Тема 2.
Простые проценты

§ 2.1. Наращение по простым процентам

Основным (***базовым***) интервалом времени в финансовых операциях является один год. Процентная ставка при этом устанавливается в виде ***годовой ставки***, подразумевающей однократное начисление процентов по истечении года после получения ссуды.

Схема простых процентов (simple interest) предполагает неизменность величины, с которой происходит начисление.

PV - ***исходный инвестируемый капитал***

r - ***процентная ставка***

$PV \cdot r$ - ***ежегодное увеличение капитала***

Величина инвестированного капитала за ***n*** лет будет равна:

$$FV = PV + PV \cdot r + \ldots + PV \cdot r = PV(1 + nr)$$

Формула наращения по простым процентам:

$$FV = PV(1 + nr)$$

Множитель (коэффициент) наращения по простым процентам:

$$1 + nr$$

Прирост капитала (проценты):

$$I = FV - PV = PVnr$$

Пример 2.1.1.

Найдем величину процентов и наращенную сумму за 5-летний кредит в 10 тыс. р., взятый под 8 % годовых.

$I = FV - PV = PVnr = 10 \cdot 5 \cdot 0{,}08 = 4$ тыс. р.,

$FV = PV(1 + nr) = 10(1 + 5 \cdot 0{,}08) = 14$ тыс. р.

Наращение по простым процентам, когда продолжительность финансовой операции ***не равна целому числу лет***, определятся по формуле:

$$FV = PV\left(1 + \frac{t}{T}r\right)$$

t - продолжительность финансовой операции в днях

T - количество дней в году

В зависимости от того, чему принимается равной продолжительность года (квартала, месяца), получают ***два варианта*** расчета процентов:

Точные проценты, определяемые исходя из точного числа дней в году (365 или 366), в квартале (от 89 до 92), в месяце (от 28 до 31);

Обыкновенные проценты, определяемые исходя из приближенного числа дней в году, квартале и месяце (соответственно 360, 90, 30).

При определении продолжительности периода, на который выдана ссуда, также возможны два варианта:

- принимается в расчет точное число дней ссуды (расчет ведется по дням);
- принимается в расчет приближенное число дней ссуды (исходя из продолжительности месяца в 30 дней).

В различных странах применяются различные способы расчетов:

- обыкновенные проценты с приближенным числом дней, обозначаемые как 360/360;
- обыкновенные проценты с точным числом дней, обозначаемые как 365/360, или *ACT*/360;
- точные проценты с точным числом дней, обозначаемые как 365/365, или *ACT*/*ACT*.

Для упрощения вычислений пользуются таблицами: (см. Тема 5, Табл.1, Табл. 2)

Порядковые номера дней в високосном году

	янв.	фев.	март	апр.	май	июнь	июль	авг.	сент.	окт.	нояб
День	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	3
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	3
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	3
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	3
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	3
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	3
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	3
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	3
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	3
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	3
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	3
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	3
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	3
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	3
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	3
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	3
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	3
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	3
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	3
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	

Пример 2.1.2.

Ссуда в размере 40 тыс. р. предоставлена 10 марта с погашением 13 августа того же года под процентную ставку 12 % годовых. Рассчитаем различными возможными способами сумму к погашению, если начисляются простые проценты и год високосный.

Точное число дней ссуды (см. таблицу 2)

$$t = t_2 - t_1 = 226 - 70 = 156,$$

приближенное число дней ссуды

$$t = 4 \cdot 30 + 13 + 20 = 153$$

(по 30 дней в апреле, мае, июне, июле, 20 дней марта и 13 дней августа).

Точные проценты с точным числом дней:

$$FV = PV\left(1 + \frac{t}{T}r\right) = 40\left(1 + \frac{156}{366}0,12\right) = 42,045 \text{ тыс. р.}$$

Обыкновенные проценты с точным числом дней:

$$FV = PV\left(1 + \frac{t}{T}r\right) = 40\left(1 + \frac{156}{360}0,12\right) = 42,08 \text{ тыс. р.}$$

Обыкновенные проценты с приближенным числом дней:

$$FV = PV\left(1 + \frac{t}{T}r\right) = 40\left(1 + \frac{153}{360}0,12\right) = 42,04 \text{ тыс. р.}$$

§ 2.2. Переменные простые ставки и реинвестирование

Финансовое соглашение может предусматривать не только постоянную процентную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени (переменную, плавающую) ставку. Например, наличие инфляции вынуждает периодически варьировать процентной ставкой.

Пусть на период n_k установлена ставка i_k , тогда приращение капитала за этот период:

$$PVn_k i_k$$

Если этих периодов ***m*** , т.е $k = 1, 2, \ldots, m$, то наращенная сумма за время ***n***

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{k=1}^{m} n_k$$

определяется по формуле:

$$FV = PV + PVn_1 i_1 + PVn_2 i_2 + \ldots + PVn_m i_m = PV\left(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k\right)$$

Если обозначить

$$i = \frac{\sum_{k=1}^{m} n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} n_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} n_k i_k , \qquad \Rightarrow \; n \cdot i = \sum_{k=1}^{m} n_k i_k$$

то предыдущая формула примет вид $FV = PV(1 + ni)$,

т.е. на весь период длительностью ***n*** можно установить процентную ставку , доставляющую такой же результат, как и данные переменные ставки, а для определения наращенной суммы можно пользоваться формулой:

$$FV = PV(1 + ni)$$

Пример 2.2.1.

Вкладчик положил в банк 20 тыс. руб. на следующих условиях: в первый год процентная ставка равна 10 % годовых, каждые последующие полгода ставка повышается на 2 %. Найти наращенную сумму за два года, если проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада.

Поскольку $PV = 20$, $n_1 = 1$; $n_2 = n_3 = \frac{1}{2}$; $i_1 = 0{,}1$; $i_2 = 0{,}12$; $i_3 = 0{,}14$, то по формуле (2.1.4)

$$FV = 20\left(1 + 1\cdot 0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}12 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}14\right) = 24{,}6.$$

Такую же наращенную сумму можно получить, если простые проценты за 2 года по ставке

$$i = \frac{1}{2}\left(1\cdot 0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}12 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}14\right) = 0{,}115 \quad \text{или} \quad i = 11{,}5\,\% \text{ годовых.}$$

Пусть опять за период n_k установлена процентная ставка i_k, но при изменении (или без изменения) ставки наращеная к этому моменту сумма вкладывается вновь под новый простой процент. Такая финансовая операция называется **реинвестированием** или **капитализацией** полученных на каждом этапе наращения средств.

Тогда за период n_1 наращенная сумма станет равной величине

$$FV_1 = PV(1+n_1 i_1),$$

после чего будет переоформлена на следующий срок (длительностью n_2).

Через время n_2 наращенная сумма станет равной величине

$$FV_2 = FV_1(1+n_2 i_2) = PV(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2).$$

Рассуждая аналогичным образом, получим формулу для нахождения наращенной суммы за время $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$ при реинвестировании:

$$FV = PV(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)\ldots(1+n_m i_m) = PV\prod_{k=1}^{m}(1+n_k i_k).$$

Пример 2.2.2.

По данным предыдущего примера, найти наращенную сумму за два года, если одновременно с изменением ставки происходит и капитализация процентного дохода.

$$FV = 20(1+0{,}1)\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}12\right)\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}14\right) = 24{,}952.$$

Получили большую наращенную сумму, чем в предыдущем примере, так как после каждого периода начисления осуществляется операция реинвестирования.

§ 2.3. Дисконтирование по простым процентам

При заключении финансовых соглашений часто приходится решать задачу ***обратную*** к задаче нахождения наращенной суммы.

По заданной сумме ***FV***, которую предполагают получить через время ***t*** , требуется определить величину капитала ***PV*** (***приведенную, современную, текущую, капитализированную*** стоимость), которую требуется инвестировать в данный момент.

Математическое дисконтирование

$$PV = \frac{FV}{1+nr}.$$

Множитель $\frac{1}{1+nr}$ называется **коэффициентом дисконтирования** и показывает долю капитала PV в FV.

Разность D между капиталами FV и PV называется **дисконтом**:

$$D = FV - PV = \frac{FVnr}{1+nr}.$$

Пример 2.3.1.

Из какого капитала можно получить 4,5 млн р. через 5 лет наращением по простым процентам при ставке 10 % годовых?

Пользуясь формулой (2.3.2), получаем $PV = \dfrac{FV}{1+nr} = \dfrac{4{,}5}{1+5\cdot 0{,}1} = 3$ млн. р.

Дисконт составит $D = FV - PV = 4{,}5 - 3 = 1{,}5$ млн. р.

Пример 2.3.2. .

Через полгода после заключения финансового соглашения о получении кредита должник обязан заплатить 2,16 тыс. р. Какова первоначальная величина кредита, если он выдан под 16% годовых и начисляются обыкновенные проценты с точным числом дней?

Используя формулу (2.3.1), получим

$$PV = \frac{FV}{1+\frac{t}{T}r} = \frac{2{,}16}{1+\frac{180}{360}\cdot 0{,}16} = 2,$$

дисконт в этом случае равен $D = FV - PV = 2{,}16 - 2 = 0{,}16$ тыс. р.

Банковское дисконтирование, или банковский учет, применяется при учете векселей банком или другим учреждением.
Вексель является письменным безусловным обязательством выплатить в установленный срок определенную сумму предъявителю векселя.

Владелец векселя на сумму ***FV*** предлагает банку купить вексель раньше срока оплаты по цене, меньшей той, которая указана на векселе (***дисконтирование (учетом)*** векселя)

Сумма ***PV*** , которую получает векселедержатель за вычетом определенных процентов ***(дисконта)*** в пользу банка при досрочном учете векселя, называется ***дисконтированной величиной векселя***.

Пусть объявленная ***ставка дисконтирования (учетная ставка)*** равна ***d***, то ***дисконт***

$$D = FVnd$$

Владелец векселя получит сумму

$$PV = FV - FVnd = FV(1 - nd).$$

Учет векселей чаще всего осуществляется способом 360/360.

Пример 2.3.3.

Вексель на сумму 100 тыс. р. со сроком погашения 25.08.2006 предъявлен для учета 05.06.2006, учетная ставка банка 10 % годовых. Найдем сумму, которую получит векселедержатель от банка, и доход банка от данной операции.

За вексель банк выплатит сумму

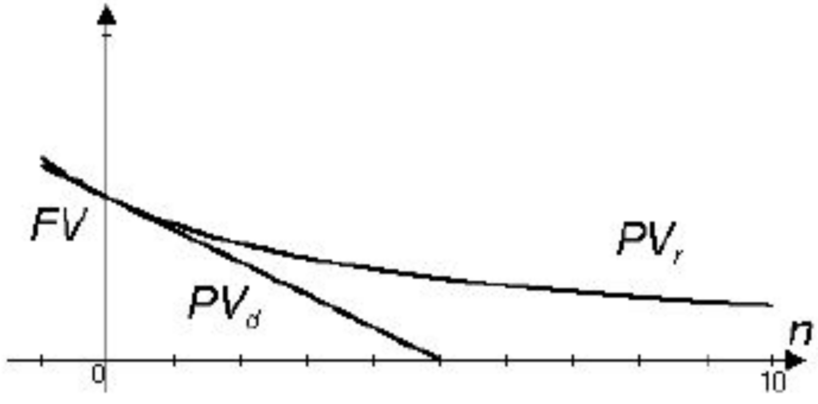
$$PV = FV(1-nd) = 100\left(1-\frac{25+30+25}{360}0{,}1\right) = 97{,}78 \text{ тыс. р.},$$

проценты банка составят

$$D = FV - PV = 100 - 96{,}94 = 2{,}23 \text{ тыс. р.}$$

Сравнение банковского и математического дисконтирования

Обозначим $PV_r = \frac{FV}{1+ni}$, $PV_d = FV(1-ni)$. Можно убедиться, что $PV_r > PV_d$ при $0 < n < \frac{1}{i}$. Геометрически последнее неравенство можно показать следующим образом (рис. 2.1):



§ 2.4. Наращение по простой учётной ставке

$$FV = \frac{PV}{1-nd}$$

Величина $\frac{1}{1-nd}$ – множитель наращения

Пример 2.4.1.

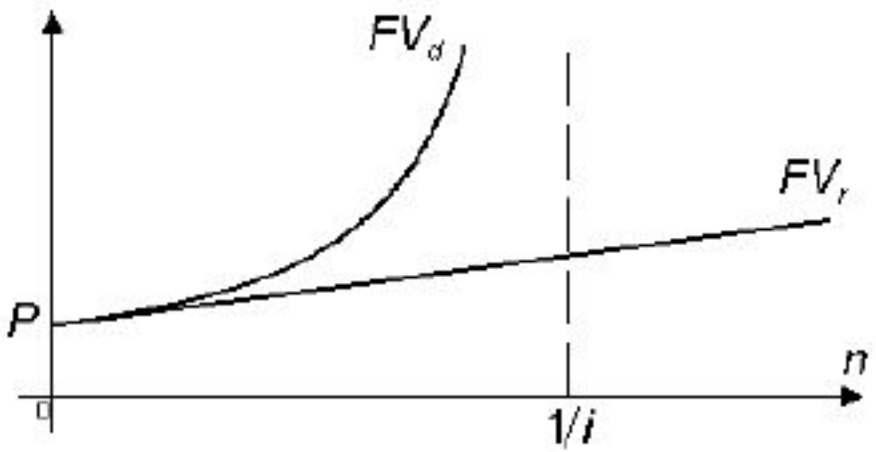
За вексель, учтенный за полтора года до срока по дисконтной ставке в 10% , заплачено 17 тыс. р. Определить номинальную величину векселя.

Поскольку $PV = 17, n = \frac{3}{2}, d = 0{,}1$, то

$$FV = \frac{PV}{1-nd} = \frac{17}{1-\frac{3}{2}\cdot 0{,}1} = 20 \text{ тыс.р.}$$

Сравнение наращения простыми процентами по учетной и процентной ставкам

Если $r = d = i$



Эквивалентные ставки это ставки, связанные соотношением

$$r = \frac{d}{1 - nd} \quad \text{и} \quad d = \frac{r}{1 + nr}$$

§ 2.5. Определение срока ссуды и величины ставки

$$n = \frac{FV - PV}{PVr},$$

$$n = \frac{FV - PV}{FVd}$$

$$n = \frac{t}{T}$$

$$t = \frac{FV - PV}{PVr} T$$

$$t = \frac{FV - PV}{FVd} T$$

$$r = \frac{FV - PV}{PVn} \text{ или } r = \frac{FV - PV}{PVt} T,$$

$$d = \frac{FV - PV}{FVn} \text{ или } d = \frac{FV - PV}{FVt} T.$$

§ 2.6. Учет налогов и инфляция при использовании простой процентной ставки

Рассмотрим влияние налогов и инфляции на финансовые расчеты. Пусть на сумму PV в течение времени n начислялись простые проценты со ставкой r. Тогда до выплаты налогов проценты составляют величину $I = PVnr$. Если ставка налога на проценты равна q, то надо будет выплатить государству величину $I_q = PVnrq$, и, следовательно, наращенная сумма с учетом уплаты налога составит:

$$FV_q = FV - I_q = PV + Pvnr - PVnrq = PV(1+nr(1-q)) \qquad (2.6.1)$$

Начисление процентов фактически происходит не по ставке r, а по ставке $r(1-q)$

Пример 2.6.1.

На депозит была помещена сумма 50 тыс. р. Под 20% годовых на полтора года, по истечении которых на сумму были начислены простые проценты. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога 13%.

Согласно формуле (2.6.1) имеем

$$FV_q = PV(1+nr(1-q)) = 50(1+1{,}5\cdot 0{,}2(1-0{,}13)) = 63{,}05 \text{ тыс.р.}$$

Если начисление происходило по учетной ставке ***d*** при ставке налога ***q*** , то выплатить государству придется:

$$I_q = \frac{PVnd}{1 - nd} q$$

Следовательно, наращенная сумма с учетом уплаты налога на проценты, составит:

$$FV_q = FV - I_q = \frac{PV}{1-nd} - \frac{PVnd}{1-nd} q = \frac{PV}{1-nd}(1 - ndq). \qquad (2.6.2)$$

Пример 2.6.2.

В условиях предыдущего примера наращение осуществляется по учетной ставке 18%, то какова будет наращенная сумма после уплаты налога на проценты?

$$FV_q = \frac{50}{1 - 1{,}5 \cdot 0{,}18}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}13) = 66{,}09 \text{ тыс. р.}$$

Инфляция – процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике или снижением покупательной способности денег. Без учета инфляции результаты финансовой операции часто представляют собой условную величину.

Инфляцию необходимо учитывать, по крайней мере, в двух случаях:

- при расчете наращенной денежной суммы
- при измерении реальной эффективности финансовой операции.

Пусть выбран определенный набор товаров и услуг, и пусть за время t его стоимость увеличивается с суммы P_1 до суммы P_2:

Индекс цен (индекс инфляции)

$$I_p^{(t)} = \frac{P_2}{P_1}$$

Индекс цен показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период на некоторый постоянный набор товаров и услуг (потребительская корзина). Индекс цен безразмерная величина, измеряемая в дробях или процентах.

Темп инфляции

$$h_t = \frac{P_2 - P_1}{P_1}$$

Темп инфляции h_t (умноженный на 100) показывает, на сколько процентов выросли цены за период времени t.

Соотношение между индексом цен и темпом инфляции

$$I_p^t = 1 + h_t.$$

Пример 2.6.1.

За полгода цены увеличились в 2 раза, найдем индекс и темп инфляции.

$$I_p^t = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2P}{P} = 2,$$

из формулы $I_p^t = 1 + h_t$ имеем $h_t = I_p^t - 1 = 2 - 1 = 1$, или 100 %.

Пусть заданы ***индексы цен (или темпы инфляции)***

$$I_p^{(t_1)}, I_p^{(t_2)}, \dots I_p^{(t_k)} \; (h_{t_1}, h_{t_2}, \dots h_{t_k})$$

за последовательные периоды времени $t_1, t_2, \dots t_k$, тогда за время $t = t_1 + t_2 + \dots + t_k$ ***индекс инфляции***

$$I_p^{(t)} = I_p^{(t_1)} \cdot I_p^{(t_2)} \cdot \dots \cdot I_p^{(t_k)} = \prod_{i=1}^{k} I_p^{(t_i)} = \prod_{i=1}^{k} (1 + h_{t_i})$$

если $h_{t_1} = h_{t_2} = \dots = h_{t_k} = h$, то $I_p^t = (1+h)^k$.

Пример 2.6.2.

Среднемесячный темп инфляции составил 2 %, определим годовой индекс инфляции:

$$I_p^1 = \left[I_p^{\left(\frac{1}{12}\right)} \right]^{12} = (1+0{,}02)^{12} = 1{,}2682.$$

Если за время t была получена некоторая наращенная сумма FV, а индекс инфляции составил величину I_p^t, то эта сумма с учетом инфляции $\overline{FV}$ составит

$$\overline{FV} = \frac{FV}{I_p^{(t)}}$$

Например, при годовой инфляции 2 % сумма в 6 тыс. р. через два года по своей покупательной способности в ценах текущего дня составит величину

$$\overline{FV} = \frac{6}{(1+0,02)^2} = 5,767 .$$

Если наращение происходило ***по схеме простых процентов***

$$\overline{FV} = \frac{PV(1+nr)}{I_p^t} .$$

Для того, чтобы в условиях инфляции стоимость первоначального капитала на самом деле росла, исходную процентную ставку увеличивают, т. е. происходит индексация ставки. Такую новую ставку $\bar{r}$ с поправкой на инфляцию называют **брутто-ставкой**. Исходную процентную ставку r иногда называют **нетто-ставкой**

Для обеспечения полной компенсации негативного действия инфляции и получения доходности согласно первоначальной ставке r, размер **брутто-ставки** $\bar{r}$ при начислении простых процентов определяется из равенства

$$1+nr=\frac{1+n\bar{r}}{I_p^t}.$$

Пусть задана номинальная процентная ставка r, т. е. объявлена норма доходности. Тогда для определения **реальной** процентной ставки r_{real} (доходности с учетом инфляции при начислении простых процентов) можно воспользоваться равенством

$$1+nr_{real}=\frac{1+nr}{I_p^t}.$$

Пример 2.6.3.

Определим реальную ставку простых процентов за год, если номинальная процентная ставка равна 16% при годовой инфляции 8%.

$$r_{real}=\frac{1+r}{I_p^t}-1=\frac{1+0,16}{1+0,08}-1=0,074.$$

§ 2.7. Замена платежей и их консолидация

На практике часто возникают ситуации, вынуждающие участников сделки к изменению условий ранее заключенного финансового соглашения (либо изменение сроков, либо объединение нескольких платежей в один с установлением срока его погашения – **консолидация платежей**). В результате этих изменений интересы всех участников должны быть учтены, то есть следует руководствоваться **принципом финансовой эквивалентности**, согласно которому сумма заменяемых платежей, приведенных к одному и тому же моменту времени приравнивается сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени.

Рассмотрим ситуацию, когда платеж P_1 со сроком n_1 надо заменить платежом P_0 со сроком n_0, сроки измеряются от одного момента времени и простая ставка равна r.

Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$P_0 = \begin{cases} P_1(1+(n_0-n_1)r), & n_0 > n_1 \\ P_1, & n_0 = n_1 \\ \dfrac{P_1}{1+(n_1-n_0)r}, & n_0 < n_1 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь задачу замены платежей $P_1, P_2, \ldots P_m$, выплачиваемых соответственно через время $n_1, n_2, \ldots n_m$ одним платежом P_0 со сроком n_0. Обычно величину платежа P_0 определяют путем приведения всех платежей к дате погашения платежа n_0.

Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$P_0 = \sum_{i,\, n_i < n_0} P_i (1 + (n_0 - n_i) r) + \sum_{j,\, n_j > n_0} P_i (1 + (n_j - n_0) r)^{-1}$$

Пример 2.7.1.

Платежи в 5, 7, 9 тыс. р. Должны быть погашены через 90, 120,180 дней. Кредитор и должник согласились заменить три платежа одним через 150 дней. Найдите величину консолидированного платежа, если простая процентная ставка 20% годовых и в расчет принимаются обыкновенные проценты.

Консолидированный платеж с использованием формулы (2.7.2) можно найти следующим образом:

$$P_0 = 5\left(1 + \frac{150-90}{360} 0,2\right) + 7\left(1 + \frac{150-120}{360} 0,2\right) + 9\left(1 + \frac{180-150}{360} 0,2\right)^{-1} = 21{,}135.$$