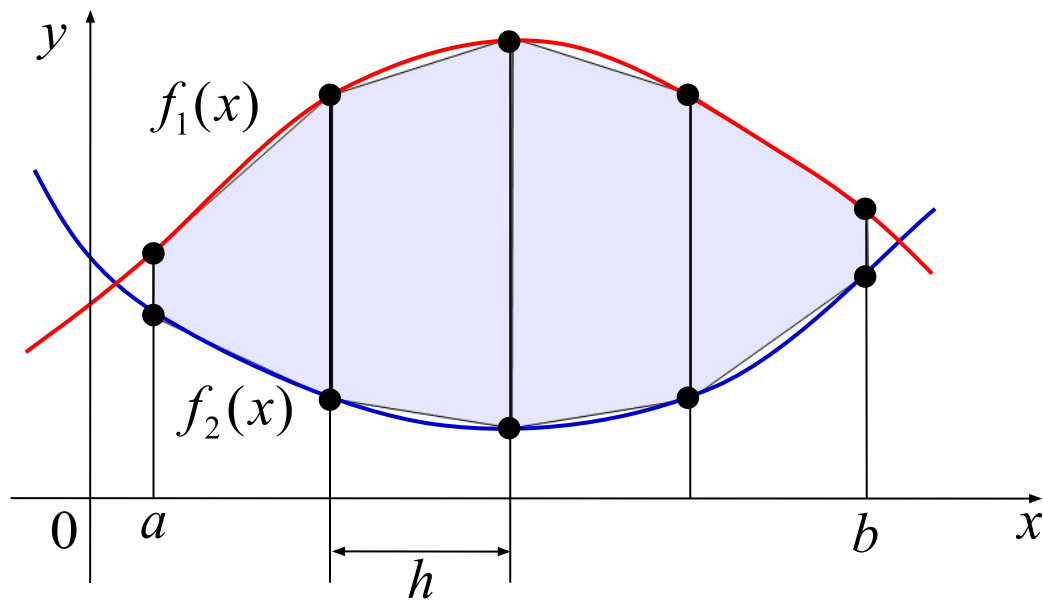
```
S := 0; x := a
нц пока x < b
  S := S + f1 (x+h/2) - f2 (x+h/2)
  x := x + h
кц
S := h*S
вывод ' Площадь ', S
```

в середине  
отрезка  $[x, x+h]$

## Паскаль:

```
S := 0; x := a;
while x < b do begin
  S := S + f1 (x+h/2) - f2 (x+h/2);
  x := x + h
end;
S := h*S;
writeln(' Площадь ', S:8:3);
```

# Метод трапеций



$$S_x = \frac{h}{2} \cdot [f_1(x) - f_2(x) + f_1(x+h) - f_2(x+h)]$$

# Метод трапеций

## Алгоритмический язык:

```

S := 0; x := a
нц пока x < b
  S := S + f1(x) - f2(x) + f1(x+h) - f2(x+h)
  x := x + h
кц
S := h*S/2
вывод 'Площадь', S

```

## Паскаль:



Как улучшить?

```

S := 0; x := a;
while x < b do begin
  S := S + f1(x) - f2(x) + f1(x+h) -
  f2(x+h)*h;
end;
S := h*S/2;
writeln('Площадь', S:8:3);

```



# Решение вычислительных задач на компьютере

## § 72. Оптимизация

# Что такое оптимизация?

**Оптимизация** – это поиск наилучшего (оптимального) решения задачи в заданных условиях.

1) **Цель**: выбрать неизвестный  $x$ , так чтобы

$$f(x) \rightarrow \min$$

или  $f(x) \rightarrow \max$

целевая функция

$$- f(x) \rightarrow \min$$

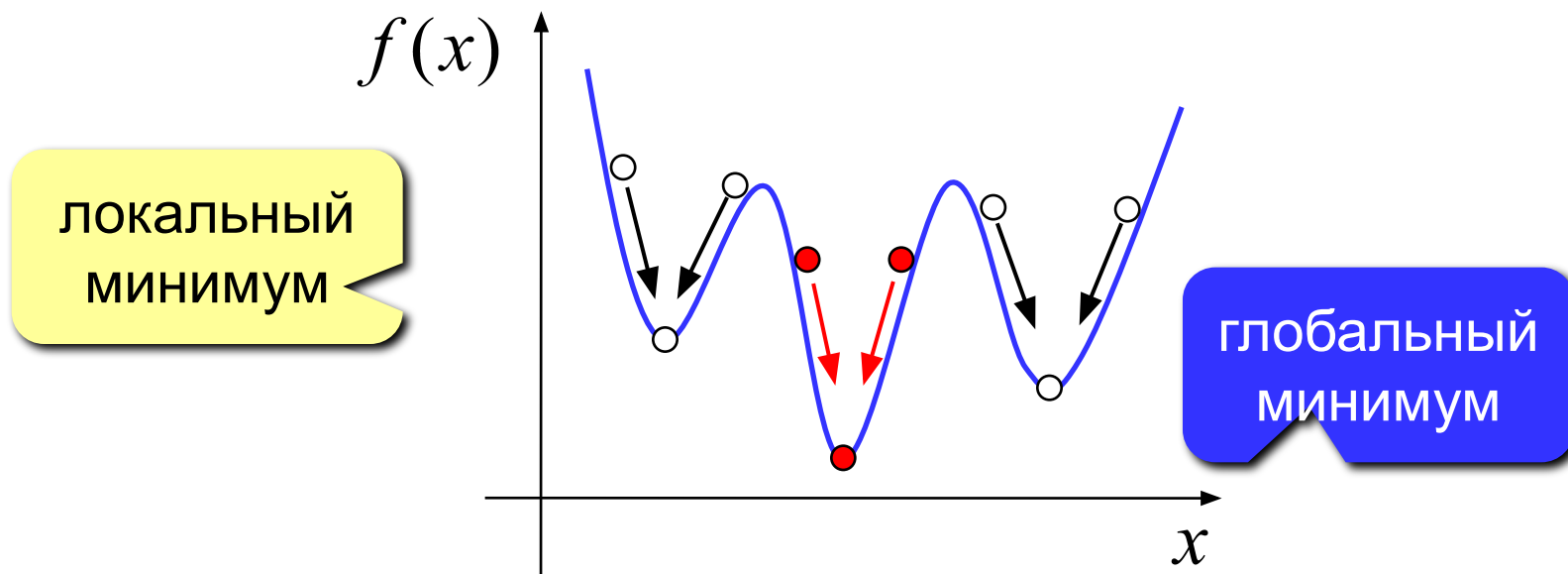
2) **Ограничения**

задача  
оптимизации



Почему неправильно «самый оптимальный»?

# Что такое минимум?

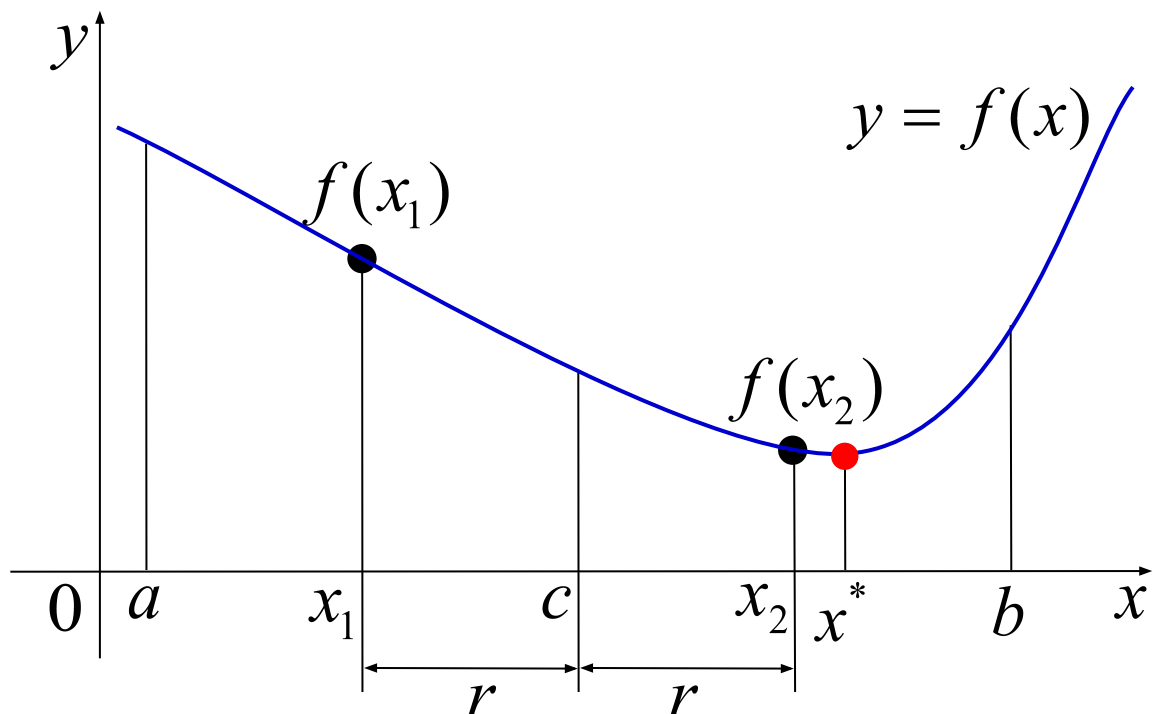


- обычно нужно найти **глобальный** минимум
- большинство численных методов находят только **локальный** минимум



Результат локальной оптимизации зависит от начального приближения!

# Метод дихотомии



## Алгоритм:

- 1) вычислить середину отрезка:  $c = \frac{a+b}{2}$
- 2) найти симметричные точки  $x_1 = c - r, x_2 = c + r$
- 3) если  $f(x_1) > f(x_2)$ , далее ищем на  $[x_1, b]$   
иначе ищем на  $[a, x_2]$

# Метод дихотомии

$$c = \frac{a+b}{2} \Rightarrow x_1 = c - r, \quad x_2 = c + r$$

**?** Как выбрать  $r$ ?

$$0 < r < \frac{b-a}{2} \Rightarrow r = k \cdot (b-a), \quad 0 < k < 0,5$$

Уменьшение интервала:

стало

было

$$\frac{b-a}{2} + k \cdot (b-a) = (0,5 + k) \cdot (b-a)$$

**!** Выгоднее выбирать  $k$  близко к нулю!

**?** Почему нельзя  $k = 0$ ?

# Метод дихотомии

## Алгоритмический язык:

```
k := 0.01
delta := 2*eps
нц пока b - a > delta
  r := k * (b - a)
  x1 := (a + b) / 2 - r
  x2 := (a + b) / 2 + r
  если f(x1) > f(x2) то
    а := x1
  иначе b := x2
все
кц
вывод 'x = ', (a+b) / 2
```



Как улучшить?

# Метод дихотомии

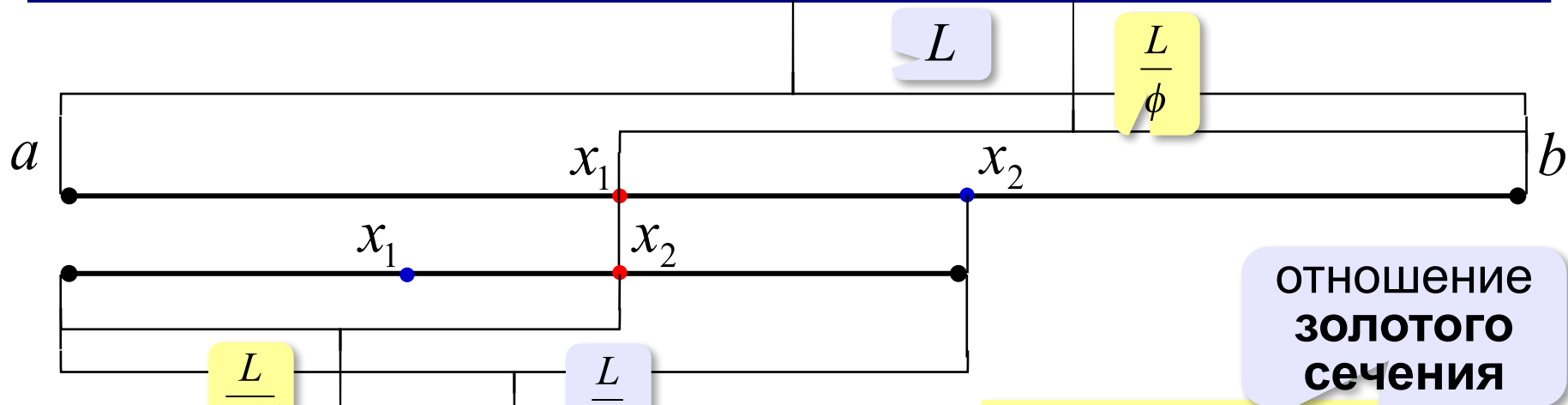
## Паскаль:

```
k := 0.01;  
delta := 2*eps;  
while b - a > delta do begin  
    r := k*(b - a);  
    x1 := (a + b) / 2 - r;  
    x2 := (a + b) / 2 + r;  
    if f(x1) > f(x2) then  
        a := x1  
    else b := x2  
end;  
writeln('x = ', (a+b) / 2 : 10 : 3 );
```



Как улучшить?

# Метод золотого сечения



ОТНОШЕНИЕ  
ЗОЛОТОГО  
СЕЧЕНИЯ

$$\frac{L}{\phi^2} = L - \frac{L}{\phi}$$

$$\Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow$$

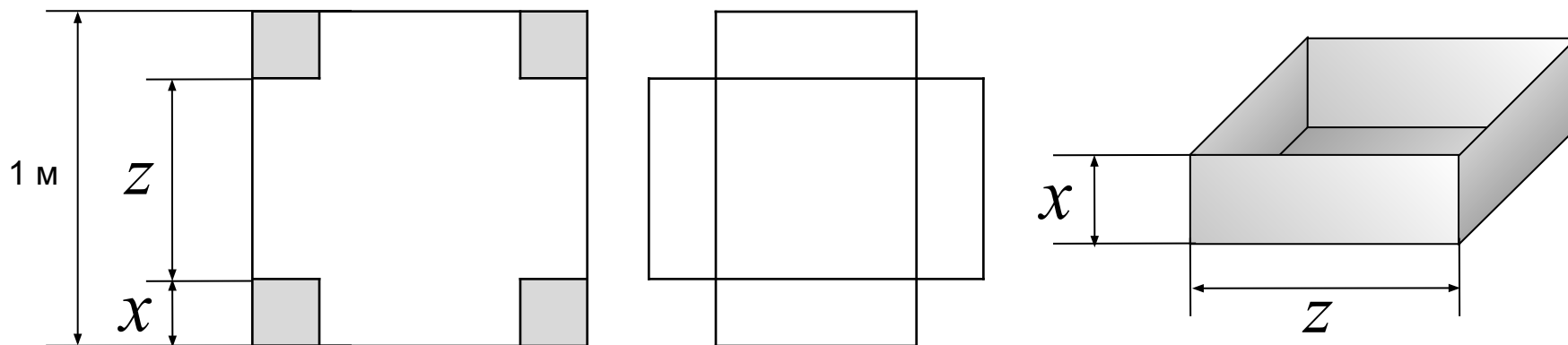
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$$

$$\phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx \text{✗} 0,618\dots$$

$$\frac{(b-a)}{\phi} = (0,5 + k) \cdot (b-a) \Rightarrow 0,5 + k = \frac{1}{\phi}$$



# Оптимальный раскрой листа



**Цель:**  $V(x) \rightarrow \max$   $V(x) = x \cdot (1 - 2x)^2 \rightarrow \max$

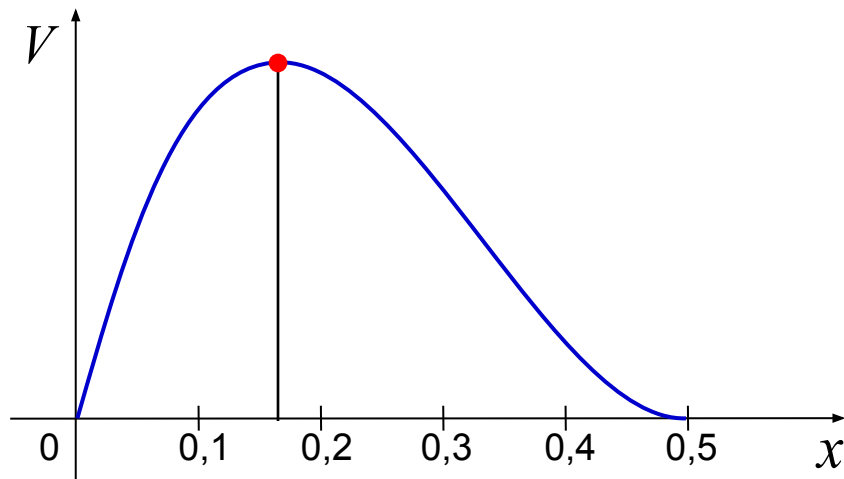
**?** Какие ограничения?

**Ограничения:**  $0 < x < 0,5$

**?** Какой результат ожидаете (по интуиции)?

# Оптимальный раскрой листа

В табличном процессоре:



начальное  
приближение  $\approx 0,2$



Какая формула в F2?

		E	F
1	x		Объем
2		0,200	0,072

# Оптимизация в табличном процессоре

**Задача оптимизации:** найти максимум (или минимум) целевой функции в ячейке ..., изменяя значения ячеек ... при ограничениях .....

## OpenOffice.org Calc:

модуль ***Solver for Nonlinear Programming***  
(входит в *LibreOffice*)

## Excel:

надстройка ***Поиск решения***

# Оптимизация в табличном процессоре

## OpenOffice.org Calc:

**Решатель**

Целевая ячейка:

Оптимизация результата:  Максимум  
 Минимум  
 Значение:

Путем изменения ячеек:

Ограничительные условия


Ссылка на ячейку	Операция	Значение
<input type="text" value="\$E\$2"/>	<input type="text" value="&gt;="/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="\$E\$2"/>	<input type="text" value="&lt;="/>	<input type="text" value="0,5"/>
<input type="text"/>	<input type="text" value="&lt;="/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text" value="&lt;="/>	<input type="text"/>

Параметры...    Справка    Закр<sup>ы</sup>ть    Решить

# Оптимизация в табличном процессоре


## Excel:

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:  

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:  

Ограничения:   
\$E\$2 >= 0

# Решение вычислительных задач на компьютере

## **§ 73. Статистические расчёты**

# Что такое статистика?

**Статистика** – это наука, которая изучает методы обработки и анализа больших массивов данных.

**Ряд данных:**  $x_1, x_2, \dots, x_n$

только числа!

**Свойства ряда данных:**

сумма: **=SUM (A1 : A20)**                      **=СУММ (A1 : A20)**

среднее: **=AVERAGE (A1 : A20)**            **=СРЗНАЧ (A1 : A20)**

минимальное: **=MIN (A1 : A20)**            **=МИН (A1 : A20)**

максимальное: **=MAX (A1 : A20)**           **=МАКС (A1 : 20)**

количество чисел: **=COUNT (A1 : A20)**    **=СЧЁТ (A1 : 20)**

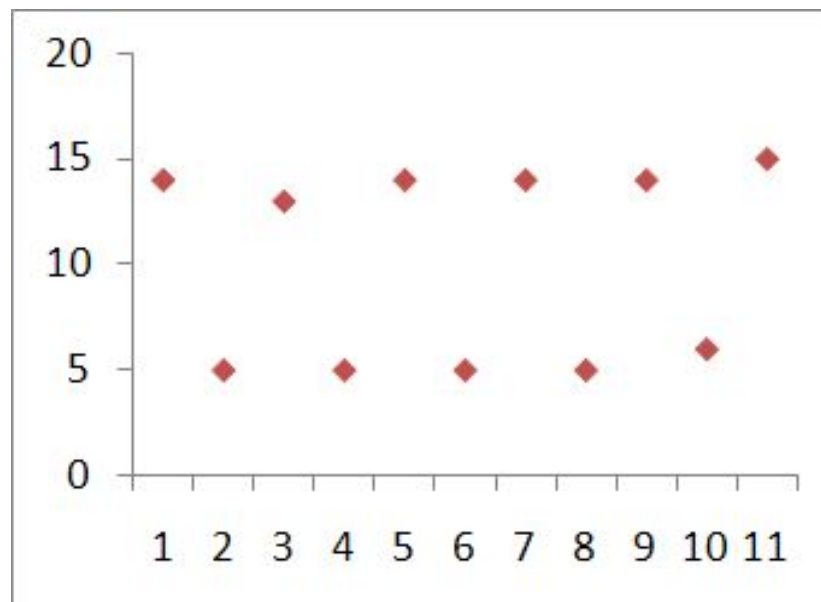
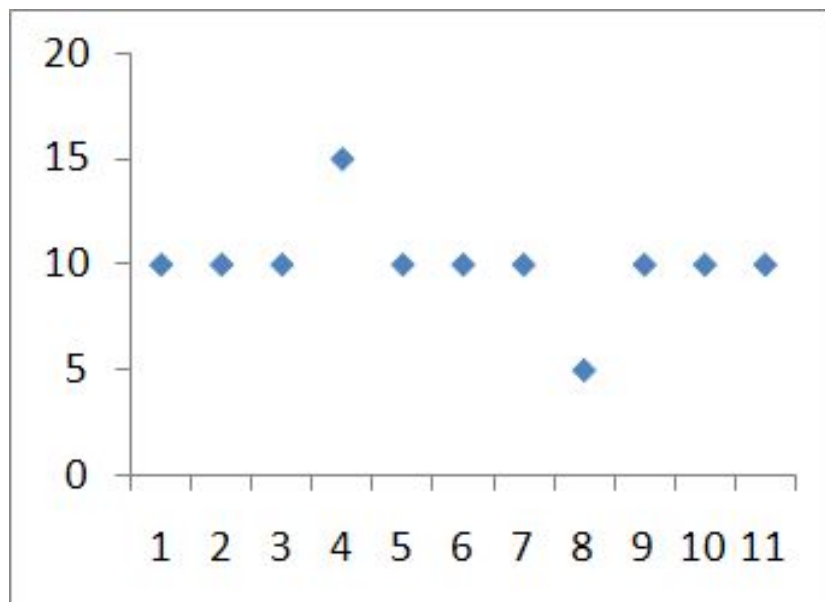
сколько ячеек удовлетворяет условию:

**=COUNTIF (A1 : A20 ; "=5")**                      **СЧЁТЕСЛИ**

**=COUNTIF (A1 : A20 ; ">3")**

# Дисперсия

Для этих рядов одинаковы МИН, МАКС, СРЗНАЧ



В чем различие?

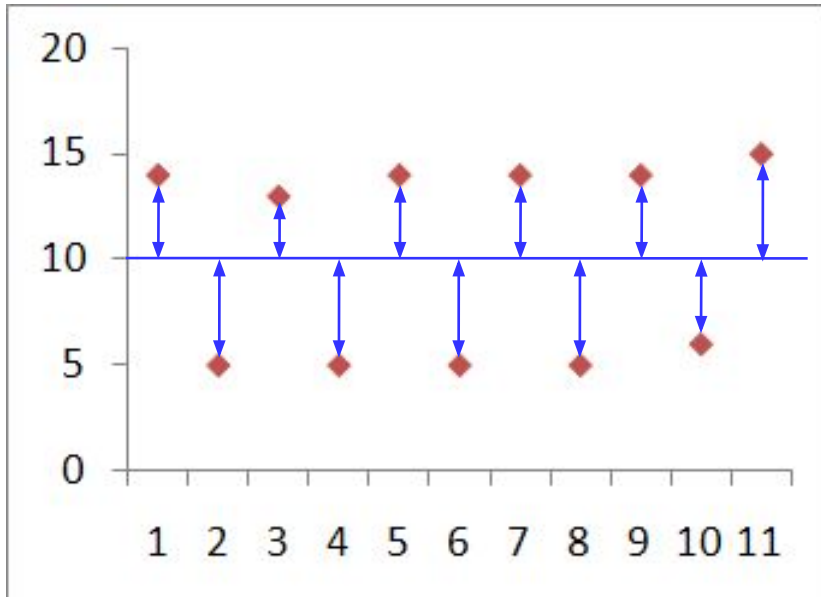
**Дисперсия** («разброс») характеризует разброс данных относительно среднего значения.



# Дисперсия

$$D_x = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{среднее арифметическое}$$



$(x_1 - \bar{x})^2$  квадрат  
отклонения  $x_1$   
от среднего

$D_x$  **средний квадрат**  
**отклонения** от  
среднего значения

# Дисперсия и СКВО

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$



В каких единицах измеряется?

**Что неудобно:**

если  $x$  измеряется в метрах, то  $D_x$  – в  $\text{м}^2$

**СКВО = среднеквадратическое отклонение**

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

**=STDEV (A1 : A20)**

**=СТАНДОТКЛОН (A1 : A20)**

# Условные вычисления

	А	В	С
1	Заказ	Сумма	Доставка
2	1234	256 руб.	51 руб.
3	1345	128 руб.	26 руб.
4	1456	1 024 руб.	0
5	1565	512 руб.	0
6	1576	345 руб.	69 руб.

Доставка:

- бесплатно при >500 руб.
- 20% для остальных

условие

если  $B2 > 500$  то

$C2 := 0$

иначе

$C2 := B2 * 0.2$

все

= IF (B2>500; 0; B2\*0,2)  
 =ЕСЛИ (B2>500; 0; B2\*0,2)

если «да»

если «нет»

# Сложные условия

**NOT** (НЕ, отрицание)

**AND** (И, логическое умножение)

**OR** (ИЛИ, логическое сложение)

**=IF ( AND (A2<1500 ; B2>500) ; 0 ; B2\*0,2)**

	A	B	C	D
1	<b>Фамилия</b>	<b>Год рождения</b>	<b>Рост</b>	<b>Принят</b>
2	Алексеев	1995	176	=IF(AND(B2>1994; C2>175);"да";"-")
3	Викторов	1995	167	=IF(AND(B3>1994; C3>175);"да";"-")
4	Петров	1994	180	=IF(AND(B4>1994; C4>175);"да";"-")

**=IF ( AND ( B2>1994 ; C2>175 ) ; "да" ; "-" )**

	A	B	C	D
1	<b>Фамилия</b>	<b>Год рождения</b>	<b>Рост</b>	<b>Принят</b>
2	Алексеев	1995	176	да
3	Викторов	1995	167	–
4	Петров	1994	180	–

# Сложные условия

	A	B	C	D
1	<b>Фамилия</b>	<b>Математика</b>	<b>Физика</b>	<b>Принят</b>
2	Алексеев	100	67	=IF(OR(B2=100; C2=100; B2+C2>180); "да"; "-")
3	Викторов	98	98	=IF(OR(B3=100; C3=100; B3+C3>180); "да"; "-")
4	Петров	90	80	=IF(OR(B4=100; C4=100; B4+C4>180); "да"; "-")

**=IF (OR (B2=100 ; C2=100 ; B2+C2>=180) ; "да" ; "-")**

	A	B	C	D
1	<b>Фамилия</b>	<b>Математика</b>	<b>Физика</b>	<b>Принят</b>
2	Алексеев	100	67	да
3	Викторов	98	98	да
4	Петров	90	80	-

# Вложенные условия

	А	В	С
1	Заказ	Сумма	Доставка
2	1234	256 руб.	26 руб.
3	1345	128 руб.	26 руб.
4	1456	1 024 руб.	0
5	1565	512 руб.	0
6	1576	345 руб.	35 руб.

Доставка:

- бесплатно при >500 руб.
- 10% при >200 руб.
- 20% для остальных

```

если В2 > 500 то
    С2 := 0
иначе
    если В2 > 200 то
        С2 := В2 * 0.1
    иначе
        С2 := В2 * 0.2
все
все
  
```

```

=IF (В2>500 ; 0 ; IF (В2>200 ; В2*0,1 ; В2*0,2) )
  
```

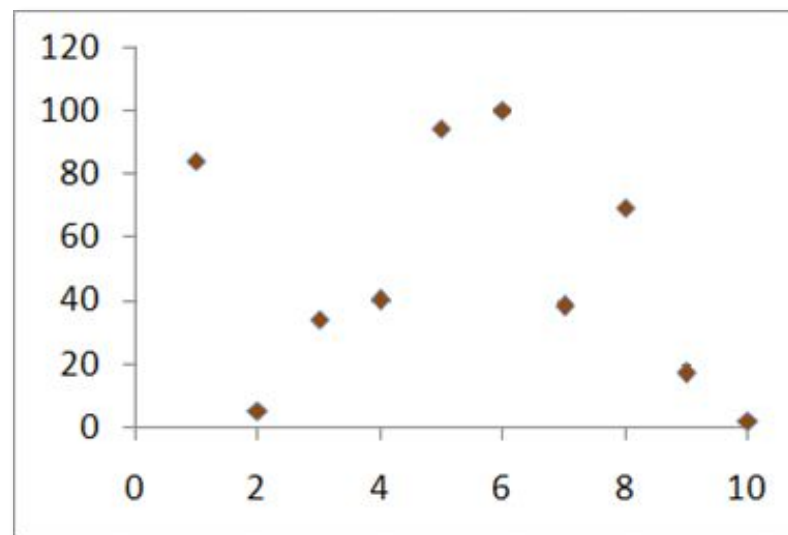
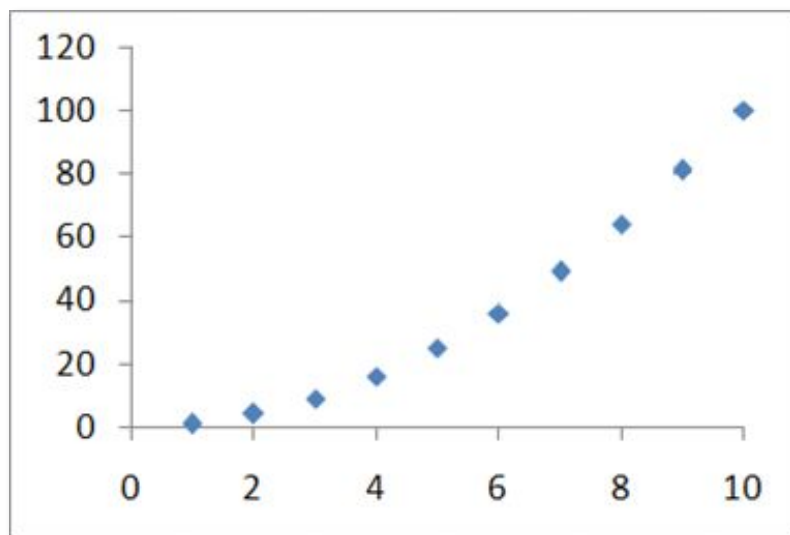
# Связь двух рядов данных

## Два ряда одинаковой длины:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

## Вопросы:

- есть ли связь между этими рядами (соответствуют ли пары  $(x_i, y_i)$  какой-нибудь зависимости  $y = f(x)$ )
- насколько сильна эта связь?



# Коэффициент корреляции

$$\rho_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

средние рядов

СКВО рядов



В каких единицах измеряется?

безразмерный!



Если  $x$  и  $y$  – один и тот же ряд?

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

=**CORREL** (A1 : A20 ; B1 : B20)

=**КОРРЕЛ** (A1 : A20 ; B1 : B20)



# Коэффициент корреляции

## Как понимать это число?

- если  $\rho_{xy} > 0$  : увеличение  $X$  приводит к увеличению  $Y$
- если  $\rho_{xy} < 0$  : увеличение  $X$  приводит к уменьшению  $Y$
- если  $\rho_{xy} \approx 0$  : связь обнаружить не удалось

**Сильная связь:**  $|\rho_{xy}| > 0,5$

$\rho_{xy} = 1$  : линейная зависимость  $y = kx + b$ ,  $k > 0$

$\rho_{xy} = -1$  : линейная зависимость  $y = kx + b$ ,  $k < 0$



Если  $\rho_{xy} \approx 0$ , то связи нет?

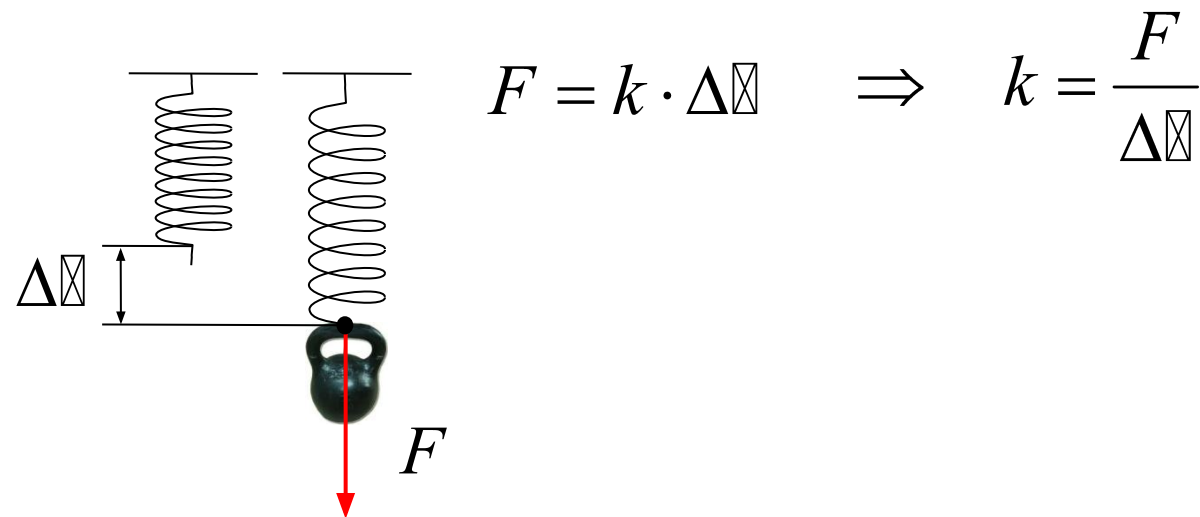


Метод для определения линейной зависимости!

# Решение вычислительных задач на компьютере

## **§ 74. Обработка результатов эксперимента**

# Закон Гука

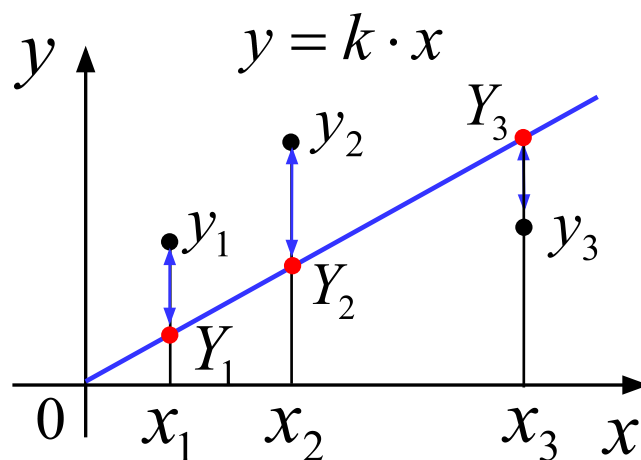


**Несколько опытов:**  $k_i = \frac{F_i}{\Delta x_i}, (i = 1, \dots, n)$



Что принять за  $k$ ?

# Метод наименьших квадратов (МНК)



НЕИЗВЕСТНО!

$$Y_i = k \cdot x_i$$

**Ошибка определяется величиной:**

$$E(k) = (Y_1 - y_1)^2 + (Y_2 - y_2)^2 + \dots + (Y_n - y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2$$

**Метод наименьших квадратов:  $E(k) \rightarrow \min$**



**Это задача оптимизации!**

# Метод наименьших квадратов (МНК)

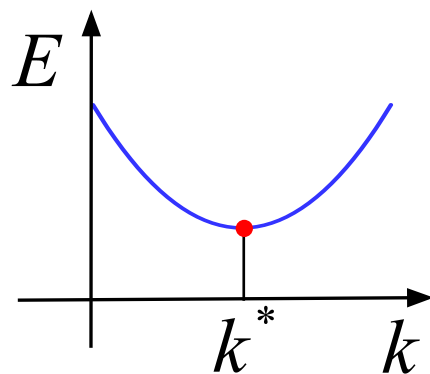
$$(Y_i - y_i)^2 = (k \cdot x_i - y_i)^2 = k^2 x_i^2 - 2kx_i y_i + y_i^2$$

$$E(k) = A \cdot k^2 - B \cdot k + C$$

$$A = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$B = 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$C = \sum_{i=1}^n y_i^2$$



$$k^* = \frac{B}{2A}$$

# Метод наименьших квадратов (МНК)

## Алгоритмический язык:

```

A := 0; B := 0
нц для i от 1 до N
  A := A + x[i]*x[i]
  B := B + x[i]*y[i]
кц
k := B / A

```

вещ A, B, k

вещ x[1..N], y[1..N]

$$k^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

## Паскаль:

```

A := 0; B := 0;
for i:=1 to N do begin
  A := A + x[i]*x[i];
  B := B + x[i]*y[i]
end;
k := B / A;

```

var A, B, k: real;

x, y: array[1..N] of real;

# Метод наименьших квадратов (МНК)

Табличный процессор:

начальное приближение

	А	В	С	Y
1	k	1,000		
2	E	=SUMXMY2(B5:B7;C5:C7)		
3				
4	x		y	
5	1		1,1	=\$B\$1*A5
6	2		1,8	=\$B\$1*A6
7	3		3,5	=\$B\$1*A7

**СУММКВРАЗН**

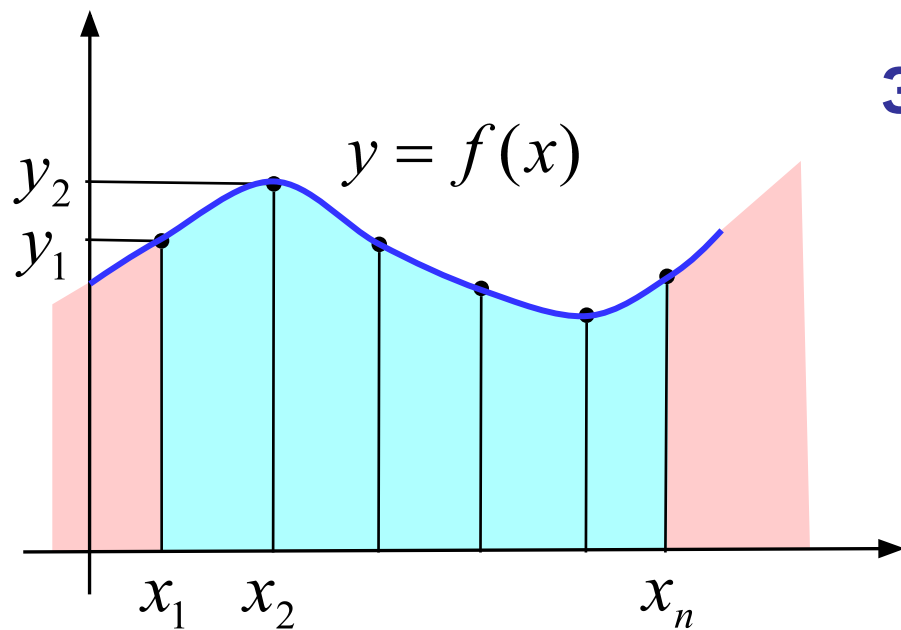
Поиск решения: выбрать B1 так, что B2  $\rightarrow$  min

# Восстановление зависимостей

Два ряда одинаковой длины:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

задают некоторую неизвестную функцию  $y = f(x)$

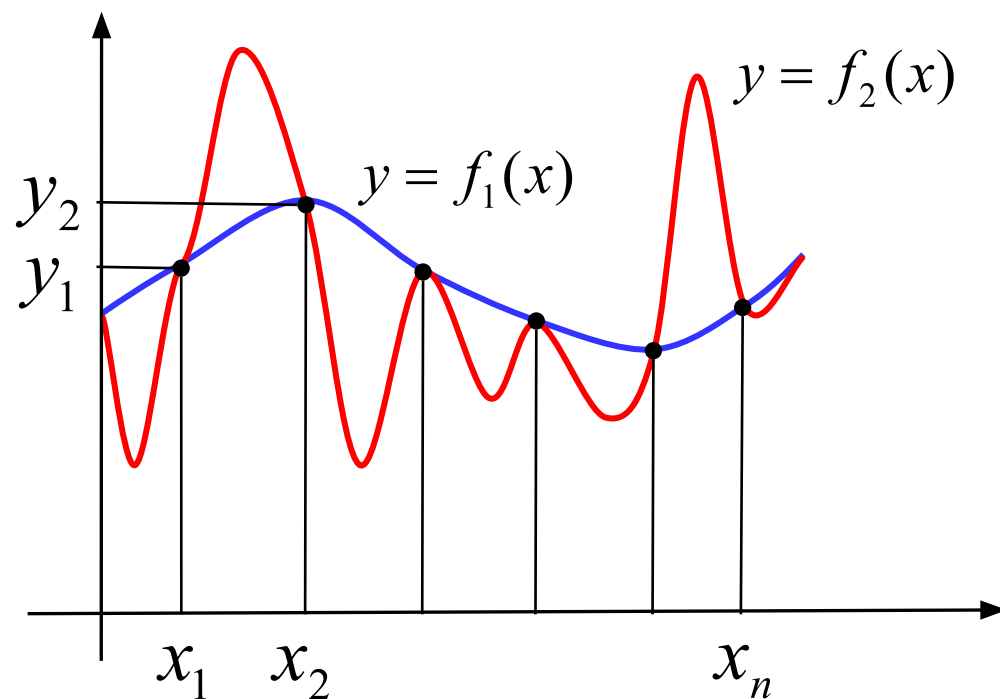


**Зачем:**

- найти  $y$  в промежуточных точках (**интерполяция**)
- найти  $y$  вне диапазона измерений (**экстраполяция, прогнозирование**)



# Восстановление зависимостей

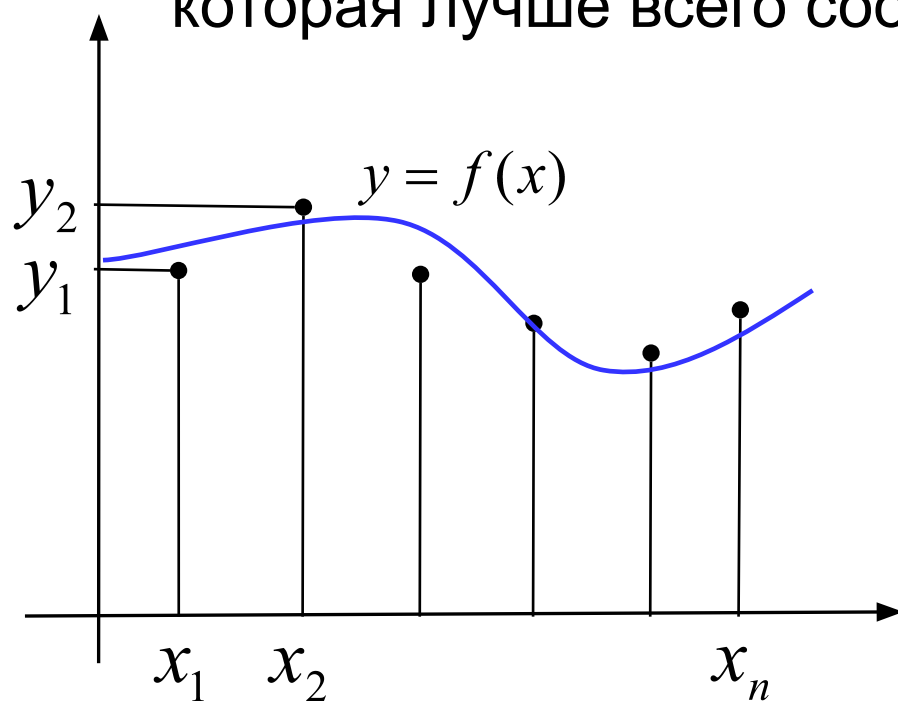


Через заданный набор точек проходит бесконечно много разных кривых!

**Вывод:** задача **некорректна**, поскольку решение неединственно.

# Восстановление зависимостей

**Корректная задача:** найти функцию заданного вида, которая лучше всего соответствует данным.



## Примеры:

- линейная  $y = a \cdot x + b$
- полиномиальная  $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
- степенная  $y = a \cdot x^b$
- экспоненциальная  $y = a \cdot e^{bx}$
- логарифмическая  $y = a \cdot \ln x + b$



График функции не обязательно проходит через заданные точки!



Как выбрать функцию?

# Что значит «лучше всего соответствует»?

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$(x_i, y_i)$  заданные пары значений

$$Y_i = f(x_i)$$

$\bar{y}$  – среднее значение  $y_i$

коэффициент  
детерминации

## Крайние случаи:

- если график проходит через точки:  $R^2 = 1$
- если считаем, что  $y$  не меняется и  $Y_i = \bar{y}$ :  $R^2 = 0$

$$R^2 \rightarrow \max \text{ когда } \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \rightarrow \min$$

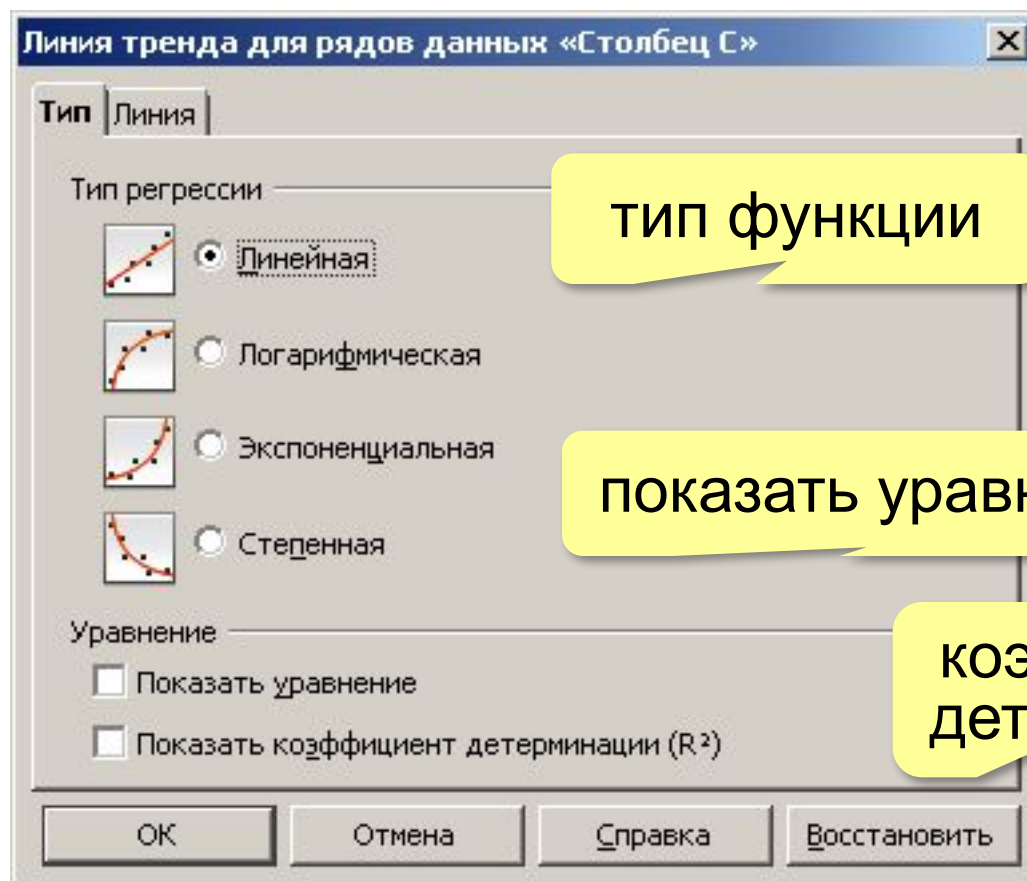


Фактически – метод наименьших квадратов!

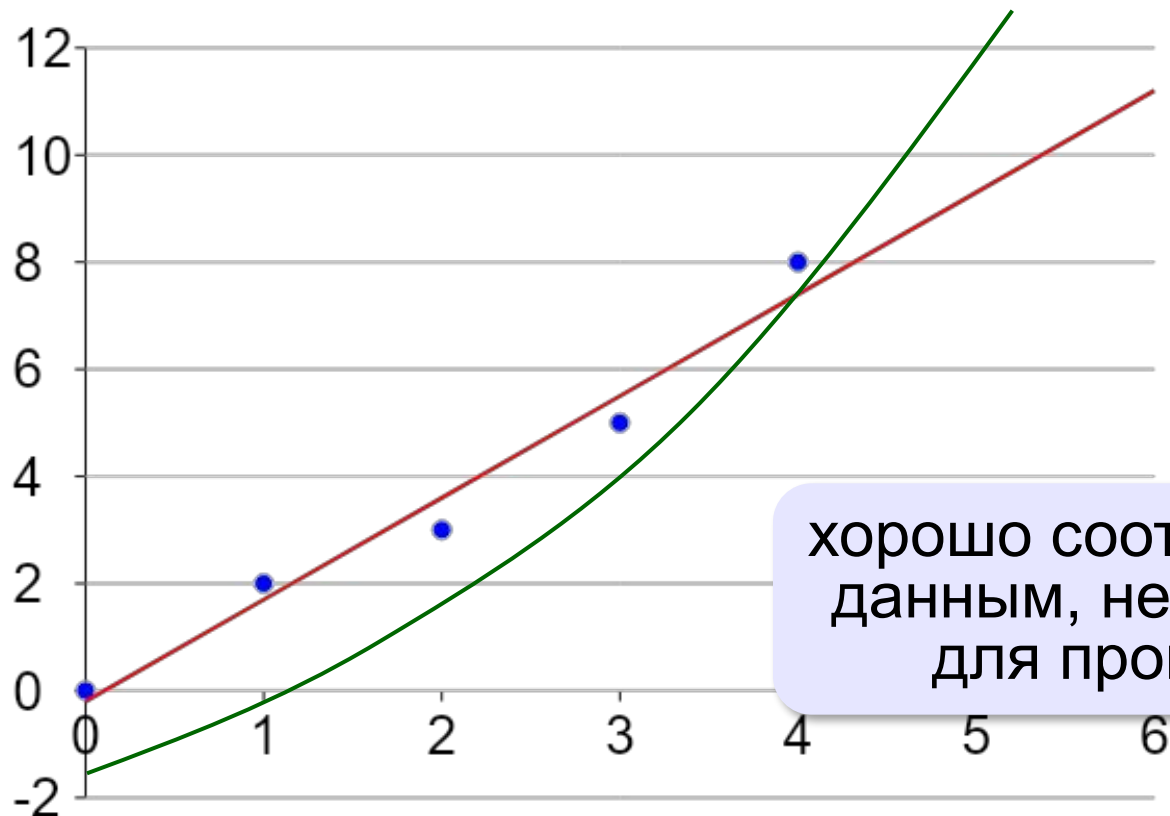
# Восстановление зависимостей

## Табличный процессор:

- 1) Диаграмма XY (Excel: Точечная)
- 2) ПКМ – Вставить линию тренда



# Прогнозирование



хорошо соответствует  
данным, непригодна  
для прогноза!

# Конец фильма

---

**ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич**

д.т.н., учитель информатики

ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

[kpolyakov@mail.ru](mailto:kpolyakov@mail.ru)

**ЕРЕМИН Евгений Александрович**

к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной

дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь

[eremin@pspu.ac.ru](mailto:eremin@pspu.ac.ru)

# Источники иллюстраций

---

1. [vispo.ru](http://vispo.ru)
2. [www.ars-sport.ru](http://www.ars-sport.ru)
3. иллюстрации художников издательства «Бином»
4. авторские материалы