

Лекция 4

Преобразование объектов

Нижельский С.С.,
ст. преп. каф. СИУ

Новокузнецк, 2008

Преобразование объектов

Пусть любая точка, принадлежащая определенному объекту, имеет координаты (k_1, k_2, \dots, k_n) в n -мерной системе координат

Тогда преобразование объекта можно определить как изменение положения точек объекта. Новое положение точки пространства соответствует новым значениям координат (m_1, m_2, \dots, m_n)

Соотношение между старыми и новыми координатами для всех точек объекта

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) = F(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

и будет определять преобразование объекта, где F – функция преобразования

Аффинные преобразования объектов на плоскости

Аффинные преобразования объектов на плоскости описывается формулой:

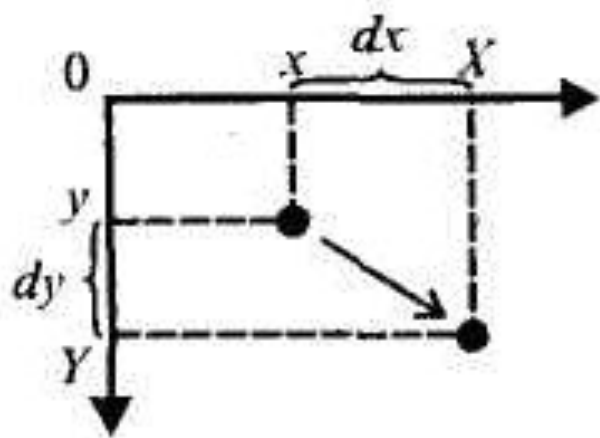
$$\begin{cases} X = Ax + By + C, \\ Y = Dx + Ey + F, \end{cases}$$

где A, B, \dots, F – константы; x, y – координаты до преобразования; X, Y – новые координаты точек объектов.

Рассмотрим частные случаи аффинного преобразования

Аффинные преобразования объектов на плоскости

1. Сдвиг



$$\begin{cases} X = x + dx, \\ Y = y + dy. \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

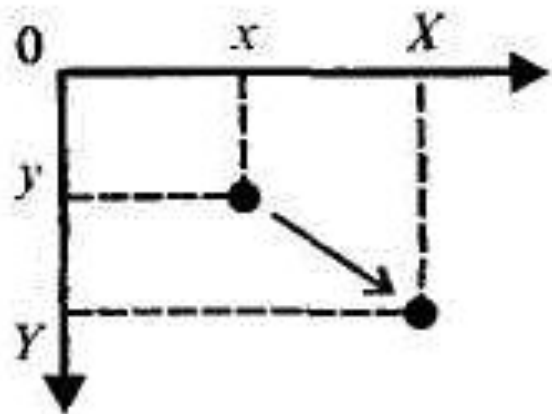
Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X - dx, \\ y = Y - dy, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования объектов на плоскости

2. Растяжение-сжатие (масштабирование)



$$\begin{cases} X = k_x x, \\ Y = k_y y. \end{cases}$$

В матричной форме:

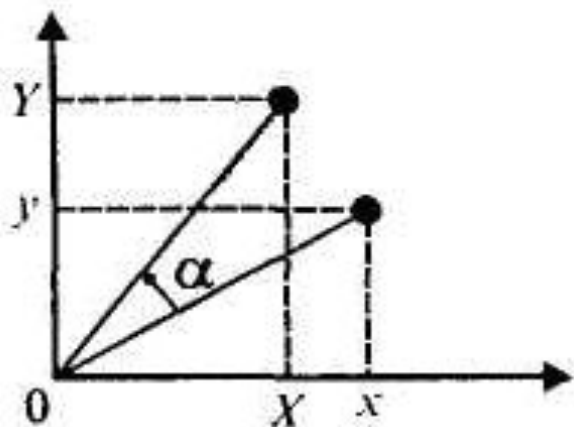
$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X / k_x, \\ y = Y / k_y, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования объектов на плоскости

3. Поворот



$$\begin{cases} X = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha + Y \sin \alpha, \\ y = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные аффинные преобразования объектов

В общем виде записываются

$$\begin{cases} X = Ax + By + Cz + D, \\ Y = Ex + Fy + Gz + H, \\ Z = Kx + Ly + Mz + N, \end{cases}$$

где A, B, \dots, N – константы

В матричном виде

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные аффинные преобразования объектов

1. Сдвиг объектов на dx , dy , dz :

$$\begin{cases} X = x + dx, \\ Y = y + dy, \\ Z = z + dz, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Растяжение/сжатие на k_x , k_y , k_z :

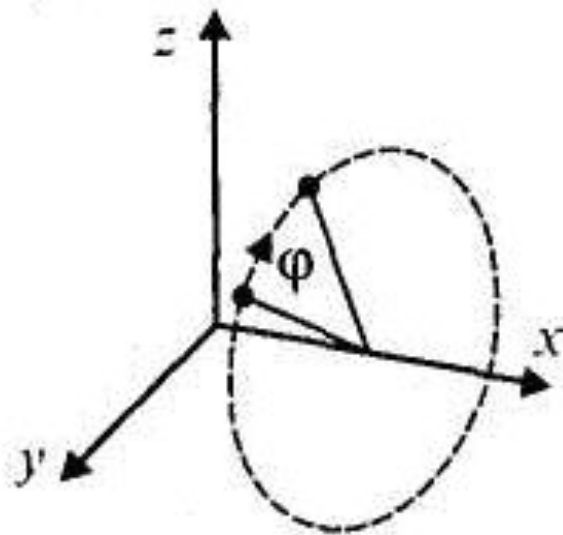
$$\begin{cases} X = k_x x, \\ Y = k_y y, \\ Z = k_z z, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные аффинные преобразования объектов

3. Повороты

Поворот вокруг оси x на угол ϕ

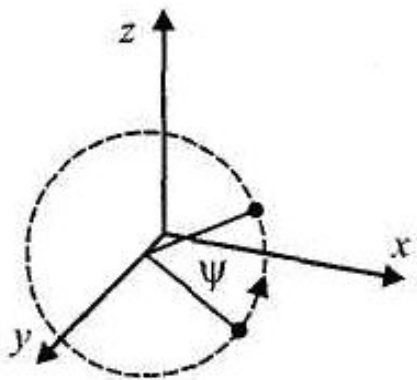


$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y \cos\phi - z \sin\phi, \\ Z = y \sin\phi + z \cos\phi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные аффинные преобразования объектов

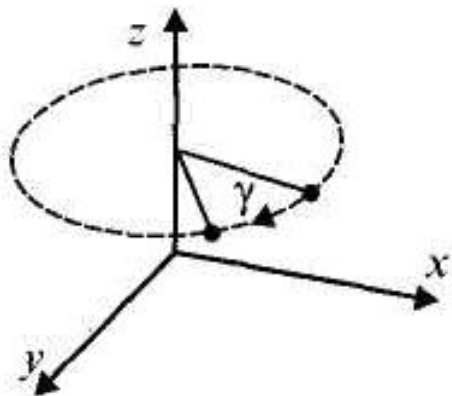
Поворот вокруг оси y на угол ψ



$$\begin{cases} X = x \cos\psi - z \sin\psi, \\ Y = y, \\ Z = x \sin\psi + z \cos\psi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот вокруг оси z на угол γ



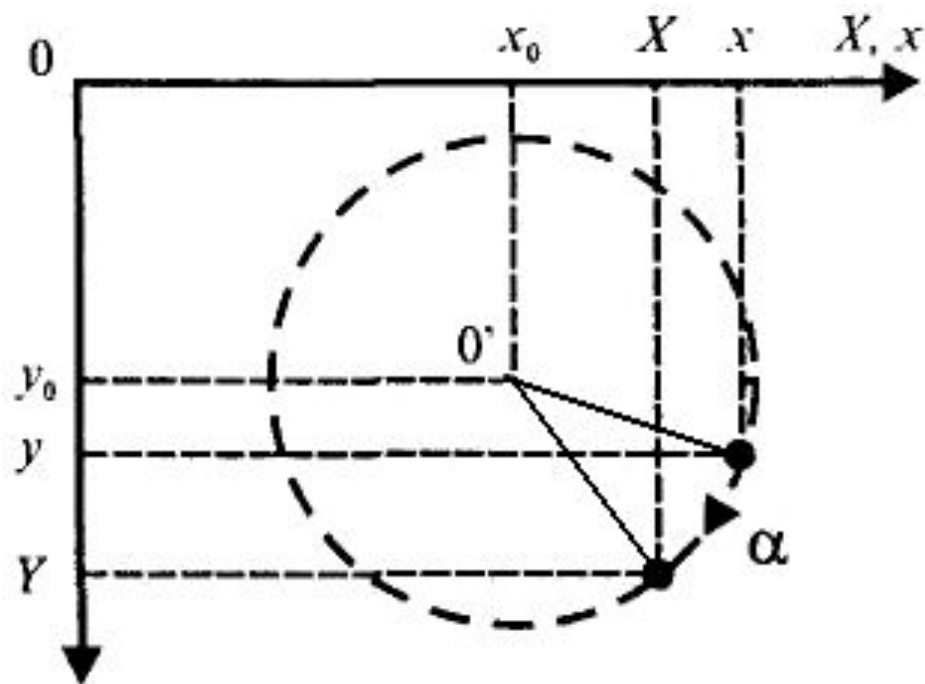
$$\begin{cases} X = x \cos\gamma - y \sin\gamma, \\ Y = x \sin\gamma + y \cos\gamma, \\ Z = z, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

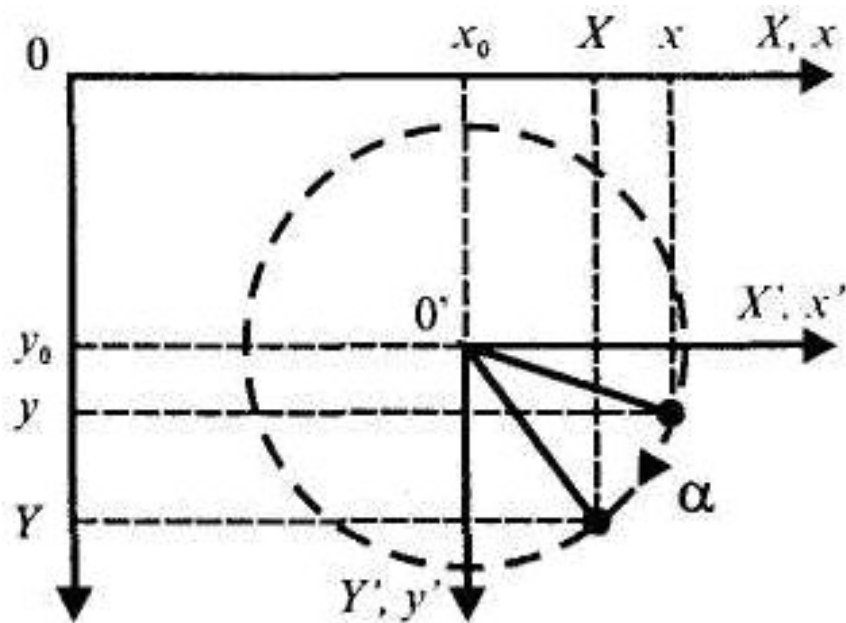
Связь преобразований объектов и координат

Движение объектов можно рассматривать как движение в обратном направлении соответствующей системы координат

Пусть необходимо получить функцию расчета координат $(X, Y) = F(x, y)$ для поворота вокруг точки с координатами (x_0, y_0) на угол α



Связь преобразований объектов и координат



Общее преобразование:

$$\begin{cases} X = (x - x_0) \cos\alpha - (y - y_0) \sin\alpha + x_0, \\ Y = (x - x_0) \sin\alpha + (y - y_0) \cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

1. Введем новую систему координат $(x', 0', y')$ с центром в точке (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$

2. Осуществляем поворот вокруг центра новой системы координат

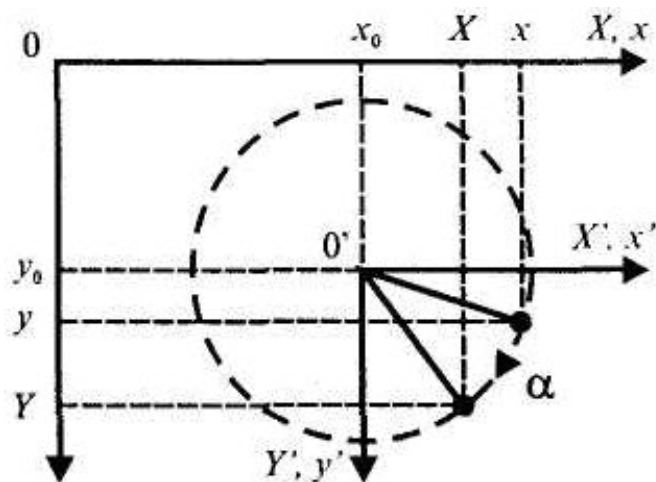
$$\begin{cases} X' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ Y' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases}$$

3. Преобразуем координаты (X', Y') в (X, Y) со сдвигом центра в точку $(0, 0)$

$$\begin{cases} X = X' + x_0, \\ Y = Y' + y_0. \end{cases}$$

Связь преобразований объектов и координат

Преобразования в матричной форме:



$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{сдвиг системы} \\ \text{координат на} \\ -x_0, -y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{поворот} \\ \text{на угол} \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{сдвиг системы} \\ \text{координат на} \\ x_0, y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & -x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha + y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$