ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Нормальная кривизна линии на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности

Нормальная кривизна линии на поверхности. Вторая квадратичная форма

Определение: проекция вектора кривизны кривой, лежащей на поверхности, на нормаль к поверхности в данной точке кривой называется ***нормальной кривизной кривой***.

Пусть кривая на поверхности задана уравнением: $\bar{r} = \bar{r}(u(s); v(s))$

$\bar{r}''$ - вектор кривизны кривой;

$\bar{N} = [\bar{r}_u; \bar{r}_v]$ – вектор нормали к поверхности,

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{[\bar{r}_u; \bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u; \bar{r}_v]|} = \frac{[\bar{r}_u; \bar{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad (15)$$

(15) – единичный вектор нормали.

$$\bar{r}' = \bar{r}_u u' + \bar{r}_v v'$$

$$\bar{r}_u = \bar{r}_u(u(s), v(s))$$

$$\bar{r}_v = \bar{r}_v(u(s), v(s))$$

Нормальная кривизна линии на поверхности. Вторая квадратичная форма

$$\bar{r}_u' = \bar{r}_{uu} u' + \bar{r}_{uv} v'$$

$$\bar{r}_{uu} \overset{об}{\equiv} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} \qquad \bar{r}_{uv} \overset{об}{\equiv} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} \qquad \bar{r}_{vv} \overset{об}{\equiv} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2}$$

$$\bar{r}_v' = \bar{r}_{uv} u' + \bar{r}_{vv} v'$$

$$\bar{r}'' = \bar{r}_u' u' + \bar{r}_u u'' + \bar{r}_v' v' + \bar{r}_v v'' = \bar{r}_{uu} u'^2 + \bar{r}_{uv} u' v' + \bar{r}_u u'' + \bar{r}_{vu} u' v' + r_{vv} v'^2 + \bar{r}_v v'' =$$

$$= \bar{r}_{uu} u'^2 + 2\bar{r}_{uv} u' v' + \bar{r}_{vv} v'^2 + \bar{r}_u u'' + \bar{r}_v v''$$

k_n - нормальная кривизна кривой на поверхности.

$$k_n = np_{\bar{n}} \bar{r}'' = \bar{n} \cdot \bar{r}'' = \bar{r}_{uu} \bar{n} u'^2 + 2\bar{r}_{uv} \bar{n} u' v' + \bar{r}_{vv} \bar{n} v'^2 + \bar{r}_u \bar{n} u'' + \bar{r}_v \bar{n} v''$$

$$\bar{r}_u \bar{n} = \bar{r}_v \bar{n} = 0$$

$$k_n = \bar{r}_{uu} \bar{n} u'^2 + 2\bar{r}_{uv} \bar{n} u' v' + \bar{r}_{vv} \bar{n} v'^2$$

Нормальная кривизна линии на поверхности. Вторая квадратичная форма

$$L \overset{об}{\equiv} \overline{r}_{uu}\overline{n} \qquad M \overset{об}{\equiv} \overline{r}_{uv}\overline{n} \qquad N \overset{об}{\equiv} \overline{r}_{vv}\overline{n} \tag{16}$$

Учитывая обозначения (16) получим:

$$k_n = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2,$$

и учтем, что $u' = \dfrac{du}{ds}$, тогда

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \tag{17}$$

$$\varphi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{18}$$

(18) – формула второй квадратичной формы поверхности.

Вычисление коэффициентов второй квадратичной формы

$$\begin{cases} L = \dfrac{\overline{r}_{uu}\overline{r}_u\overline{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \\ M = \dfrac{\overline{r}_{uv}\overline{r}_u\overline{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \\ N = \dfrac{\overline{r}_{vv}\overline{r}_u\overline{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \end{cases} \qquad (19)$$

С другой стороны, $\overline{r}_u\overline{n} = \overline{r}_v\overline{n} = 0,$ продифференцируем по u

$$0 = (\overline{r}_u\overline{n})'_u = \overline{r}_{uu}\overline{n} + \overline{r}_u\overline{n}_u$$

$$\begin{cases} L = -\overline{r}_u\overline{n}_u \\ M = -\overline{r}_u\overline{n}_v = -\overline{r}_v\overline{n}_u \\ N = -\overline{r}_v\overline{n}_v \end{cases} \qquad (20)$$

Вычисление коэффициентов второй квадратичной формы

$$\varphi_2 = -\bar{r}_u\bar{n}_u du^2 - \bar{r}_u\bar{n}_v dudv - \bar{r}_v\bar{n}_u dvdu - \bar{r}_v\bar{n}_v dv^2 = -(\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)(\bar{n}_u du + \bar{n}_v dv)$$

$$\varphi_2 = -d\bar{r}d\bar{n}, \qquad (21)$$

так как $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv, \qquad d\bar{n} = \bar{n}_u du + \bar{n}_v dv.$

Утверждение 2.

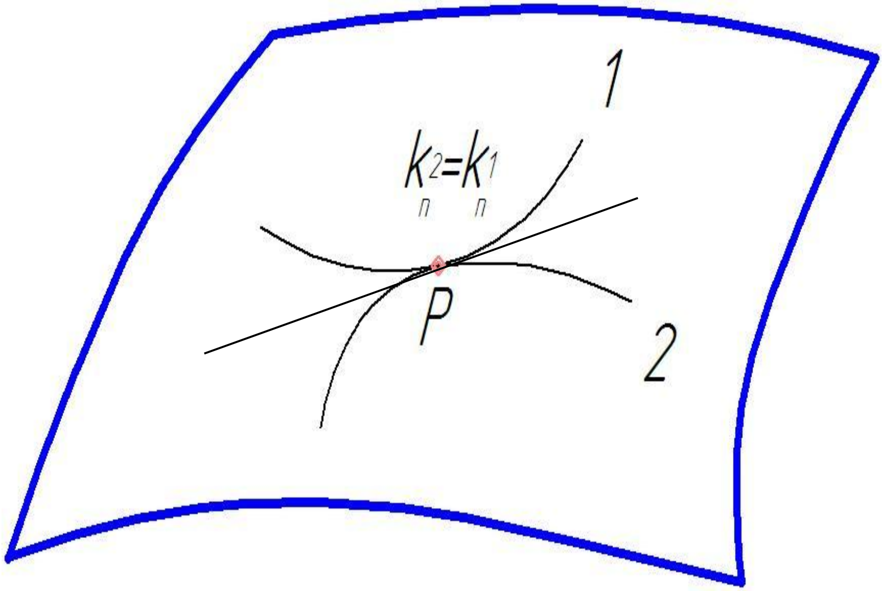
Нормальные кривизны двух кривых на поверхности, проходящих через точку *P* и имеющих в этой точке общую касательную, в точке *P* равны между собой.

Доказательство:

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{|: du^2}{|: du^2} = \frac{L + 2M\dfrac{dv}{du} + N\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2}{E + 2F\dfrac{dv}{du} + G\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2}$$

Вычисление коэффициентов второй квадратичной формы

Пусть две кривые на поверхности имеют в точке *P* общую касательную



L, M, N, E, F, G – функции от u и v;

$L_1=L_2$, $M_1=M_2$, $N_1=N_2$, $E_1=E_2$, $F_1=F_2$, $G_1=G_2$ в точке *P*.

$\frac{dv}{du}$ задает направление касательной в касательной плоскости. Так как у кривых в т. *P* общая касательная, то

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_1 = \left(\frac{dv}{du}\right)_2$$

Вычисление коэффициентов второй квадратичной формы

в этой точке, следовательно: $k_{n_1} = k_{n_2}.$

Ч.т.д.

Определение: нормальная кривизна кривой на поверхности в данной точке называется ***нормальной кривизной поверхности в данной точке в данном направлении касательной плоскости***.