

ВоГУ

Лекция 31 (13)
**Уравнения Максвелла
для
электромагнитного
поля**

**Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент**

2017 г.

План

1. Первое уравнение Максвелла
2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла
3. Теорема Остроградского-Гаусса. Третье и четвёртое уравнения Максвелла
4. Полная система уравнений Максвелла
5. Частные случаи: стационарное поле; поле в свободном пространстве

Теория Максвелла для электромагнитного поля

Теория Максвелла для электромагнитного поля – это обобщение :

- теоремы Остроградского-

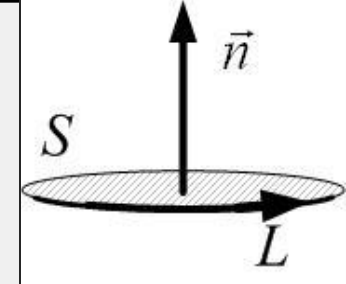
- закона полного

- закона электромагнитной индукции Фарадея

Теория решает задачу электродинамики:
найти характеристики электрического и магнитного полей системы зарядов и токов

Первое уравнение Максвелла

(I)



$$\oint_L \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = 0$$



$$\oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

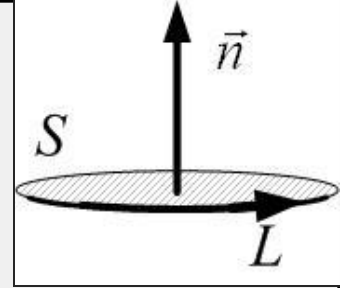
$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$$

Электрические поля создаются как электрическими зарядами, так и изменяющимся магнитным полем

Математическая теорема

Стокса:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$



Ротор векторного поля; оператор дифференцирования

По определению:

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Ротор – значит «вихрь»: если поле вихревое (непотенциальное), линии замкнуты, то его ротор отличен от нуля.

Ротор показывает вихревой характер поля

$$(\text{rot} \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Контур L – произвольный

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(I)

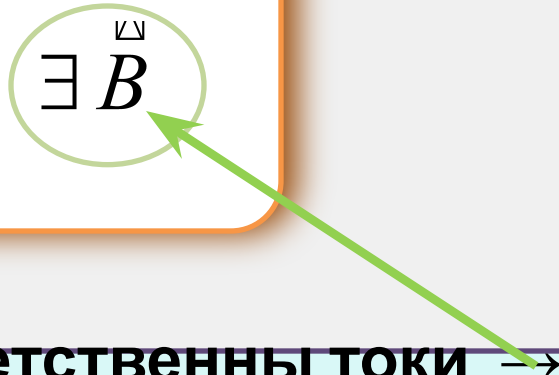
Первое уравнение
Максвелла в
дифференциальной форме

Ток смещения

Предположения Максвелла:

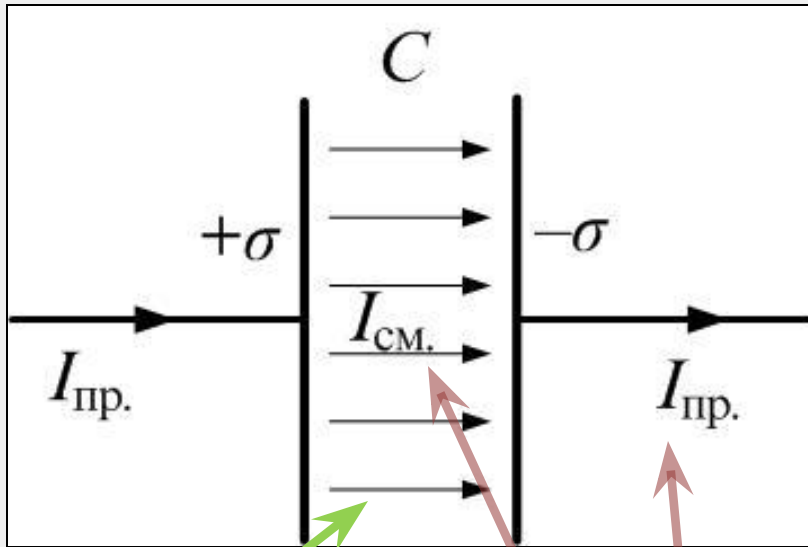
$$\frac{d\overset{\nabla}{B}}{dt} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \overset{\nabla}{E}_B$$

Симметричное предположение:

$$\frac{d\overset{\nabla}{D}}{dt} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \overset{\nabla}{B}$$


За создание магнитных полей ответственны токи →
поле B удобно описывать с помощью ТОКОВ
смещения

Ток смещения



Предположение:

внутри конденсатора течёт ток смещения $I_{\text{см}}$

Он должен быть равен току проводимости в подводящих проводах

$$\frac{dD}{dt} \neq 0$$

$$I_{\text{см.}} = I_{\text{пр.}}$$

Ток смещения

$$I_{\text{см.}} = I_{\text{пр.}}$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$I_{\text{см.}} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma \cdot S) = S \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

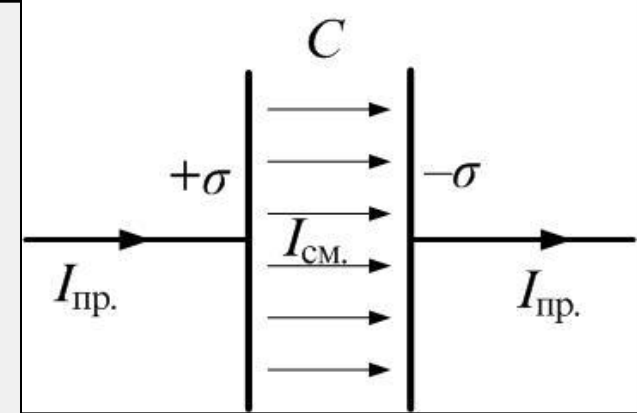
$$D = \sigma$$

$$I_{\text{см.}} = S \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\dot{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

По определению:

$$\dot{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial D}{\partial t}$$



Особенности тока смещения:

- Течёт в вакууме, где нет частиц – переносчиков тока
- Не выделяется теплота Джоуля-Ленца
- Единственное положительное свойство (и назначение!) тока смещения – создавать магнитное поле

Ток смещения – это просто меняющееся во времени электрическое поле

Некоторые соотношения для плотности тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \vec{j}_{\text{поляриз.}} + \vec{j}_{\text{вак.}}$$

Поляризованность

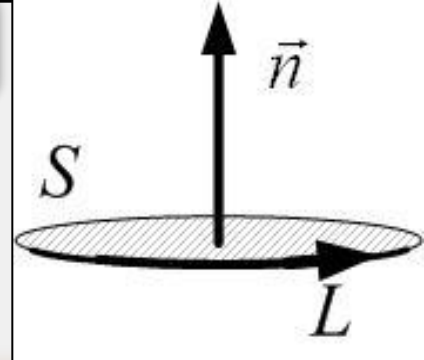
Возникает в веществе при его поляризации в переменном электрическом поле

Существует и в вакууме, где никаких заряженных частиц нет

Теория Максвелла. Второе уравнение Максвелла

Закон полного тока:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}^{\text{макро}} dS$$



Поскольку магнитные поля создаются:

- токами проводимости
- токами смещения

Нужно заменить:

$$\vec{j}^{\text{макро}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см.}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS$$

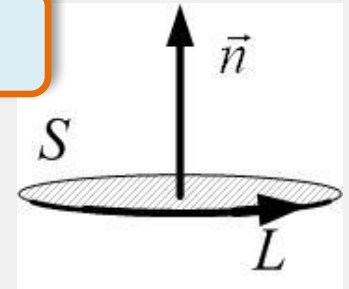
(II)

Это – второе уравнение Максвелла в интегральной форме

Теория Максвелла. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L H dl = \int_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS$$



Математическая теорема Стокса для H:

$$\oint_L H dl = \int_S (rot H) \cdot dS$$

Контур L – произвольный

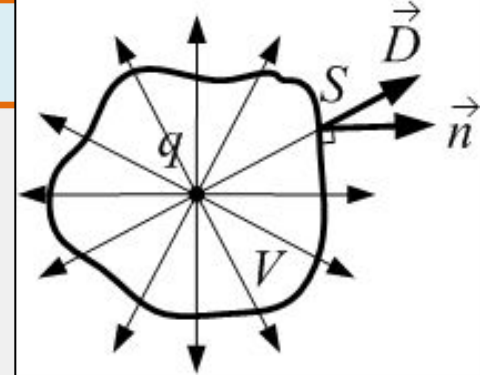
Второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$rot H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{(II)}$$

Смысл второго уравнения:
магнитные поля создаются токами проводимости и токами смещения

Теорема Остроградского-Гаусса. Третье уравнение Максвелла

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i^{\text{свободн.}}$$



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV$$

(III)

Это – третье уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Смысл третьего уравнения:
источником электрического поля являются электрические заряды

(III)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V (\operatorname{div} \vec{D}) \cdot dV$$

Математическая теорема Гаусса:

Поверхность S – произвольная

Дивергенция векторного поля по определению:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Это – третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля

(IV)

Четвёртое уравнение Максвелла

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Поверхность S – произвольная

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\operatorname{div} \vec{B}) \cdot dV$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{(IV)}$$

Это – четвёртое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

Смысл четвёртого уравнения: магнитных зарядов нет

Полная система уравнений

Максвелла

в интегральной
форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{(I)}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad \text{(II)}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV \quad \text{(III)}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{(IV)}$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

Это основные
уравнения

Это материальные
уравнения

Они связывают характеристики
полей со свойствами среды и
друг с другом и включают закон
Ома в дифференциальной
форме

Полная система уравнений

Максвелла

в дифференциальной
форме

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{(I)}$$

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{(II)}$$

$$\operatorname{div} D = \rho \quad \text{(III)}$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{(IV)}$$

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E$$

$$B = \mu \mu_0 H$$

$$j = \gamma \cdot E$$

Основные
уравнения

Материальные
уравнения

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Для стационарных полей все производные равны нулю

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sum I_{\text{проводимости}}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV = \sum q_{\text{свободных}}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

**Поля – магнитное и электрическое –
разделяются
Их характеристики не связаны друг с
другом**

Уравнения Максвелла

Частный случай: поле в свободном пространстве

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

В свободном пространстве нет ни зарядов, ни токов проводимости

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Электромагнитное поле свободном пространстве

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

- Изменение магнитного поля \vec{B} порождает поле электрическое \vec{E} тоже в общем случае переменное
- Изменения электрического поля $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ порождают снова возникновение магнитного поля \vec{H}
- Это – электромагнитная волна, распространяющаяся в свободном пространстве, в отрыве от первоначально породивших её зарядов и токов
- Поля – электрическое и магнитное – распространяются, превращаясь друг в друга