

Математика

Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 1

Исследование функций с помощью производной.

1. Условие монотонности функции.
2. Экстремум функции. Необходимое условие существования экстремума.
3. Первый достаточный признак экстремума.
4. Общая схема отыскания экстремума.

5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.

6. Точки перегиба.

7. Асимптоты .

8. Общая схема построения графика.

9. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

1. Условие монотонности функции.

Т Для того чтобы дифференцируемая на (a, b) функция $f(x)$ не убывала (не возрастала), *необходимо и достаточно*, чтобы её производная $f'(x)$ на этом интервале была неотрицательной (неположительной).

2. Экстремум функции. Необходимое условие существования экстремума.

Точка x_0 называется точкой **максимума** (**минимума**) функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad (f(x) - f(x_0) > 0).$$

Значение $f(x_0)$ называется локальным максимумом (минимумом) функции.

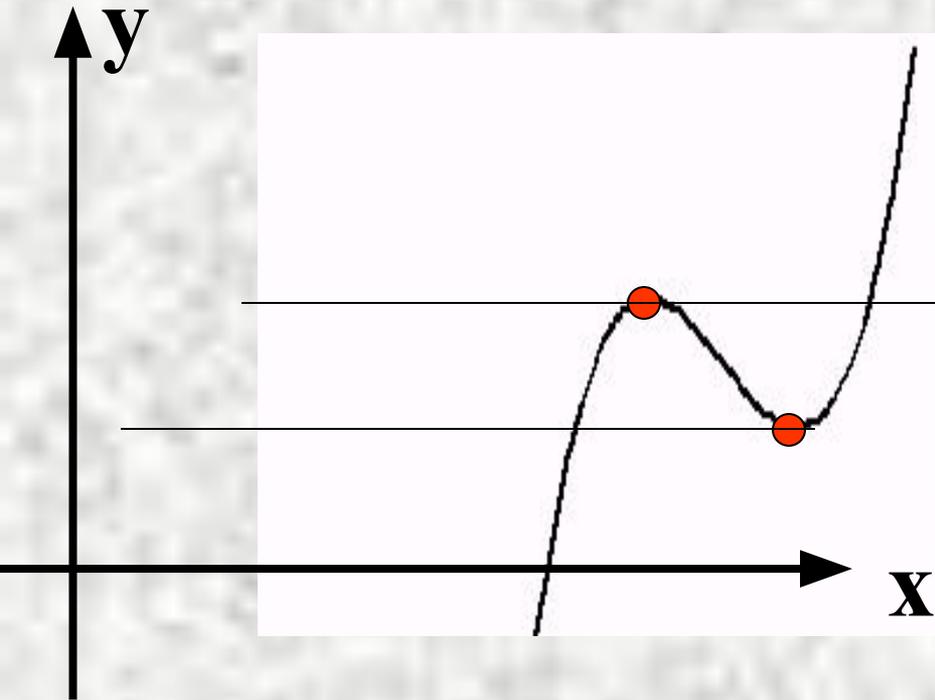
Локальные максимумы и минимумы функции называется её **экстремумами**.

T (Необходимое условие существования экстремума).

Если функция дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то её производная в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0$$

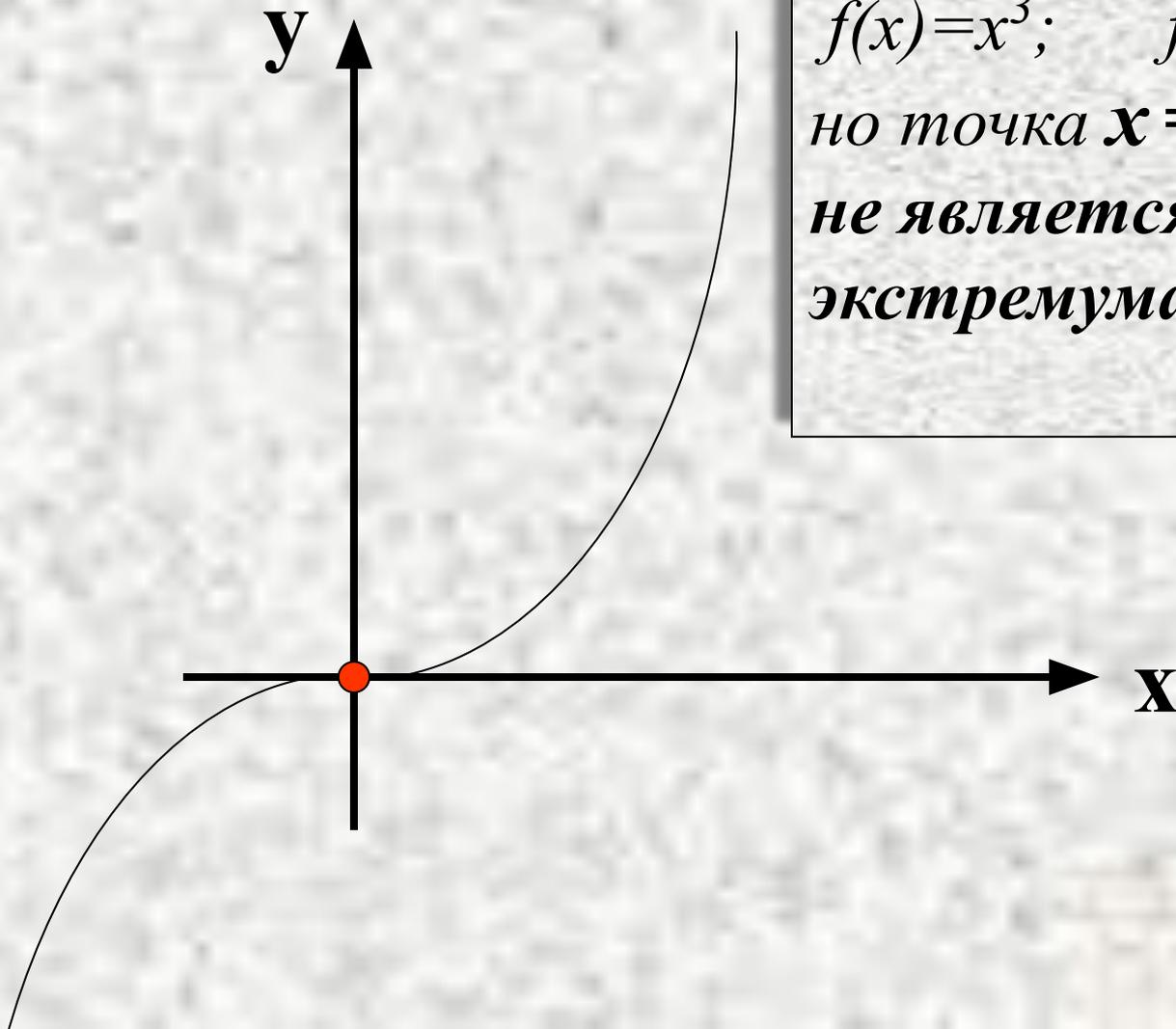
Геометрический смысл теоремы



Если в точках локального экстремума существует касательная к графику функции, то она параллельна оси Ox .

Пример, иллюстрирующий необходимость условия:

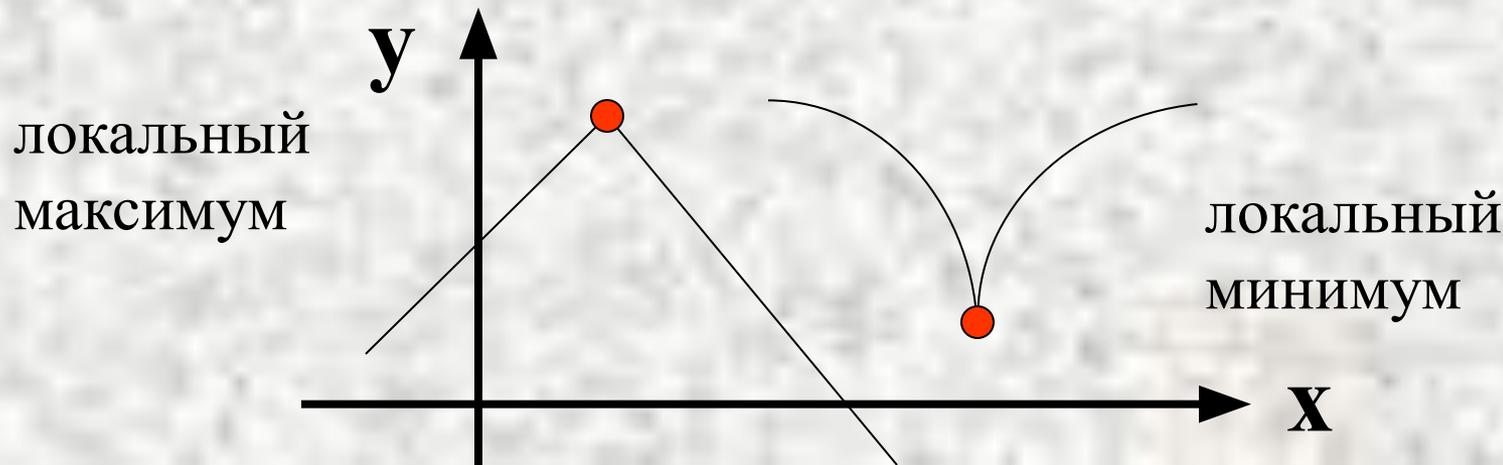
$f(x)=x^3; \quad f'(0)=0,$
*но точка $x=0$
не является точкой
экстремума.*



Следствия.

1. Если $f(x)$ дифференцируема на (a,b) , то она *может иметь* экстремумы только в тех точках, где $f'(x)=0$.
2. $f(x)$ *может иметь* экстремумы и в точках, где производная не существует, или равна бесконечности.

Точки, в которых производная равна нулю, бесконечности, или не существует называются **критическими** точками.



3. Первый достаточный признак экстремума.

T1

Точка x_0 является точкой экстремума $f(x)$, если её производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через эту точку.

При смене знака с $+$ на $-$ в точке x_0 - *максимум*,
при смене знака с $-$ на $+$ в точке x_0 - *минимум*.

Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку x_0 , то экстремума в этой точке нет.

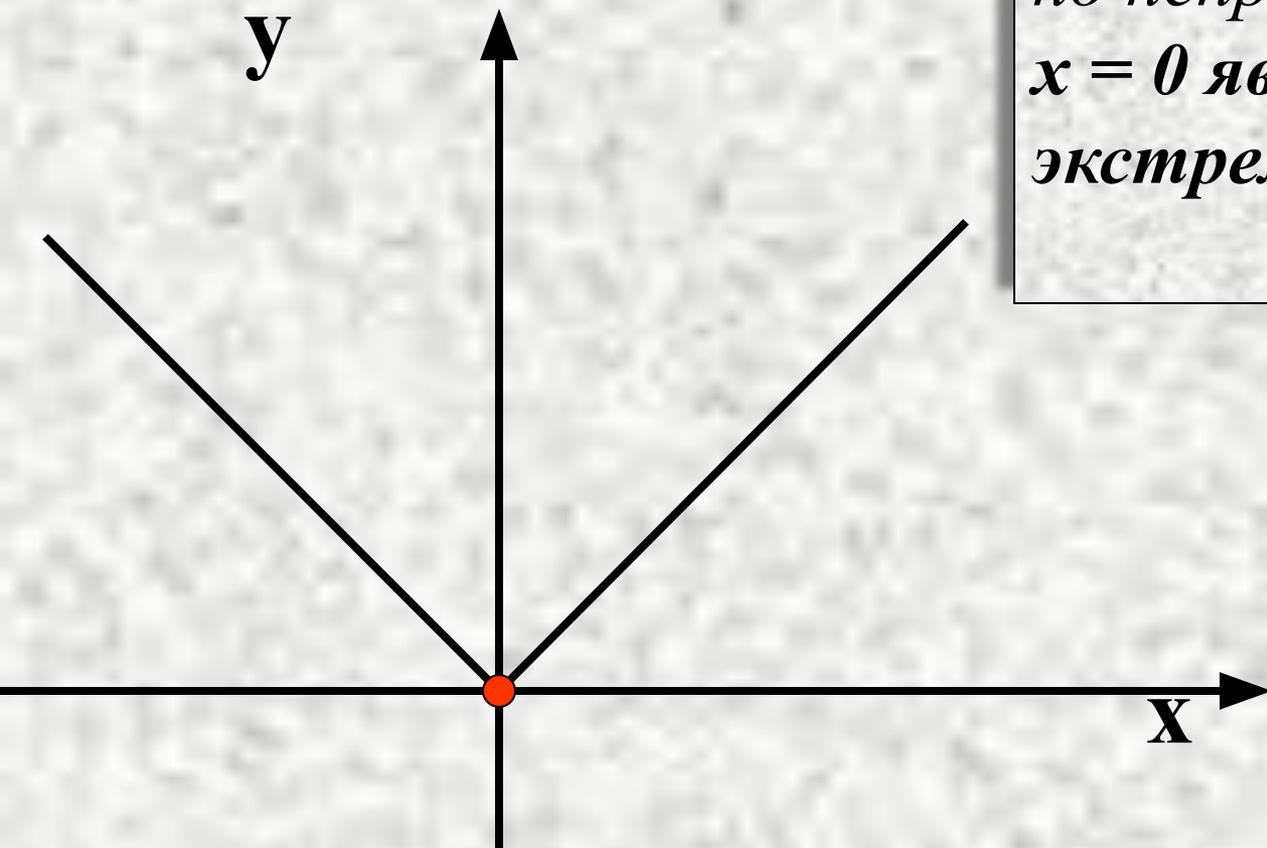
Пример.

$$f(x) = |x|;$$

В точке $x = 0$

*$f(x)$ - недифференцируема,
но непрерывна.*

*$x = 0$ является точкой
экстремума.*



4. Общая схема отыскания экстремума.

Пусть $f(x)$ непрерывна на (a,b) и дифференцируема всюду за исключением конечного числа точек (a,b) .

1. Находим точки x_1, x_2, \dots, x_n *возможного экстремума (критические точки)* – в них производная либо равна нулю, либо не существует, либо равна бесконечности.

2. Разбиваем (a,b) на *интервалы монотонности*
 (a, x_1) , (x_1, x_2) , \dots , (x_n, b) ,

в каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет знак.

3. Определяем знак $f'(x)$ в каждом из этих интервалов.

4. По характеру смены знака $f'(x)$ при переходе через критические точки определяем вид экстремума (max или min), либо его отсутствие.

Пример.

$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2$. Найти экстремумы.

1. $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x$;

а) $2x^{-\frac{1}{3}} - 2x = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

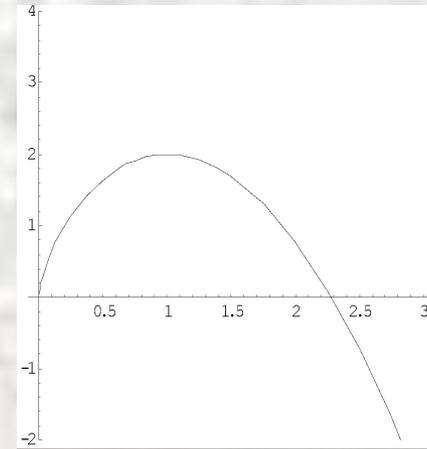
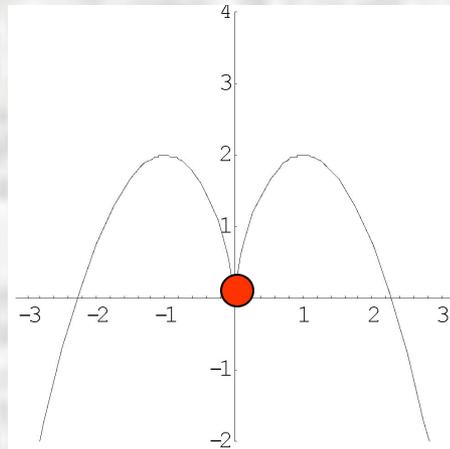
б) $x_3 = 0$

Составим таблицу

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2;$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - 2x;$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f(x)$		2		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\bar{\exists}$	$+$	0	$-$
Прим.		max		min		max	



5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.

T2 (второй достаточный признак экстремума)

Пусть в критической точке $x=c$ $f'(c) = 0$ и

$$\exists f''(c) \neq 0$$

Тогда:

- 1) если $f''(c) > 0$, то c - точка локального минимума
- 2) если $f''(c) < 0$, то c - точка локального максимума

Доказательство:

Пусть $f''(c) > 0$

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} > 0$$

Если $\Delta x < 0$, то $f'(c + \Delta x) < 0$.

Если $\Delta x > 0$, то $f'(c + \Delta x) > 0$.

При переходе через точку c первая производная меняет знак с минуса на плюс.

Значит c - точка минимума.

ТЗ (третий достаточный признак экстремума)

Пусть $f(x)$ имеет в критической точке $x=c$ *отличную от нуля* производную *чётного порядка* $f^{(2n)}(c)$,

а все производные более низкого порядка при этом равны нулю: $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(2n-1)}(c) = 0$,

Тогда:

1) если $f^{(2n)}(c) > 0$, то c - точка локального минимума

2) если $f^{(2n)}(c) < 0$, то c - точка локального максимума

3) если же первая отличная от нуля производная будет нечётная, то экстремума в такой критической точке нет.

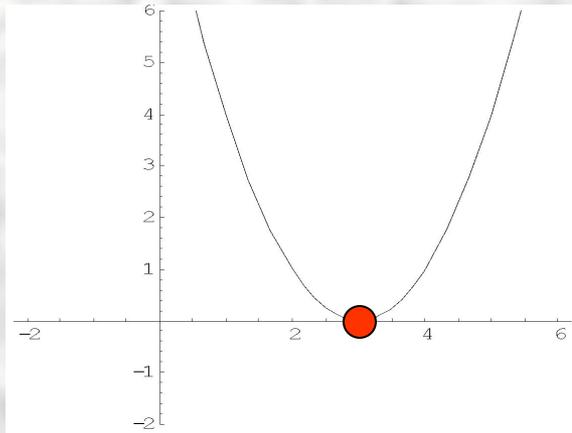
Пример.

$$f(x) = (x - a)^6;$$

$$1) f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(V)}(a) = 0;$$

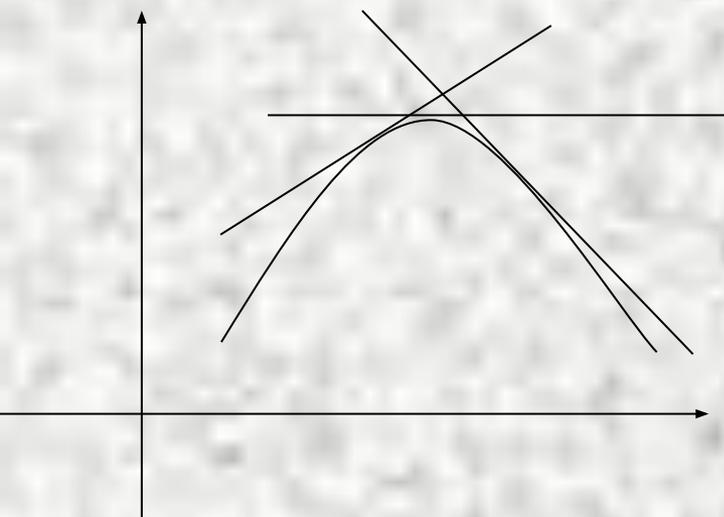
$$2) f^{(VI)}(a) = 6! > 0$$

a - точка локального минимума.



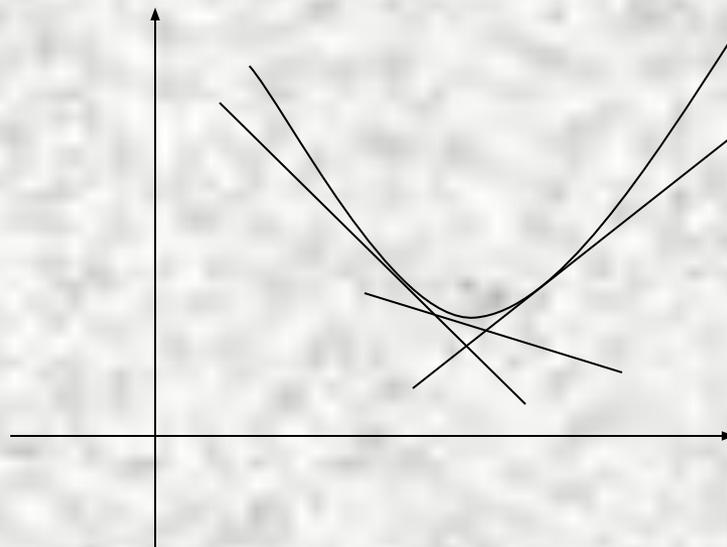
6. Точки перегиба.

Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) на (a,b) , если все точки кривой лежат *не выше* (*не ниже*) любой её касательной на (a,b) .



Выпуклая кривая

(не выше)



Вогнутая кривая

(не ниже)

Т Если во всех точках (a,b) $f''(x) < 0$, то график $f(x)$ на (a,b) является *выпуклым*.

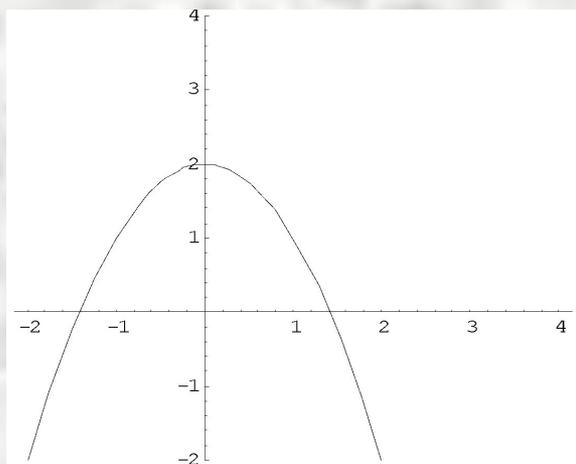
Если во всех точках (a,b) $f''(x) > 0$, то график $f(x)$ на (a,b) является *вогнутым*.

Пример.

$$f(x) = 2 - x^2;$$

$$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$$

График $f(x)$ - выпуклая линия



Точка M графика функции $y=f(x)$ называется ***точкой перегиба***, если при переходе через эту точку выпуклость меняется на вогнутость.

Т (необходимое условие существования точки перегиба)

Если точка x_0 является точкой перегиба графика функции $y=f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Замечание:

Если $f''(x_0) = 0$, то x_0 не обязательно будет точкой перегиба. (Пример : $y = x^4$, $x_0 = 0$)

Т (достаточное условие существования точки перегиба)

Если $f''(x)$ *меняет знак* при переходе через точку x_0 ,
то эта точка является точкой перегиба.

если $f''(x)$ *не меняет знак* при переходе через точку x_0 ,
то в этой точке перегиба нет.

7.**Асимптоты .**

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание.

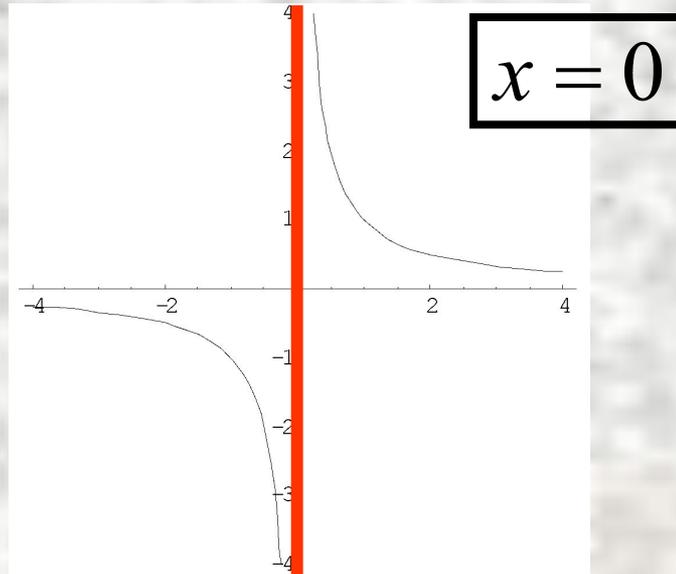
Если $f(x)$ имеет в точке a разрыв второго рода, то

$$x = a$$

- уравнение вертикальной асимптоты
графика $f(x)$

Пример.

$$f(x) = \frac{1}{x}, x = 0$$



Прямая $y = k_+ x + b_+$ называется

наклонной асимптотой графика $f(x)$

при $x \rightarrow +\infty$, если функция представима

в виде $f(x) = k_+ x + b_+ + \alpha(x)$, где

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Т (критерий существования наклонной асимптоты)

Для того чтобы график функции $f(x)$ имел **наклонную асимптоту** при $x \rightarrow +\infty$, необходимо и достаточно существование пределов:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_+,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_+ x) = b_+$$

Замечание.

Точно так же определяется наклонная асимптота и формулируется критерий её существования для случая

$$x \rightarrow -\infty.$$

Пример.

Найти асимптоты функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение.

- 1) Функция непрерывна в любой точке области определения \Rightarrow ***Вертикальных асимптот нет!***

$$2) \quad a) \quad k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

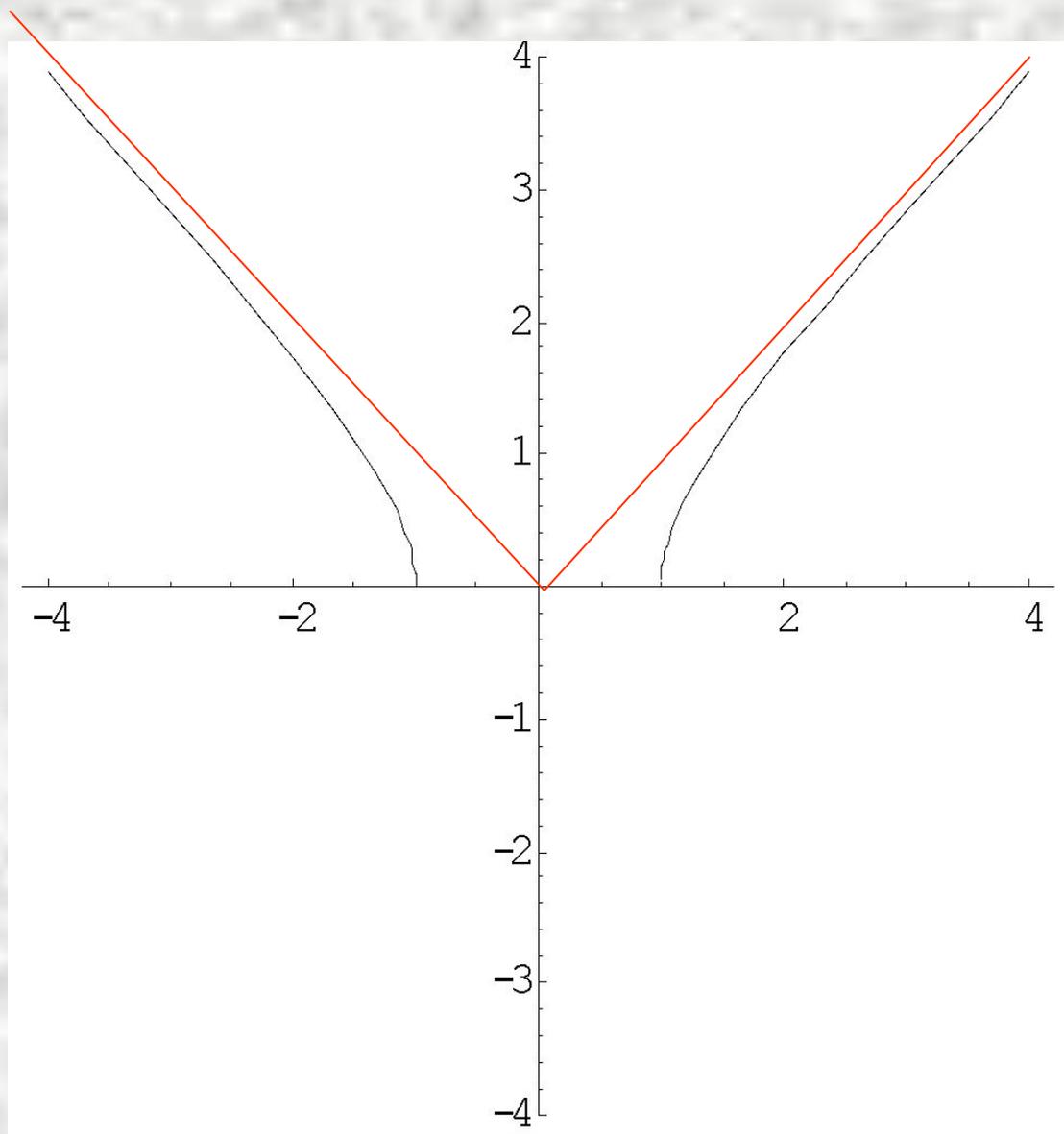
$$б) \quad b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = 0.$$

$$y = x$$

наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$,

$$y = -x$$

наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.



8. Общая схема построения графика функции.

Исследование функции $f(x)$ состоит из трёх этапов.

I. Информация из вида $f(x)$.

1. Область определения.

2. Чётность $(f(x) = f(-x))$, или $(f(x) = -f(-x))$,

периодичность

$$\left(f(x) = f(x + T), \forall x, T - \text{период} \right) \Rightarrow$$

сужение области изменения x для дальнейшего исследования.

3. Асимптоты.

4. Точки пересечения с осями координат.

II. Информация из вида $f'(x)$.

(Исследование на экстремум)

III. Информация из вида $f''(x)$.

(Нахождение точек перегиба)

IV. Таблица.

V. Построение Графика.

Вначале проводятся асимптоты, ставятся опорные точки, найденные на этапах I-III, строится линия графика.

Пример.

$$f(x) = x \cdot e^{-4x}$$

1. Область определения $x \in (-\infty, \infty)$
2. Функция общего вида.
3. Функция непрерывна всюду \Rightarrow вертикальных асимптот нет.

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{4x}} = 0, \quad b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{4x}} = 0.$$

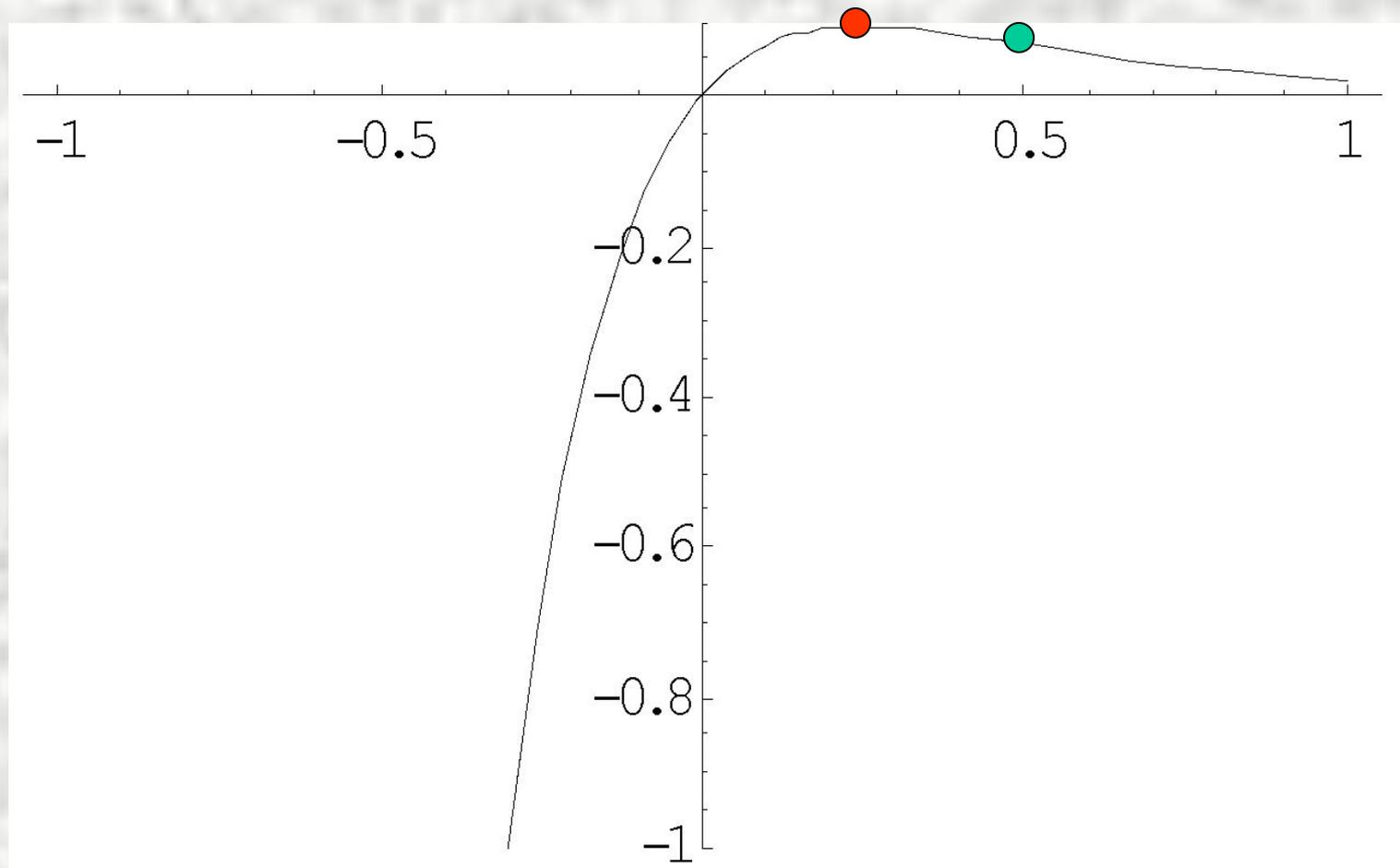
~~$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{4x}} = -\infty,$$~~

а значит $y = 0$ – единственная горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

4. Точки пересечения с осями: $x_0 = 0; y_0 = 0$

$$f'(x) = e^{-4x} (1 - 4x); \quad f''(x) = e^{-4x} (16x - 8);$$

x	$(-\infty, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
$f(x)$		$\frac{1}{4e}$		$\frac{1}{2e^2}$	
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
Прим.	\cap	max	\cap	перегиб	\cup



9.

Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо во внутренней точке x_0 отрезка, либо на границах отрезка.

Точки x_0 находятся среди критических точек функции.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$.

- 1) На интервале (a, b) находят критические точки функции.
- 2) В критических точках вычисляют значения функции.
- 3) Вычисляют значения функции на концах отрезка.
- 4) Из всех вычисленных значений функции выбирают наибольшее и наименьшее.