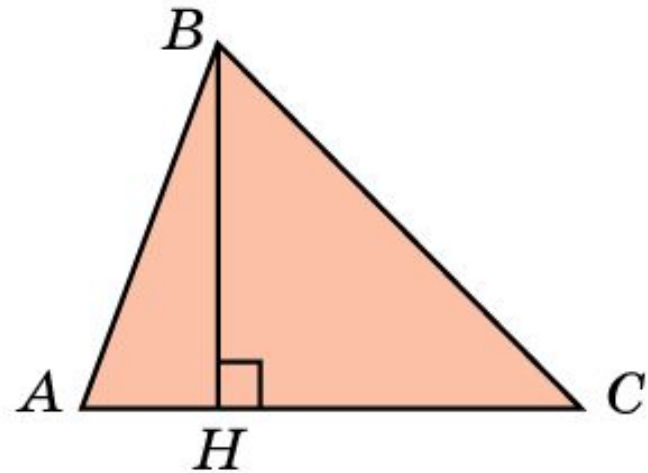
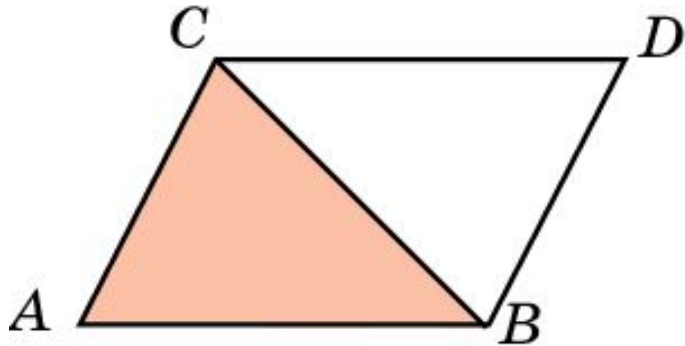


Площадь треугольника

Теорема 1. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



Следствие. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Теорема 2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

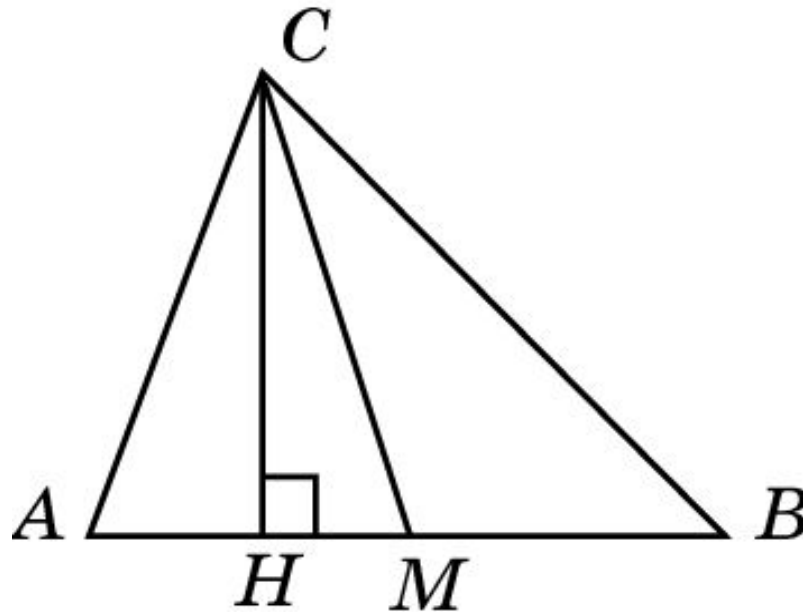
Пример 1

Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a .

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Пример 2

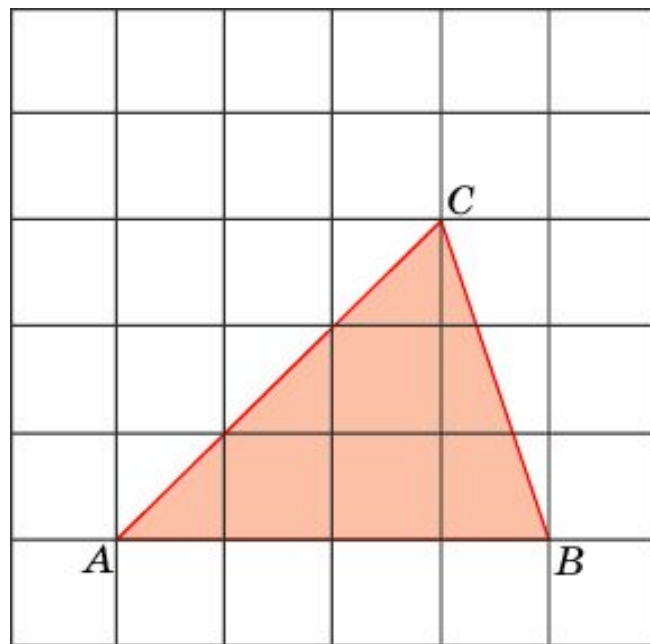
Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.



Доказательство: Пусть CM – медиана треугольника ABC . Треугольники AMC и BMC имеют равные стороны $AM = BM$ и общую высоту CH . Следовательно, их площади равны и треугольники равновелики.

Упражнение 1

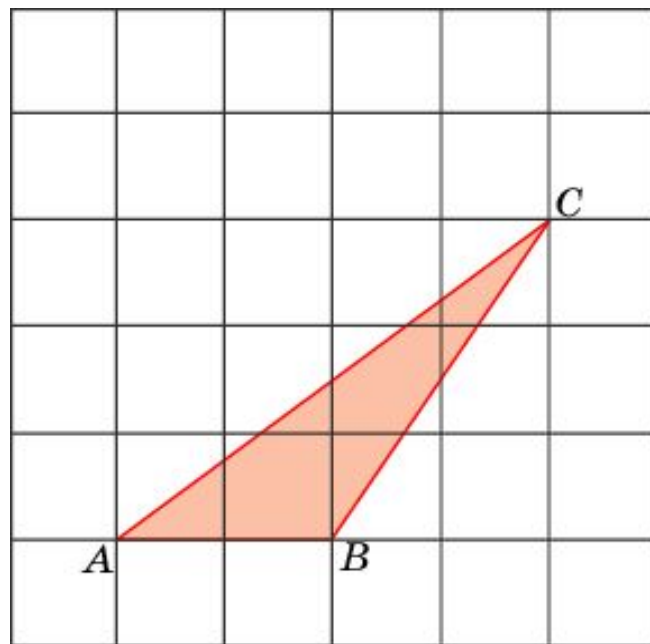
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 6.

Упражнение 2

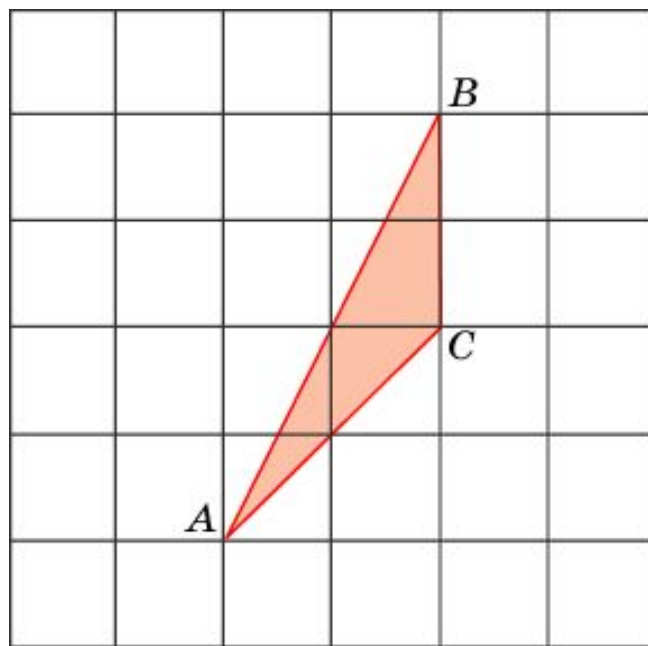
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 3.

Упражнение 3

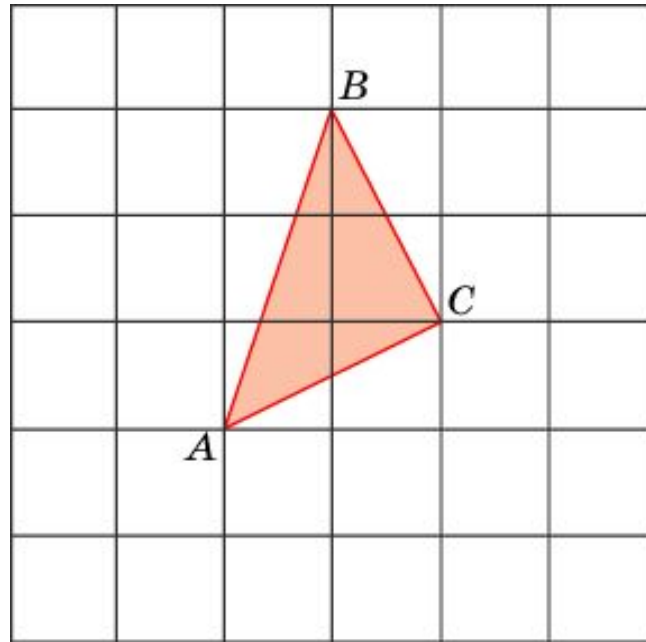
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 2.

Упражнение 4

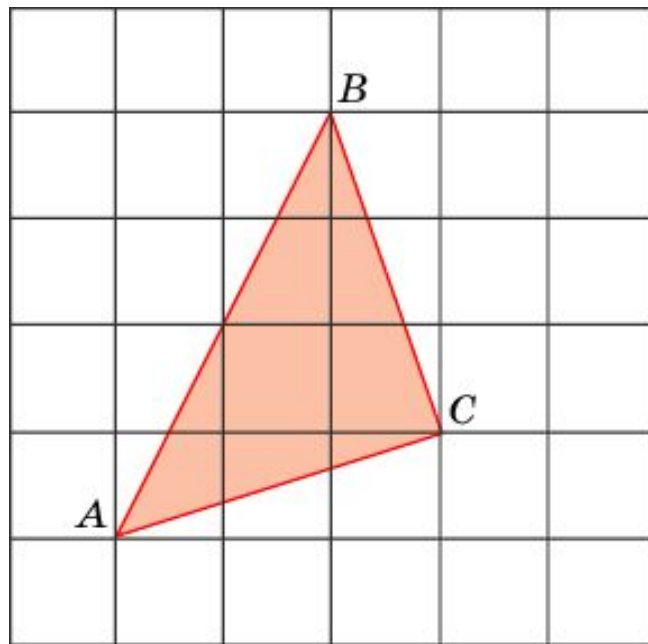
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 2,5.

Упражнение 5

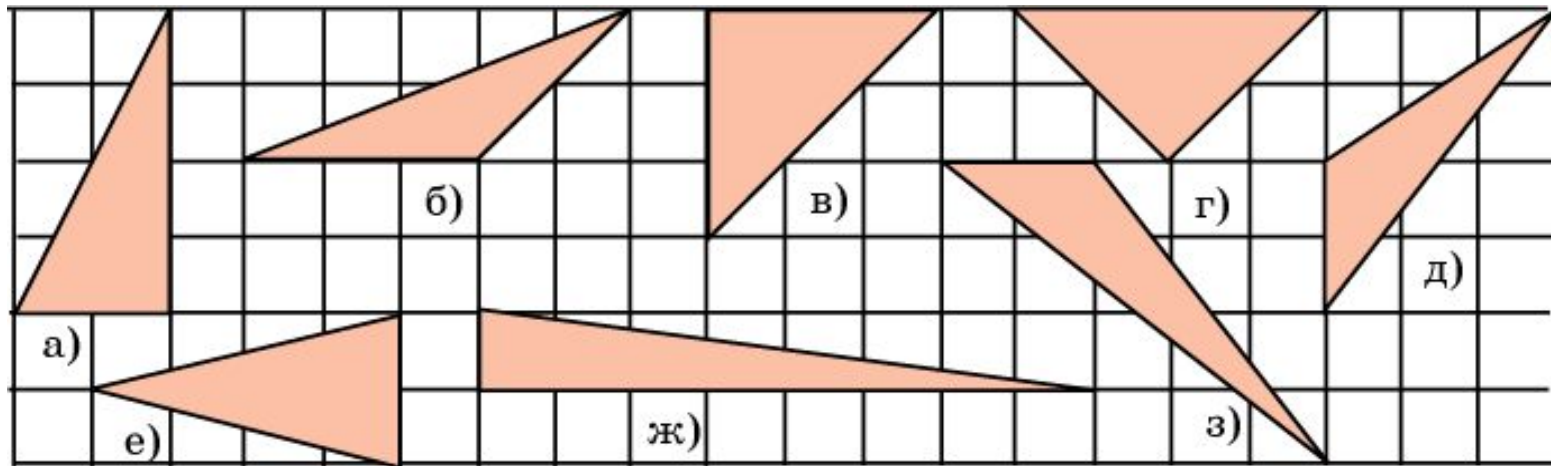
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге, клетками которой являются единичные квадраты.



Ответ: 5.

Упражнение 6

На рисунке укажите равновеликие треугольники.



Ответ: а), г), е), ж), з); б), д).

Упражнение 7

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 7 см; б) 1,2 м и 35 дм.

Ответ: а) 14 см^2 ;
б) $2,1 \text{ м}^2$.

Упражнение 8

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза соответственно равны: а) 4 и 5; б) 12 и 13.

Ответ: а) 6;
б) 30.

Упражнение 9

Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание и боковые стороны соответственно равны: а) 6 и 5; б) 16 и 17.

Ответ: а) 12;
б) 120.

Упражнение 10

Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 8, а угол между ними равен:
а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 120° ; д) 135° ; е) 150° .

Ответ: а) 24.

б) $12\sqrt{2}$;

в) $12\sqrt{3}$;

г) $12\sqrt{3}$;

д) $12\sqrt{2}$;

е) 24.

Упражнение 11

Площадь треугольника равна 48 см^2 . Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 32 см .

Ответ: 3 см .

Упражнение 12

Две стороны треугольника равны 6 см и 5 см. Может ли его площадь быть равна: а) 10 см^2 ; б) 15 см^2 ; в) 20 см^2 ?

Ответ: а) Да;
б) да;
в) нет.

Упражнение 13

В треугольнике ABC две стороны равны a и b .
При каком угле между ними площадь
треугольника будет наибольшей?

Ответ: 90° .

Упражнение 14

Как изменится площадь треугольника, если: а) не изменяя его сторону, увеличить, опущенную на нее, высоту в два раза; б) не изменяя его высоты, уменьшить сторону, на которую она опущена, в три раза; в) одну сторону увеличить в четыре раза, а высоту, опущенную на нее, уменьшить в семь раз?

Ответ: а) Увеличится в 2 раза;
б) уменьшится в 3 раза;
в) уменьшится в 1,75 раза.

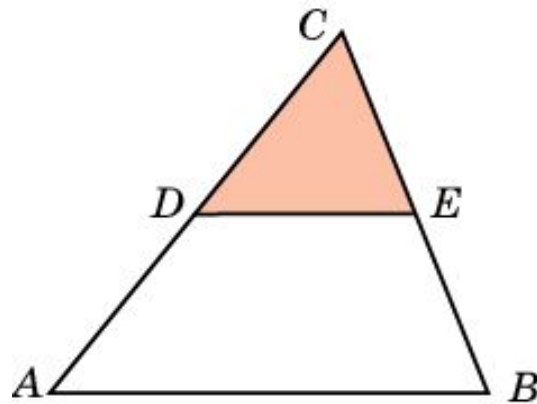
Упражнение 15

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 200 см^2 .

Ответ: $20\sqrt{2}$ см.

Упражнение 16

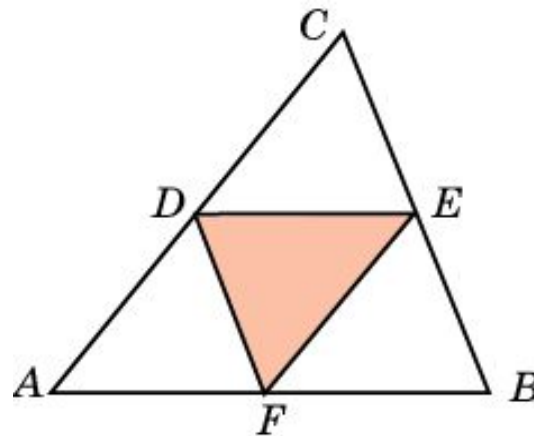
Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, отсекаемого его средней линией?



Ответ: Одну четвертую.

Упражнение 17

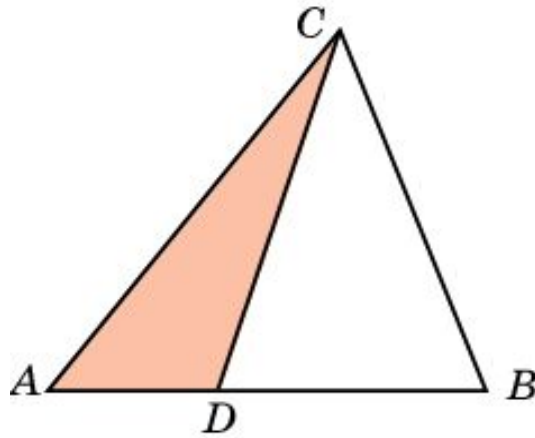
В треугольнике проведены все средние линии. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного этими линиями?



Ответ: Одну четвертую.

Упражнение 18

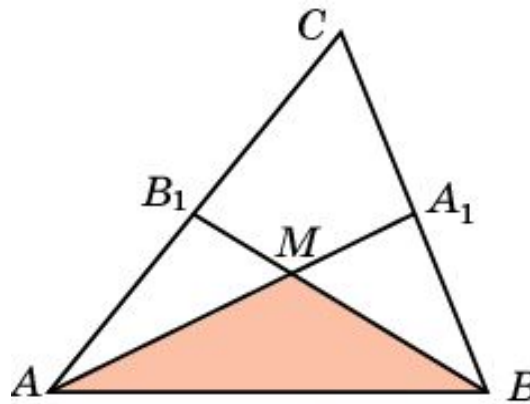
Точка D делит сторону AB треугольника ABC в отношении $2:3$. Найдите площадь треугольника ACD , если площадь треугольника ABC равна 10 .



Ответ: 4.

Упражнение 19

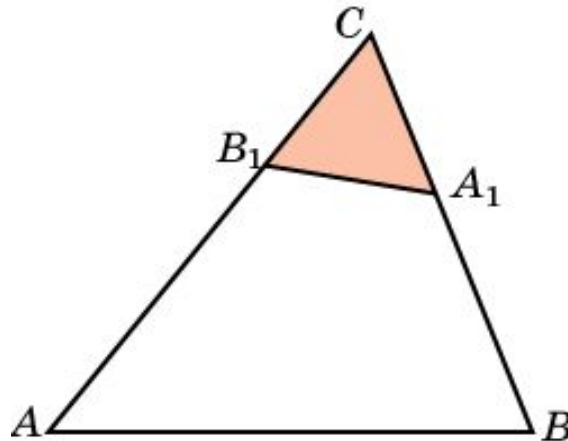
Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника ABM ?



Ответ: $1/3$.

Упражнение 20

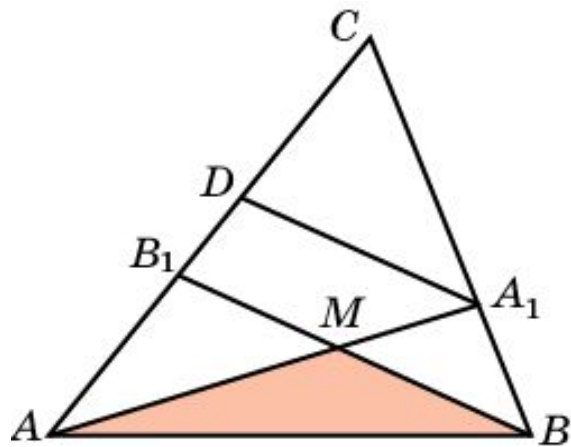
Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях соответственно $3:2$ и $2:1$. Найдите площадь треугольника A_1B_1C , если площадь треугольника ABC равна 15 .



Ответ: 2.

Упражнение 21*

Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях соответственно $1:2$ и $2:3$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника ABM , если площадь треугольника ABC равна 15 .

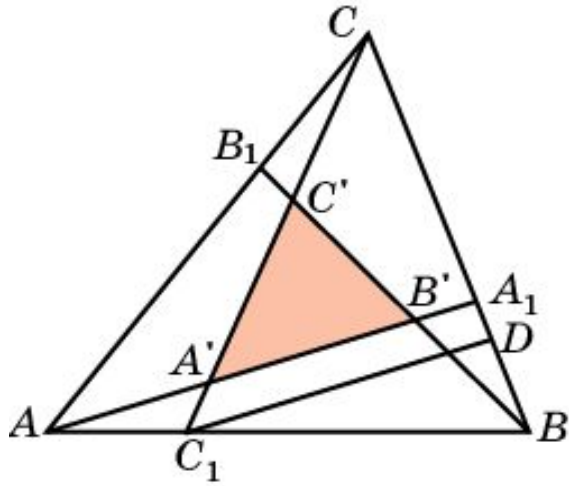


Решение. Через точку A_1 проведем отрезок A_1D , параллельный прямой BB_1 . Тогда $B_1D:DC = 1:2$, следовательно, $AM:MA_1 = 2:1$.

Площадь треугольника ABA_1 равна 6 . Искомая площадь треугольника ABM равна 4 .

Упражнение 22*

Точки A_1 , B_1 и C_1 делят стороны BC , CA и AB в отношении 1:2. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$, ограниченного отрезками AA_1 , BB_1 , CC_1 , если площадь треугольника ABC равна 1.



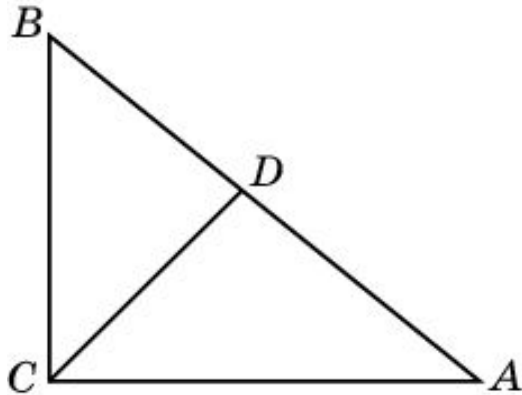
Решение. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна площади треугольника ABC минус площади треугольников AA_1B , BB_1C , CC_1A плюс площади треугольников $AA'C_1$, $BB'A_1$, $CC'B_1$. Площади треугольников AA_1B , BB_1C , CC_1A равны $1/3$.

Для нахождения площади треугольников $AA'C_1$, $BB'A_1$, $CC'B_1$ проведем отрезок C_1D параллельный прямой AA_1 . Тогда $A_1D:DB = 1:2$, $A'C_1:CA' = A_1D:CA_1 = 1:6$. Значит, площадь треугольника $AA'C_1$ равна одной седьмой площади треугольника ACC_1 и равна $1/21$.

Остальные треугольники имеют такую же площадь. Следовательно, площадь треугольника $A'B'C'$ равна $1/7$.

Упражнение 23*

В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны соответственно 4 и 3, CD – биссектриса. Найдите площадь треугольника ACD .

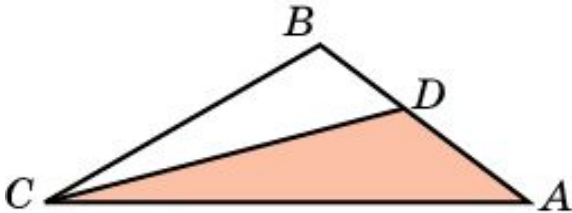


Решение. Воспользуемся тем, что биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

Отрезок AD составляет четыре седьмых отрезка AB , следовательно, площадь треугольника ACD равна четыре седьмых площади треугольника ABC , т.е. равна $3\frac{3}{7}$.

Упражнение 24*

В треугольнике ABC $AC=6$, $BC=4$, угол ACB равен 30° , CD – биссектриса. Найдите площадь треугольника ACD .

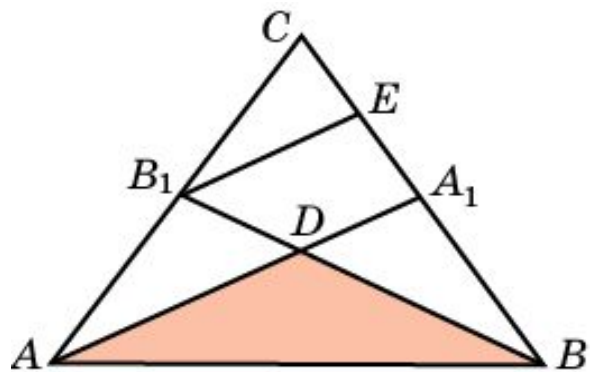


Решение. Воспользуемся тем, что биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

Площадь треугольника ABC равна 6. Отрезок AD составляет шесть десятых отрезка AB , следовательно, площадь треугольника ACD равна 3,6.

Упражнение 25*

В треугольнике ABC $AC=BC=5$, $AB=6$, биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника ABD .



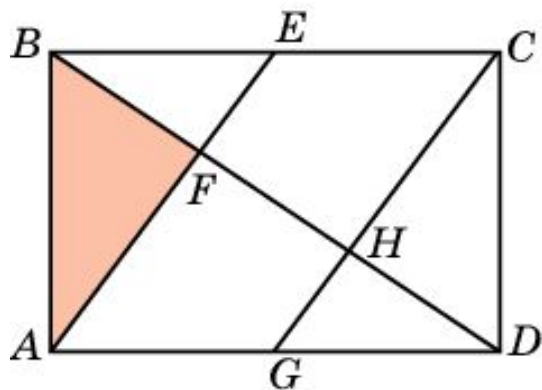
Решение. Воспользуемся тем, что биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

Площадь треугольника ABC равна 12. Отрезок AB_1 составляет $6/11$ отрезка AC , следовательно, площадь треугольника ABV_1 равна $72/11$.

Проведем отрезок V_1E , параллельный прямой AA_1 . Тогда $CE:EA_1 = 5:6$, $EA_1:A_1V = 5:11$. Площадь треугольника ABD равна 4,5.

Упражнение 26*

В прямоугольнике $ABCD$ $AB=4$, $BC=6$, E – середина стороны BC . Отрезки AE и BD пересекаются в точке F . Найдите площадь треугольника ABF .



Решение. Соединим точку C с серединой G отрезка AD . Обозначим H точку пересечения отрезков CG и BD .

Отрезки BF , FH и HD равны. Следовательно, площадь треугольника ABF равна одной третьей площади треугольника ABD и равна 4.

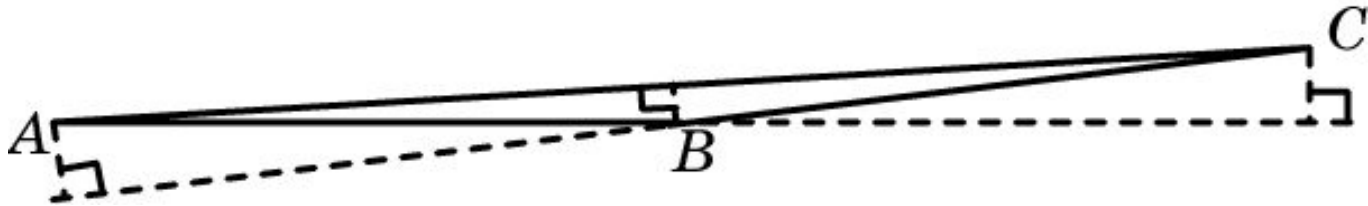
Упражнение 27*

Найдите геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному треугольнику и имеющих с ним одну общую сторону.

Ответ: Две параллельные прямые.

Упражнение 28*

Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 м²?



Ответ: Да.