# Математика
# Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

# Лекция 1

## Исследование функций с помощью производной.

1. Условие монотонности функции.
2. Экстремум функции. Необходимое условие существования экстремума.
3. Первый достаточный признак экстремума.
4. Общая схема отыскания экстремума.

**5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.**

**6. Точки перегиба.**

**7.  Асимптоты .**

**8. Общая схема построения графика.**

**9. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.**

1. <u>**Условие монотонности функции.**</u>

**Т**

Для того чтобы дифференцируемая на ***(а,в)*** функция ***f(x)*** <u>***не убывала***</u> (не возрастала), ***необходимо и достаточно***, чтобы её производная ***f '(x)*** на этом интервале была <u>***неотрицательной***</u> (неположительной).

## 2. Экстремум функции. Необходимое условие существования экстремума.

Точка $x_0$ называется точкой **максимума (минимума)** функции $f(x)$ ,если существует такая окрестность этой точки,что для всех $x$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x)-f(x_0)<0 \qquad \left(f(x)-f(x_0)>0\right).$$

Значение $f(x_0)$ называется локальным максимумом (минимумом) функции.

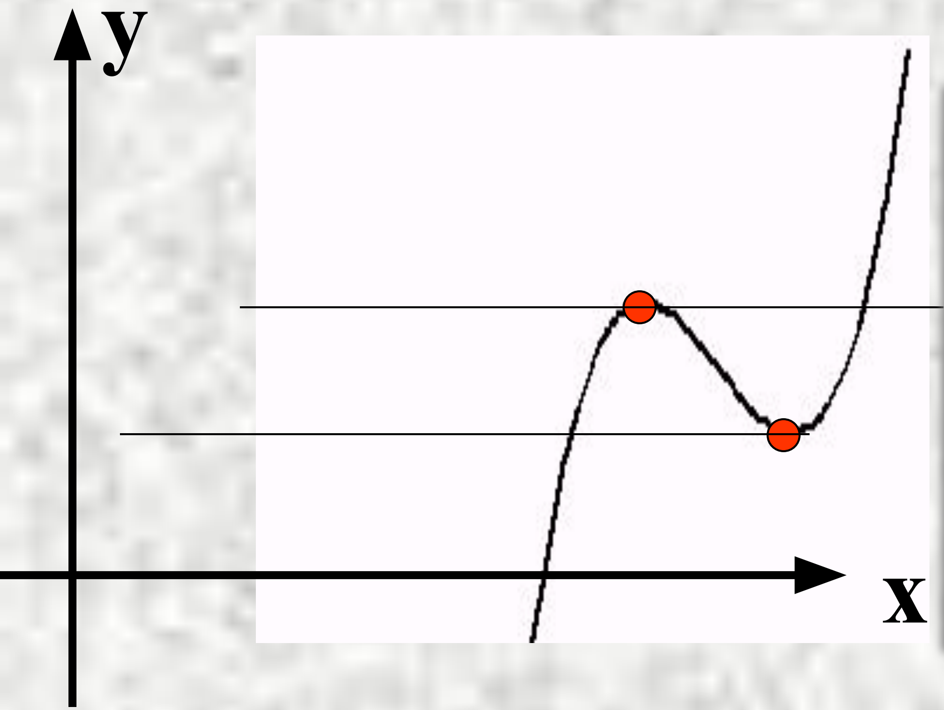
Локальные максимумы и минимумы функции называется её **экстремумами**.

Т (Необходимое условие существования экстремума).

Если функция дифференцируема в точке $x_0$ и имеет в этой точке экстремум, то её производная в этой точке равна нулю:

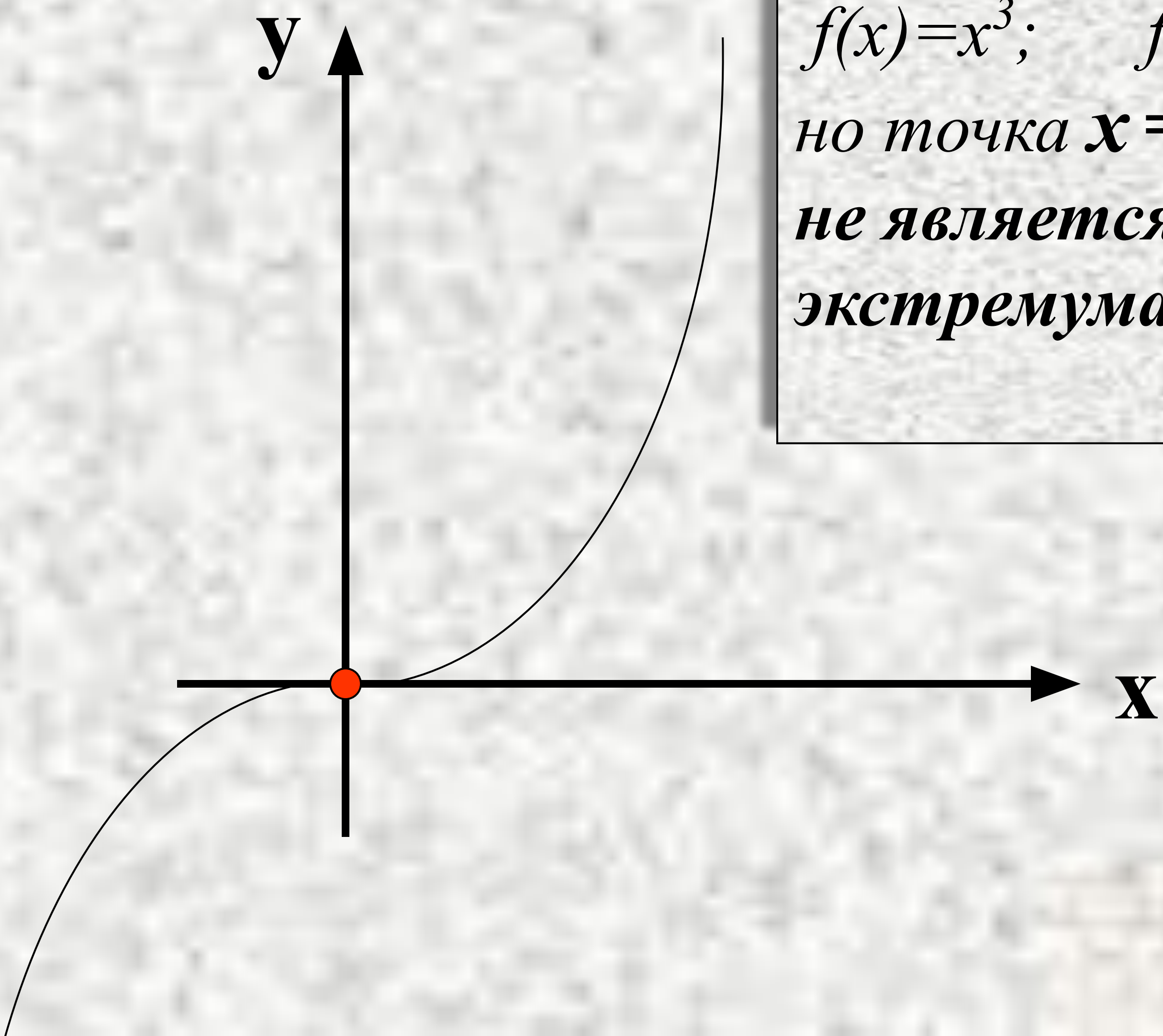
$$f'(x_0) = 0$$

# Геометрический смысл теоремы




*Если в точках локального экстремума существует* ***касательная*** *к графику функции, то она* ***параллельна оси ОХ.***

***Пример, иллюстрирующий необходимость условия:***




*$f(x)=x^3$; $f'(0)=0$,*

*но точка* ***x =0***

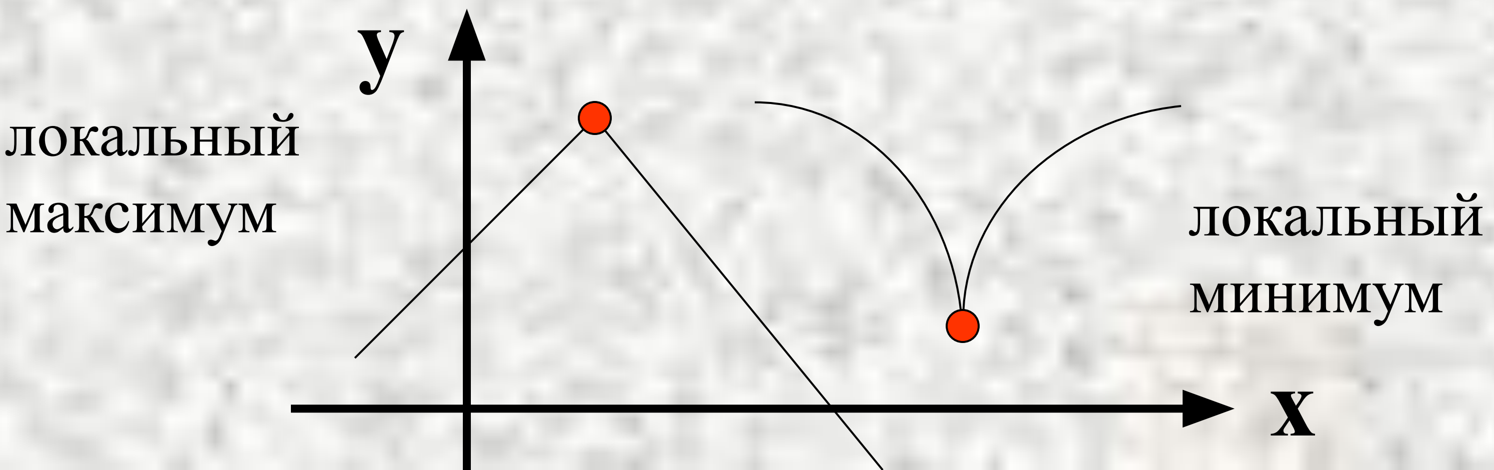
***не является точкой экстремума.***

# ***Следствия.***

1. Если ***f(x)*** дифференцируема на ***(a,b),*** то она ***может иметь*** экстремумы только в тех точках, где ***$\underline{f'(x) = 0}$*** .

***2. f(x) может иметь*** экстремумы и в точках, где производная не существует, или равна бесконечности.

Точки, в которых производная равна нулю, бесконечности, или не существует называются **критическими** точками .



3. **Первый достаточный признак экстремума.**

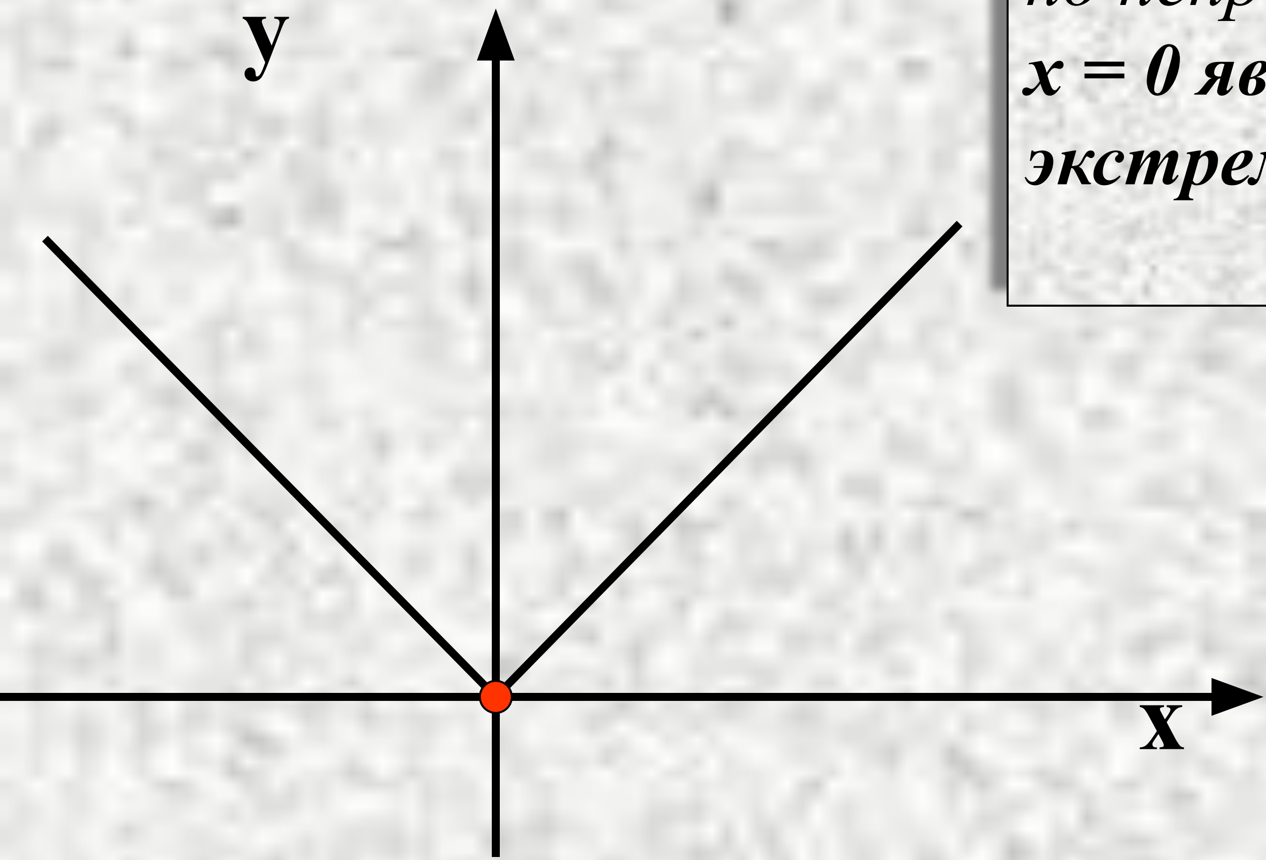
**Т1**

Точка $x_0$ является точкой экстремума $f(x)$, если её производная $f\,'(x)$ меняет знак при переходе через эту точку.

При смене знака с + на - в точке $x_0$- ***максимум***,
при смене знака с - на + в точке $x_0$- ***минимум.***

Если производная $f\,'(x)$ не меняет знака при переходе через точку $x_0$, то экстремума в этой точке нет.

***Пример.***




*f(x)= |x|;*
*В точке x = 0*
*f (x)- недифференцируема,*
*но непрерывна.*
***x = 0 является точкой экстремума.***

## 4. Общая схема отыскания экстремума.

Пусть *f(x)* непрерывна на *(a,b)* и дифференцируема всюду за исключением конечного числа точек *(a,b)* .

**1.**Находим точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***возможного экстремума (критические точки)*** – в них производная либо равна нулю, либо не существует, либо равна бесконечности.

**2.** Разбиваем *(a,b)* на ***интервалы монотонности***

$$(a, x_1), \ (x_1, x_2), \ \ldots, \ (x_n, b),$$

в каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет знак.

**3.** Определяем знак $f'(x)$ в каждом из этих интервалов.

**4.** По характеру смены знака ***f '(x)*** при переходе через критические точки определяем вид экстремума (max или min) , либо его отсутствие.

***Пример.***

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2.$$ Найти экстремумы.

1. $$f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x;$$

а) $2x^{-\frac{1}{3}} - 2x = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x_1 = -1}$ $\boxed{x_2 = 1}$

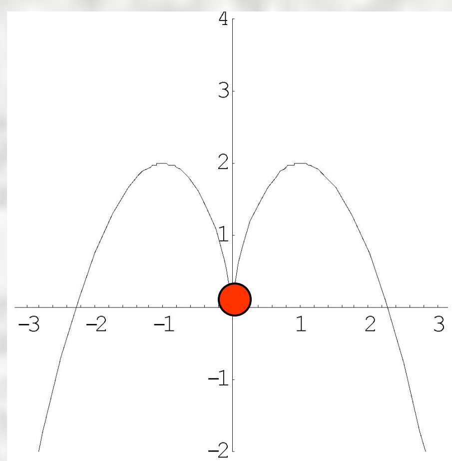
б) $\boxed{x_3 = 0}$

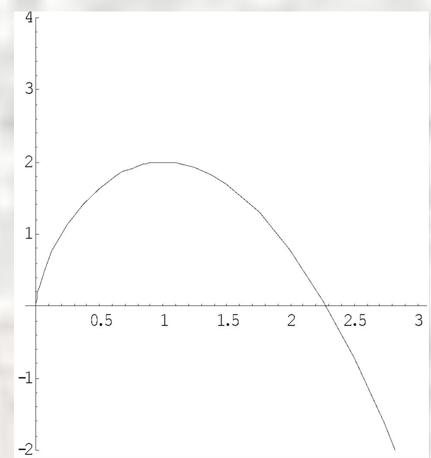
Составим таблицу

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2;$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - 2x;$$

| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, 1)$ | $1$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | 2 | ↘ | 0 | ↗ | 2 | ↘ |
| $f'(x)$ | + | 0 | – | $\nexists$ | + | 0 | – |
| Прим. | | max | | min | | max | |



## 5. **Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.**

**Т2** (второй достаточный признак экстремума)

Пусть в критической точке $x=c$ $\quad f'(c)=0$ и

$$\exists f''(c)\neq 0$$

**Тогда:**

1) если $f''(c)>0$, то $c$ – точка локального минимума

2) если $f''(c)<0$, то $c$ – точка локального максимума

***Доказательство:***

Пусть $f''(c) > 0$

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c+\Delta x) - f'(c)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \quad \frac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x} > 0$$

Если $\Delta x < 0,$ то $f'(c+\Delta x) < 0.$

Если $\Delta x > 0,$ то $f'(c+\Delta x) > 0.$

При переходе через точку $c$ первая производная меняет знак с минуса на плюс.

Значит $c$ - точка минимума.

**Т3** (третий достаточный признак экстремума)

Пусть ***f(x)*** имеет в критической точке ***x=c*** ***отличную от нуля*** производную ***чётного порядка*** $f^{(2n)}(c)$,

а все производные более низкого порядка при этом равны нулю: $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(2n-1)}(c) = 0$,

**Тогда:**

1) если $f^{(2n)}(c) > 0$, то ***c*** **–** точка локального минимума

2) если $f^{(2n)}(c) < 0$, то ***c*** **–** точка локального максимума

3) если же первая отличная от нуля производная будет нечётная, то экстремума в такой критической точке нет.

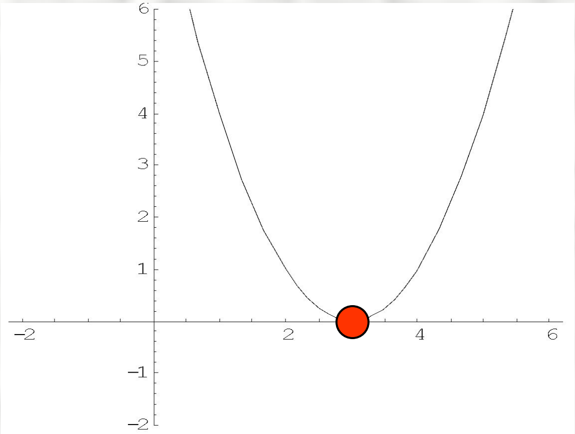
***Пример.***

$$f(x) = (x-a)^6;$$

1) $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(V)}(a) = 0;$

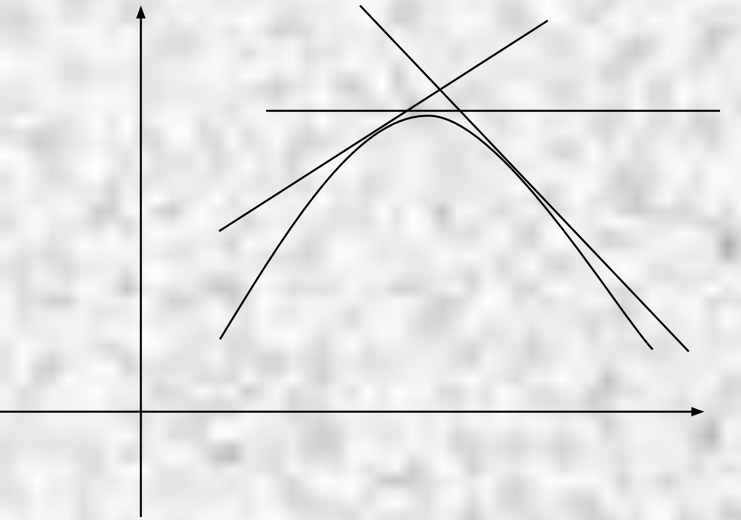
2) $f^{(VI)}(a) = 6! > 0$

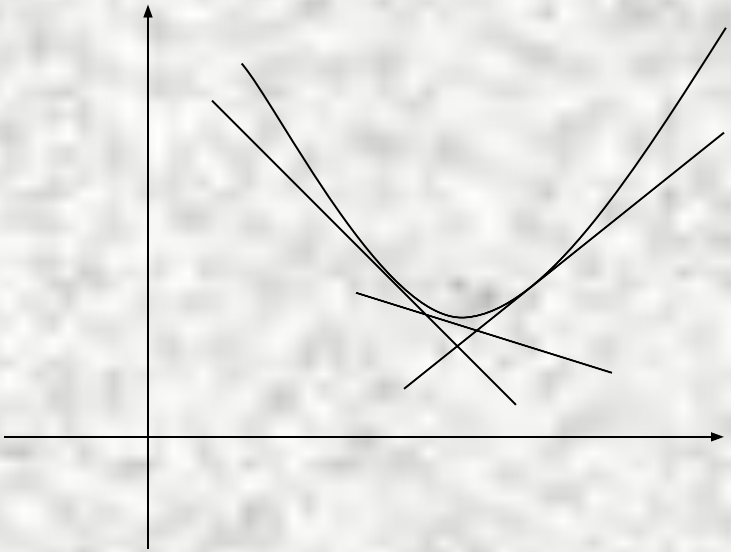
***а - точка локального минимума.***



# 6. Точки перегиба.

Кривая называется ***выпуклой*** (***вогнутой***) на (a,b), если все точки кривой лежат ***не выше (не ниже)*** любой её касательной на (a,b).





***Выпуклая кривая***

***(не выше)***

***Вогнутая кривая***

***(не ниже)***

**Т** Если во всех точках ***(a,b)*** $f''(x) < 0$,то график ***f (x)*** на ***(a,b)*** является ***выпуклым*** .

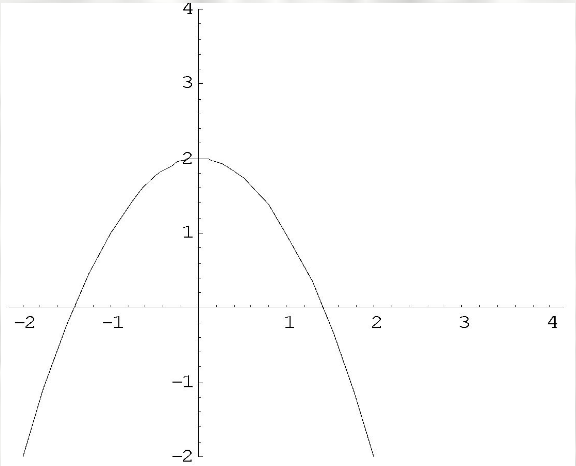
Если во всех точках ***(a,b)*** $f''(x) > 0$,то график ***f (x)*** на ***(a,b)*** является ***вогнутым.***

***Пример.***

$$f(x) = 2 - x^2;$$

$$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$$

***График f (x) - выпуклая линия***



Точка ***M*** графика функции ***y=f(x)*** называется ***точкой перегиба***, если при переходе через эту точку выпуклость меняется на вогнутость.

**Т** (необходимое условие существования точки перегиба)

Если точка $x_0$ является точкой перегиба графика функции $y=f(x)$ , то либо $f''(x_0) = 0$ , либо $f''(x_0)$ не существует.

*Замечание:*

Если $f''(x_0) = 0$, то $x_0$ не обязательно будет точкой перегиба. (Пример : $y = x^4, \quad x_0 = 0$)

**Т** (достаточное условие существования точки перегиба)

Если $f''(x)$ ***меняет знак*** при переходе через точку $x_0$, то эта точка является точкой перегиба.

если $f''(x)$ ***не меняет знак*** при переходе через точку $x_0$, то в этой точке перегиба нет.

# 7. Асимптоты .

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \qquad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$ .

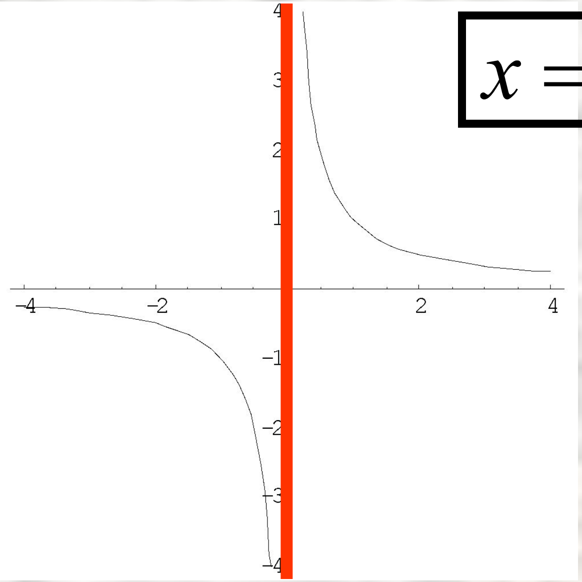
## Замечание.

Если *f(x)* имеет в точке *a* разрыв второго рода, то

$\boxed{x = a}$ - ***уравнение вертикальной асимптоты графика f(x)***

## Пример.

$$f(x) = \frac{1}{x}, x = 0$$




$\boxed{x = 0}$

Прямая $\boxed{y = k_+ x + b_+}$ называется

**наклонной асимптотой** графика $f(x)$

при $x \to +\infty$, если функция представима

в виде $\boxed{f(x) = k_+ x + b_+ + \alpha(x)}$, где

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

**Т** (критерий существования наклонной асимптоты)

Для того чтобы график функции *f(x)* имел ***наклонную асимптоту*** при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно существование пределов:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_+,}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_+x\right)=b_+}$$

## *Замечание.*

Точно так же определяется наклонная асимптота и формулируется критерий её существования для случая

$$x \to -\infty.$$

## *Пример.*

Найти асимптоты функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$

## *Решение.*

1) Функция непрерывна в любой точке области определения $\Rightarrow$ ***Вертикальных асимптот нет!***

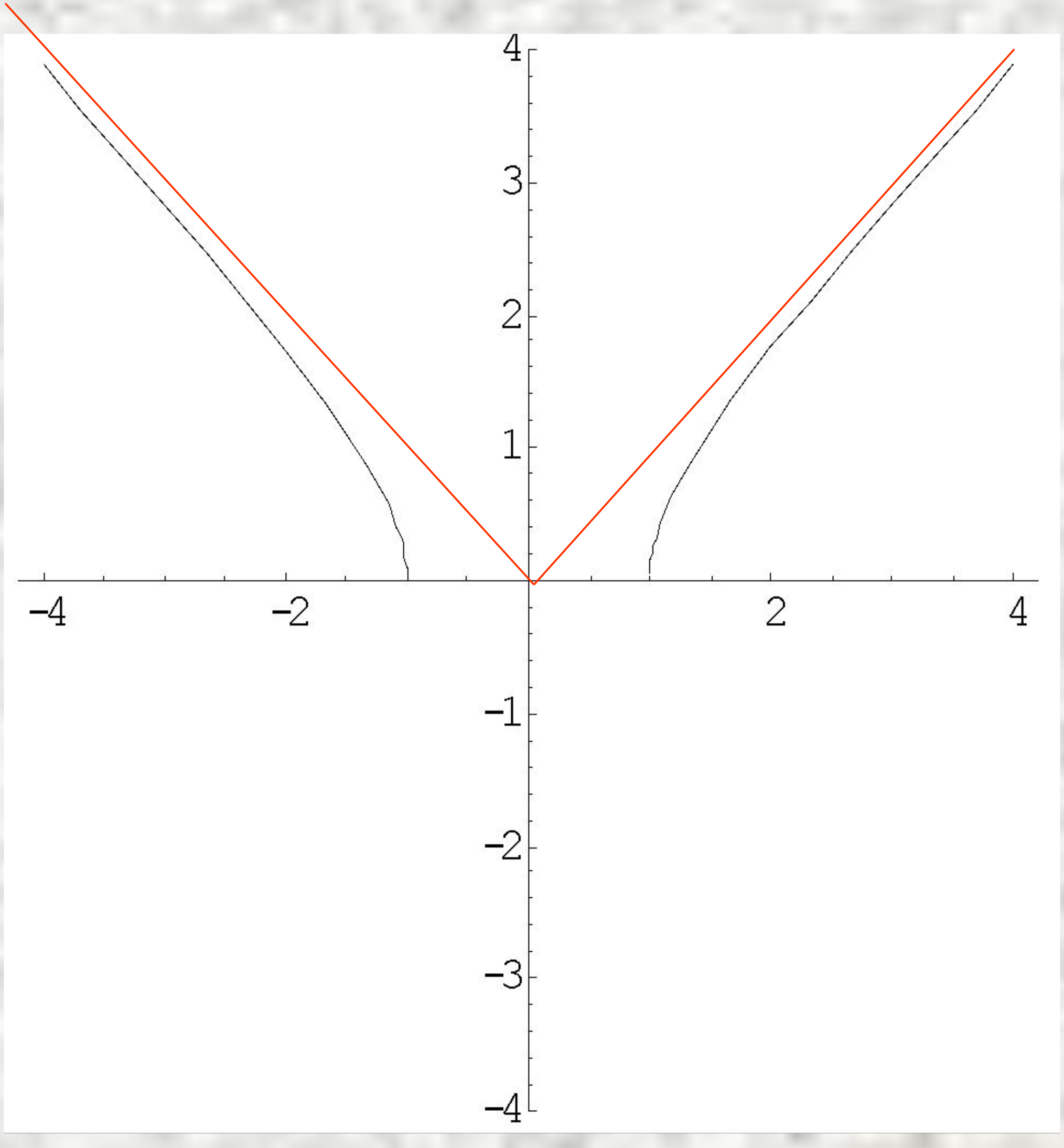
2)

$$a)\ k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

$$б)\ b_+ = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = 0.$$

$\boxed{y = x}$ ***наклонная асимптота*** при $x \to +\infty$,

$\boxed{y = -x}$ ***наклонная асимптота*** при $x \to -\infty$ .



4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-4
-2
2
4

## **8.** **<u>Общая схема построения графика функции.</u>**

Исследование функции ***f(x)*** состоит из трёх этапов.

***I.*** <u>Информация из вида ***f(x).***</u>

**1.** Область определения.

**2.** Чётность $\left(f(x)=f(-x)\right)$, или $\left(f(x)=-f(-x)\right)$,

периодичность

$$\left(f(x)=f(x+T),\forall x,T-\textit{период}\right)\Rightarrow$$

сужение области изменения ***x*** для дальнейшего исследования.

**3.** Асимптоты.

**4.** Точки пересечения с осями координат.

**II.** <u>Информация из вида ***f '(x).***</u>

( Исследование на экстремум)

**III.** <u>Информация из вида ***f ''(x).***</u>

(Нахождение точек перегиба)

**IV.** <u>Таблица.</u>

**V.** <u>Построение Графика.</u>

Вначале проводятся асимптоты, ставятся опорные точки, найденные на этапах I-III, строится линия графика.

***Пример.***

$$f(x) = x \cdot e^{-4x}$$

1. Область определения $x \in (-\infty, \infty)$

2. Функция общего вида.

3. Функция непрерывна всюду $\Rightarrow$ вертикальных асимптот нет.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{4x}x} = 0, \qquad b_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{4x}} = 0.$$

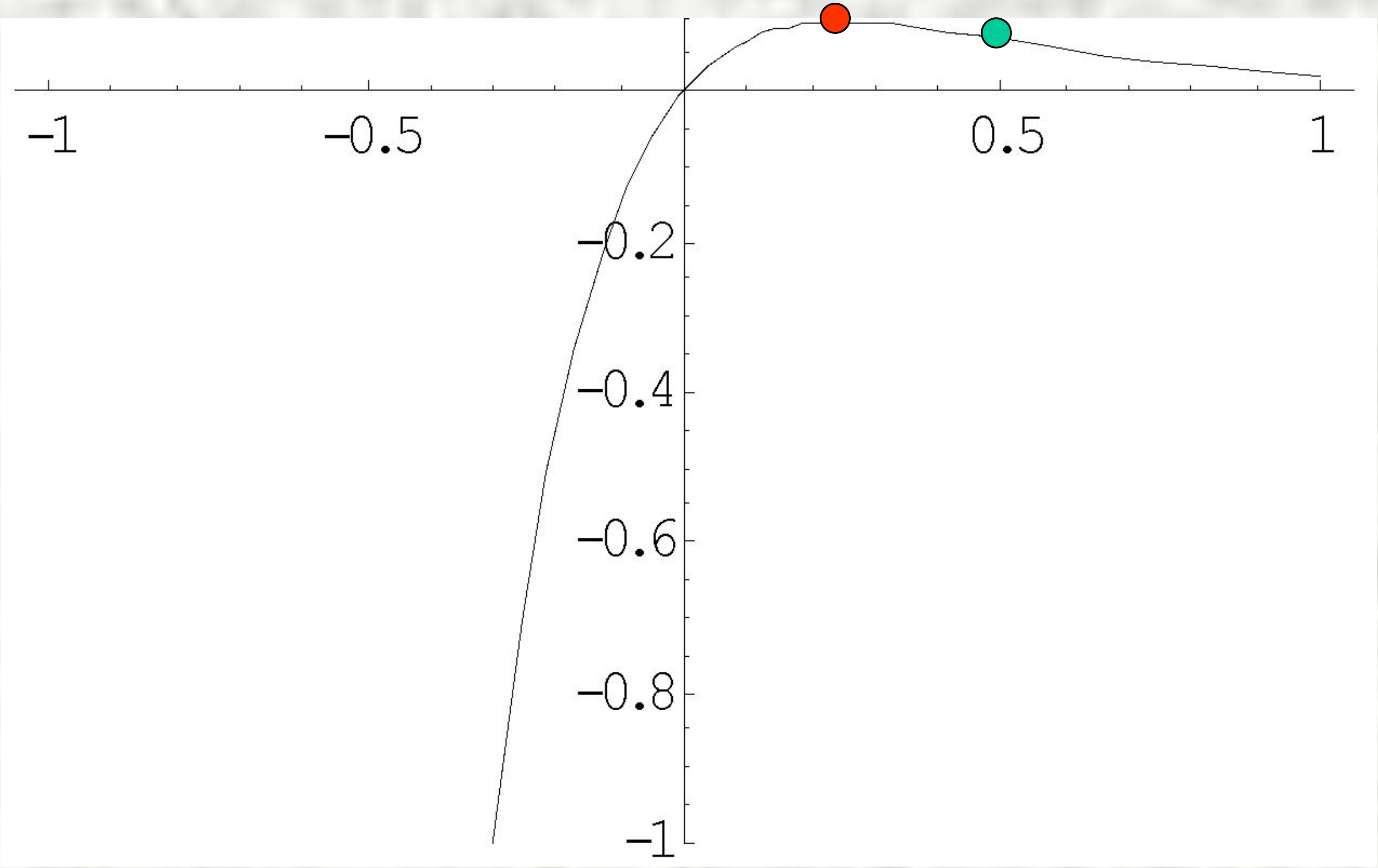
$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{4x}x} = \infty \text{ асимптот нет при } x \to -\infty,$$

*а значит* $y = 0$ *– единственная горизонтальная асимптота при* $x \to +\infty$.

4. Точки пересечения с осями: $x_0 = 0;\ y_0 = 0$

$$f'(x)=e^{-4x}\left(1-4x\right);\quad f''(x)=e^{-4x}\left(16x-8\right);$$

| $x$ | $(-\infty,\ \frac{1}{4})$ | $\frac{1}{4}$ | $(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{2}$ | $(\frac{1}{2},\ \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4e}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2e^2}$ | $\searrow$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | – | – | – |
| $f''(x)$ | – | – | – | 0 | + |
| Прим. | $\cap$ | max | $\cap$ | перегиб | $\cup$ |



-1
-0.5
0.5
1
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1

## 9. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо во внутренней точке $x_0$ отрезка, либо на границах отрезка.

Точки $x_0$ находятся среди критических точек функции.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a,b]$.

1) На интервале $(a,b)$ находят критические точки функции.

2) В критических точках вычисляют значения функции.

3) Вычисляют значения функции на концах отрезка.

4) Из всех вычисленных значений функции выбирают наибольшее и наименьшее.