

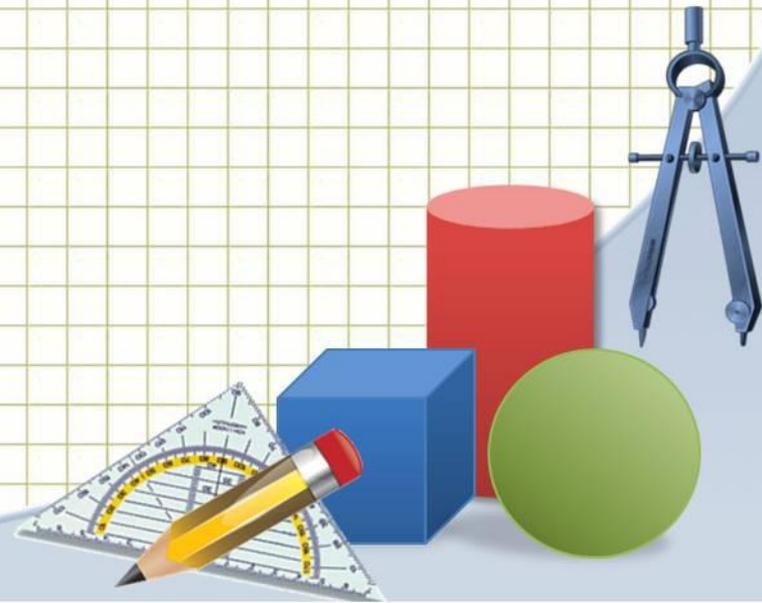
Занимательные задачи «Принцип Дирихле»

*Автор: Цыбикова Сэндэма
Дугаровна
учитель СОСОШ№2
с.Сосново-Озёрское*



Задача №1

У мальчика Феди есть шесть кубиков, на всех гранях которых написаны буквы русского алфавита. Докажите, что какая-то буква встречается дважды.



Доказательство. Предположим
противоположное. Каждая буква
встречается не более одного раза. Так как
всего букв 33, то на кубиках должно быть
не более 33 граней, а их по 6 на каждом
кубике, то есть 36. Получили
противоречие, значит наше предположение
не верно, следовательно, верно прямое
утверждение, а именно: найдется буква
встречающееся дважды.



Задача №2

Семь волков съели 50 кроликов. Докажите, что один из волков съел не менее 8 кроликов.

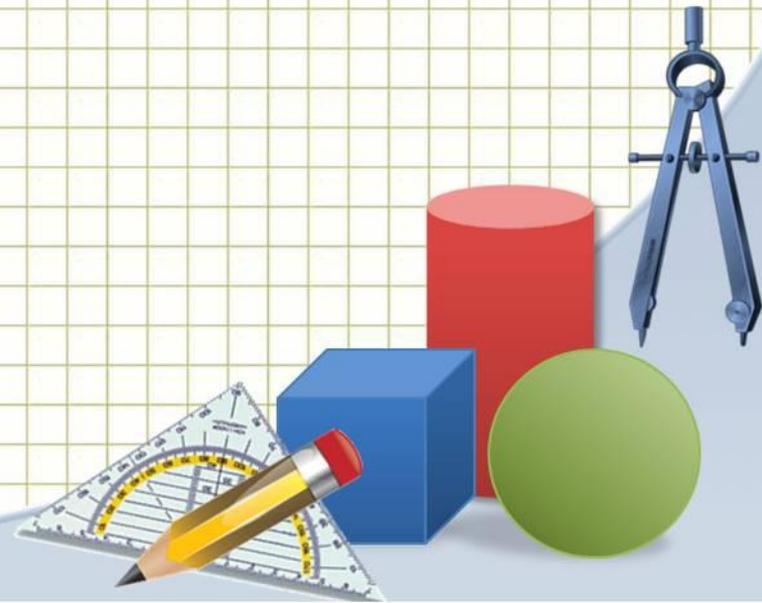


- Доказательство. Предположим противоположное – что такого волка не найдется. Т.е. каждый волк съел менее 8 кроликов. Так как волков 7, то они вместе съели не более 49 кроликов, а по условию волки съели 50 кроликов. Получили противоречие, значит, наше предположение не верно, следовательно, верно прямое утверждение. Один из волков съел не менее 8 кроликов.



Задача №3

Числа 1, 2, 3, 4, ..., 40 разбиты на три группы. Докажите, что хотя бы в одной из групп сумма чисел меньше 274.

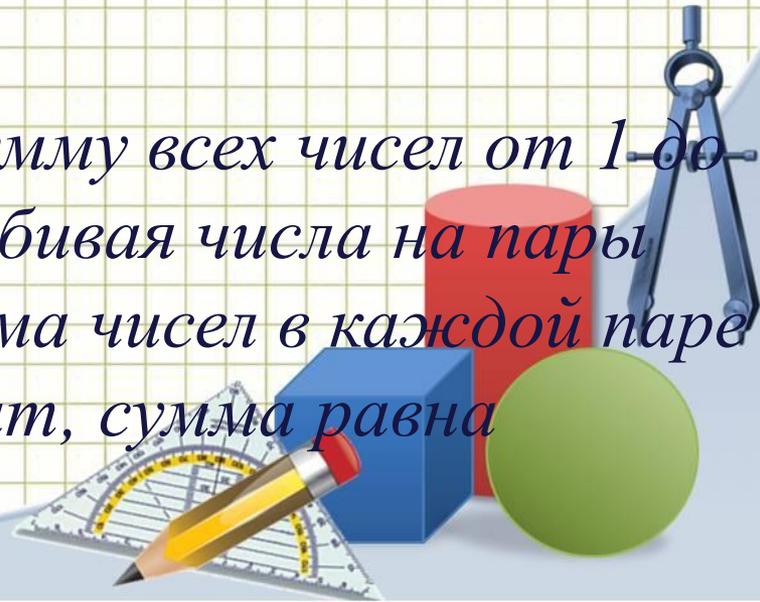


• Доказательство. Предположим

противоположное: пусть группы, в которой сумма чисел меньше 274 не найдется, т.е. в каждой группе сумма чисел 274 или больше. Значит сумма чисел во всех группах $274 \cdot 3 = 822$ или больше. В группах содержатся только числа от 1 до 40 без повторений, значит, сумма чисел во всех группах равна 820.

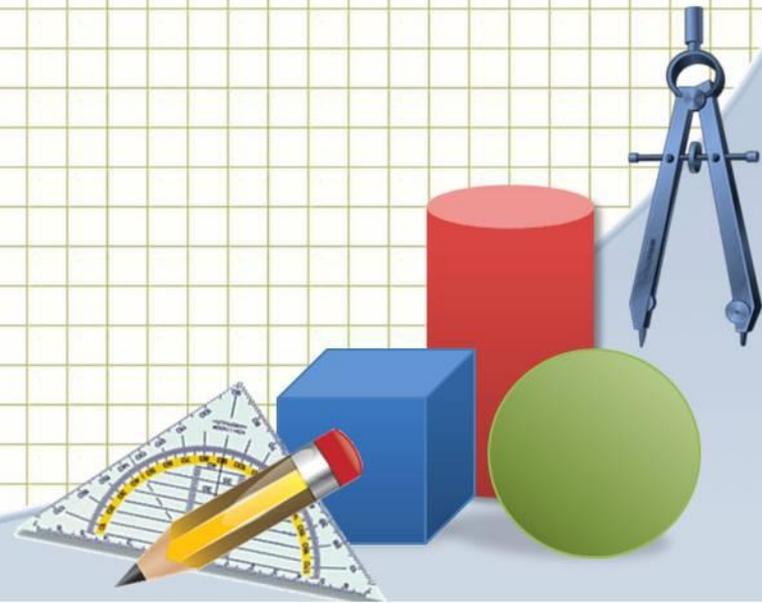
Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверное - хотя бы в одной из групп сумма чисел меньше 274.

- Замечание. Напомним, что сумму всех чисел от 1 до 40 удобнее всего считать, разбивая числа на пары 1-40, 2-39, ... 20-21. Тогда сумма чисел в каждой паре равна 41, а пар всего 20. Значит, сумма равна $41 \cdot 20 = 820$.

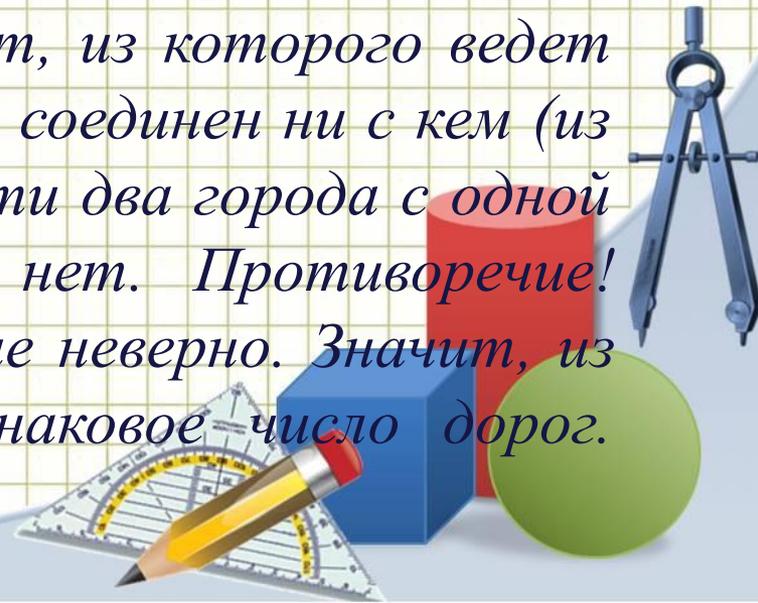


Задача №4

В одной маленькой стране всего 15 городов. Некоторые из них соединены дорогами. Докажите, что из каких-то двух городов ведет одинаковое число дорог.



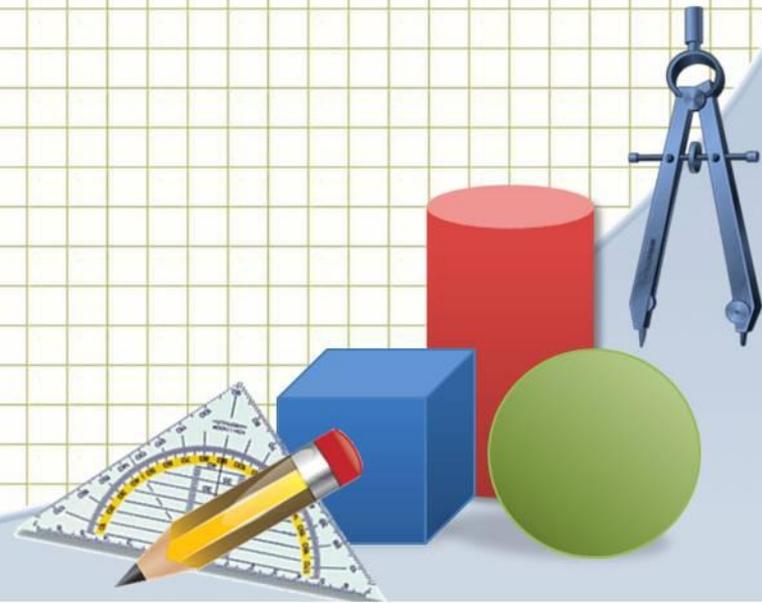
Доказательство. Предположим противоположное. Нет городов из которых ведет одинаковое число дорог. Из города самое меньшее может выходить 0 дорог, а самое большее - 14 дорог (во все оставшиеся 14 городов). Т.е. может выходить 0, 1, 2, ... 14 дорог. Всего 15 вариантов и городов тоже 15. Значит, все эти варианты реализуются, т.е. есть город, из которого выходит 0 дорог, есть город, из которого выходит 1 дорога, есть город из которого выходит 2 дороги, ..., и есть город из которого выходит 14 дорог. Но получается, что есть город, который соединен со всеми остальными (тот, из которого ведет 14 дорог), и есть город, который не соединен ни с кем (из которого ведет 0 дорог). То есть эти два города с одной стороны соединены, а с другой нет. Противоречие! Следовательно, наше предположение неверно. Значит, из каких-то двух городов ведет одинаковое число дорог.



Задача №5

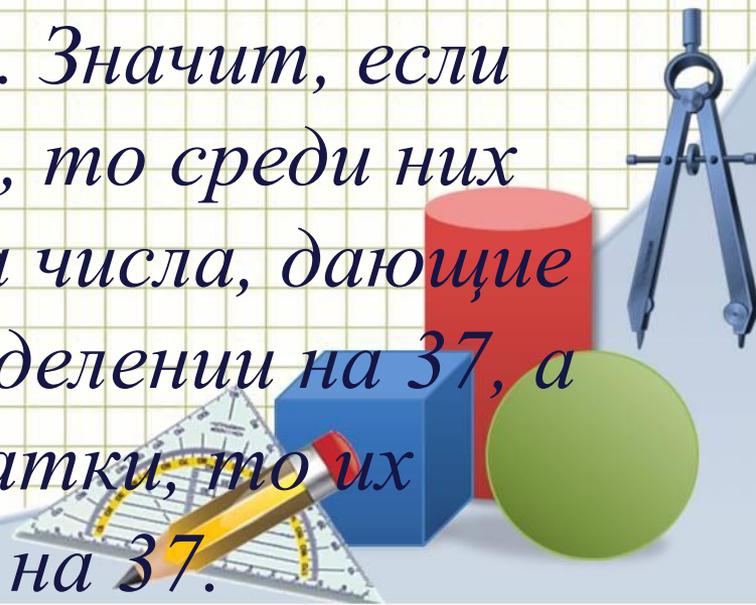
Какое максимальное количество целых чисел можно написать, если требуется, чтобы

а) разность любых двух из них не делилась на 37? б) и сумма и разность любых двух из них не делилась на 37?

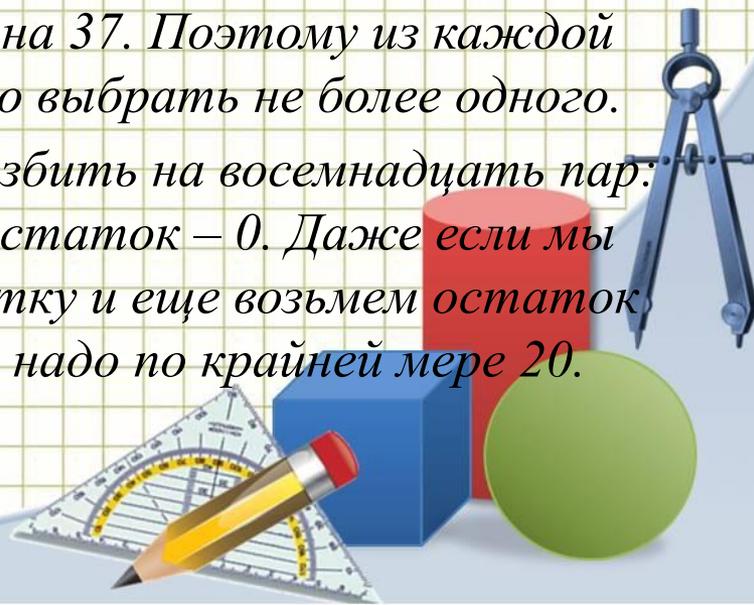


Решение. а) Легко построить пример для 37 чисел: $0, 1, 2, \dots, 36$ – разность любых двух на 37 не делится.

Докажем, что 38 и больше чисел выбрать нельзя. Разность двух чисел делится на 37, если остатки от деления этих чисел на 37 совпадут. Всего при делении на 37 бывает 37 остатков $0, 1, 2, \dots, 36$. Значит, если взять 38 чисел или больше, то среди них обязательно найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на 37, а раз у них одинаковые остатки, то их разность будет делиться на 37.

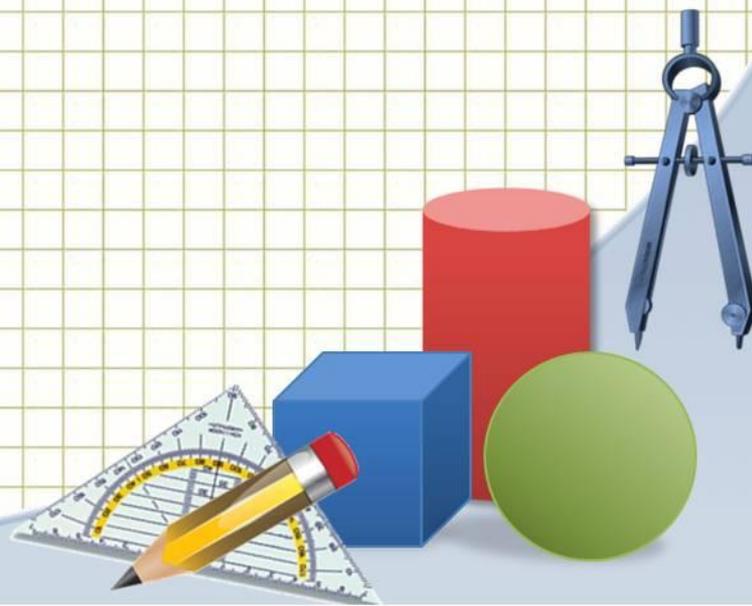


- б) Вначале приведем пример для 19 чисел: $0, 1, 2, 3, \dots, 18$ – сумма и разность любых двух больше 0 и меньше 37 и поэтому не делится на 37.
- Докажем теперь, что больше 20 чисел выбрать не удастся. Пусть у нас есть сколько-то чисел. Посмотрим на их остатки при делении на 37. Из пункта а) этой задачи видно, что никакие два остатка совпадать не могут (т.к. тогда разность двух таких чисел разделится на 37). Таким образом, все остатки должны быть разными. Если нам удалось выбрать 20 или больше чисел, то мы получили по крайней мере 20 различных остатков. Если какие-то из них в сумме дают 37, то мы опять выиграли – сумма соответствующих чисел будет делиться на 37. Поэтому из каждой пары остатков в сумме дающих 37 можно выбрать не более одного.
- Все остатки при делении на 37 можно разбить на восемнадцать пар: $(1,36), (2,35), (3,34) \dots (18,19)$ и еще один остаток – 0. Даже если мы из каждой пары выберем по одному остатку и еще возьмем остаток 0, то у нас получится 19 остатков, а нам надо по крайней мере 20. Противоречие.



Задача №6

Через одну точку проведено четырнадцать прямых. Докажите, что угол между какими-то двумя из них меньше 13° .

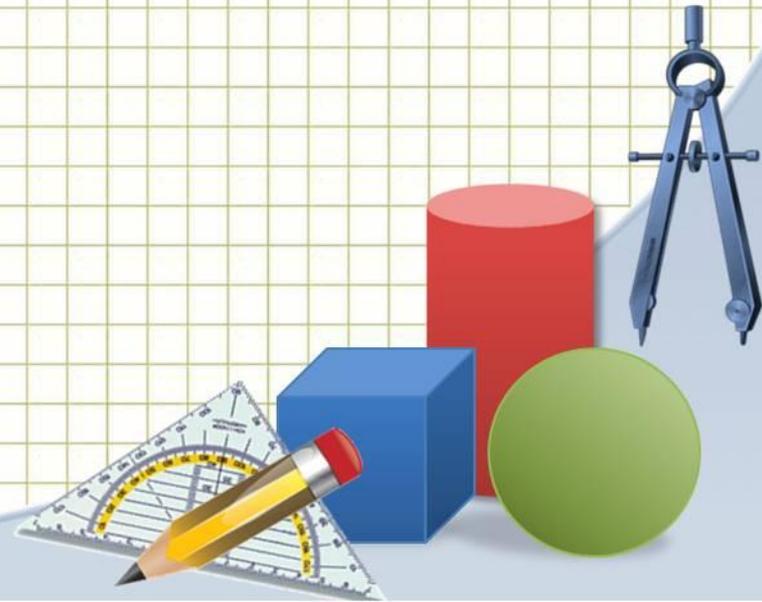


- Доказательство. Предположим противоположное. Угол между любыми двумя прямыми не меньше 13° . 14 прямых проходящих через одну точку образуют 28 не перекрывающихся углов в сумме дающих $13^\circ \cdot 28 = 364^\circ$, но сумма не перекрывающихся углов с общей вершиной не может превышать 360° . Получили противоречие, значит, наше предположение было неверно. Значит, угол между какими-то двумя прямыми меньше 13° .

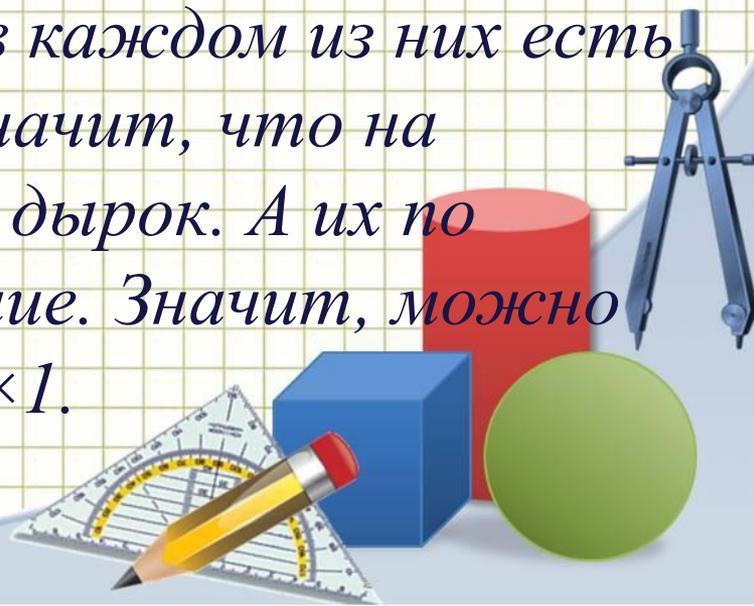


Задача №7

В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1 , не содержащий внутри дырок?

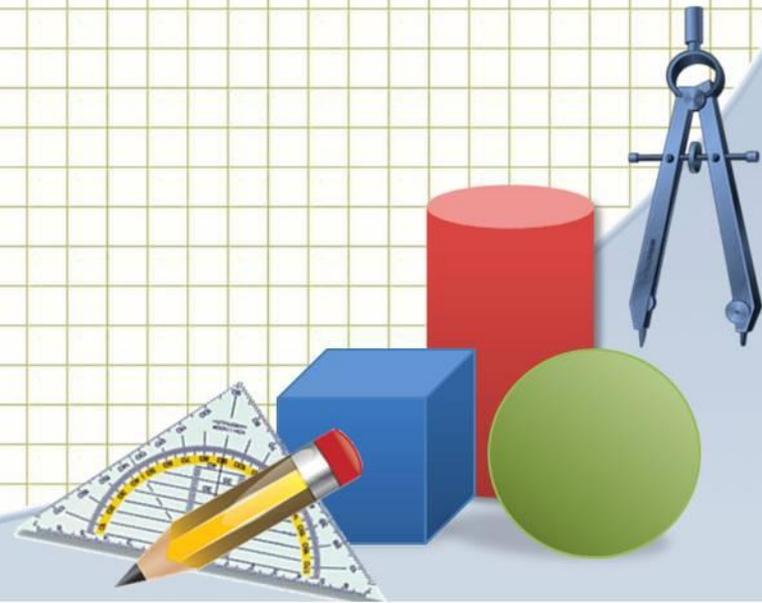


- Ответ. Можно.
- Доказательство. Предположим противоположное. Нельзя вырезать коврик размером 1×1 . Коврик размером 4×4 можно без проблем разрезать на 16 ковриков 1×1 . Если из исходного коврика нельзя вырезать коврик 1×1 , то ни один из 16 получившихся ковриков тоже не годится. А это значит, что в каждом из них есть хотя бы одна дырка. А это значит, что на коврике 4×4 есть хотя бы 16 дырок. А их по условию всего 15, противоречие. Значит, можно вырезать коврик размером 1×1 .

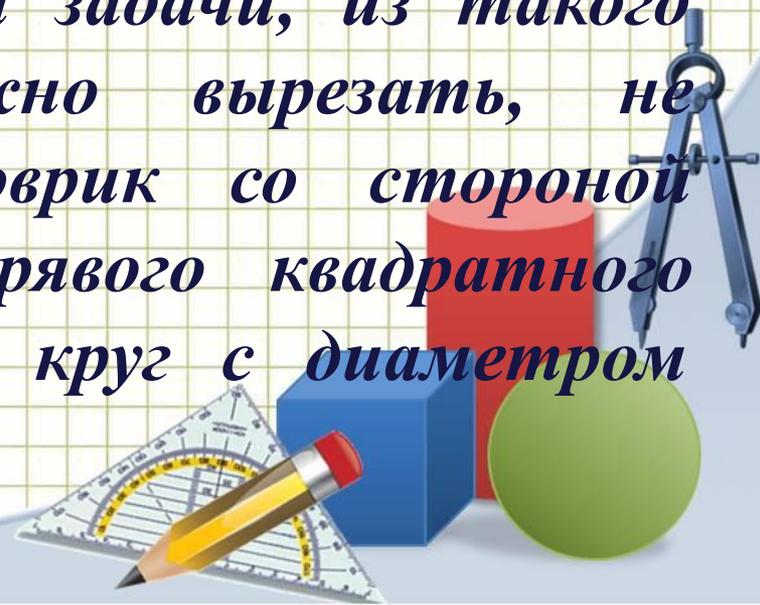


Задача №8

В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать круг радиуса 12,5 см, в котором нет ни одной дырки.

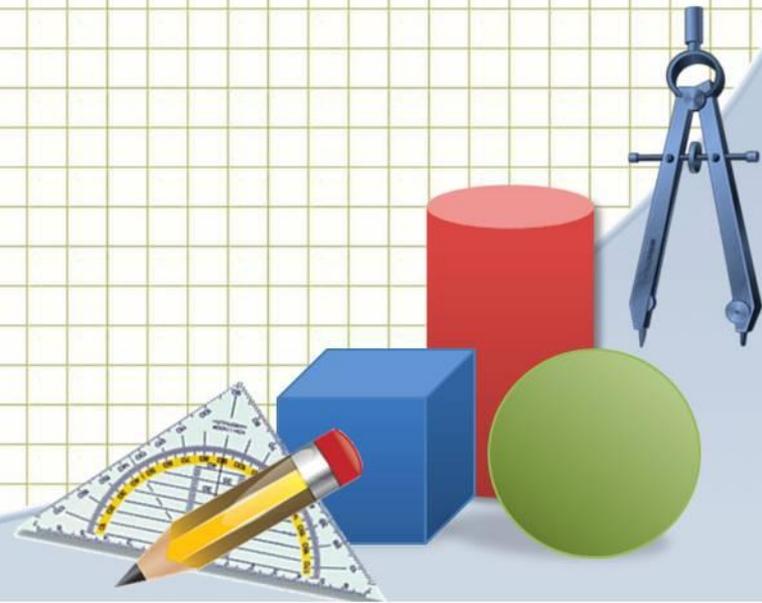


Доказательство. Радиус у круга 12,5 см, тогда диаметр 25 см. Такой круг вписывается в квадрат со стороной 25 см. Квадратный ковер со стороной 1 м можно без труда разрезать на 16 квадратных ковриков со стороной 25 см. Так как дырок всего 15, то аналогично рассуждениям предыдущей задачи, из такого квадратного ковра можно вырезать, не дырявый, квадратный коврик со стороной 25 см. А из этого недырявого квадратного коврика можно вырезать круг с диаметром 25 см (радиусом 12,5 см).

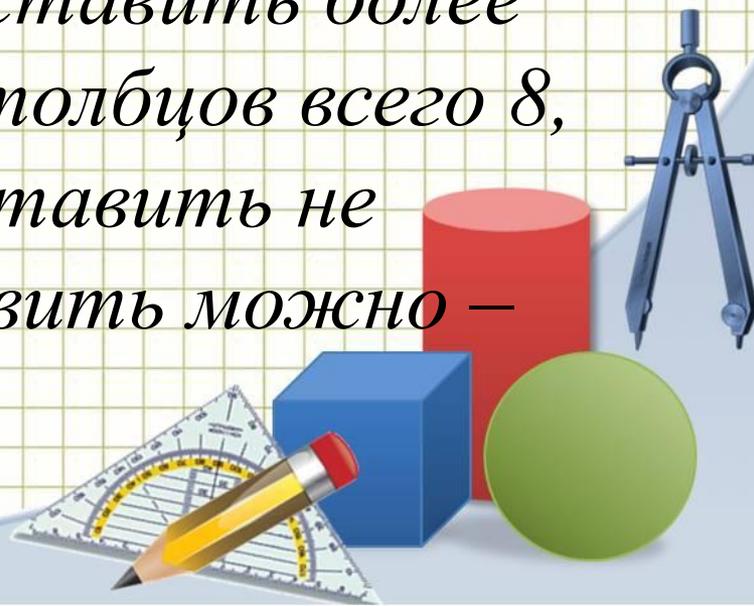


Задача №9

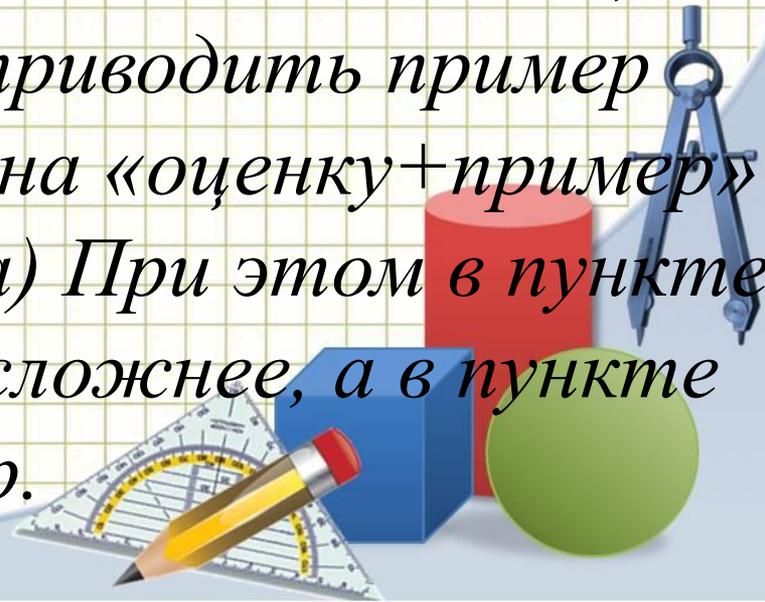
Какое самое большое количество а) ладей б) ферзей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

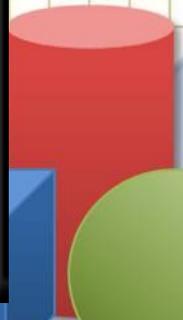
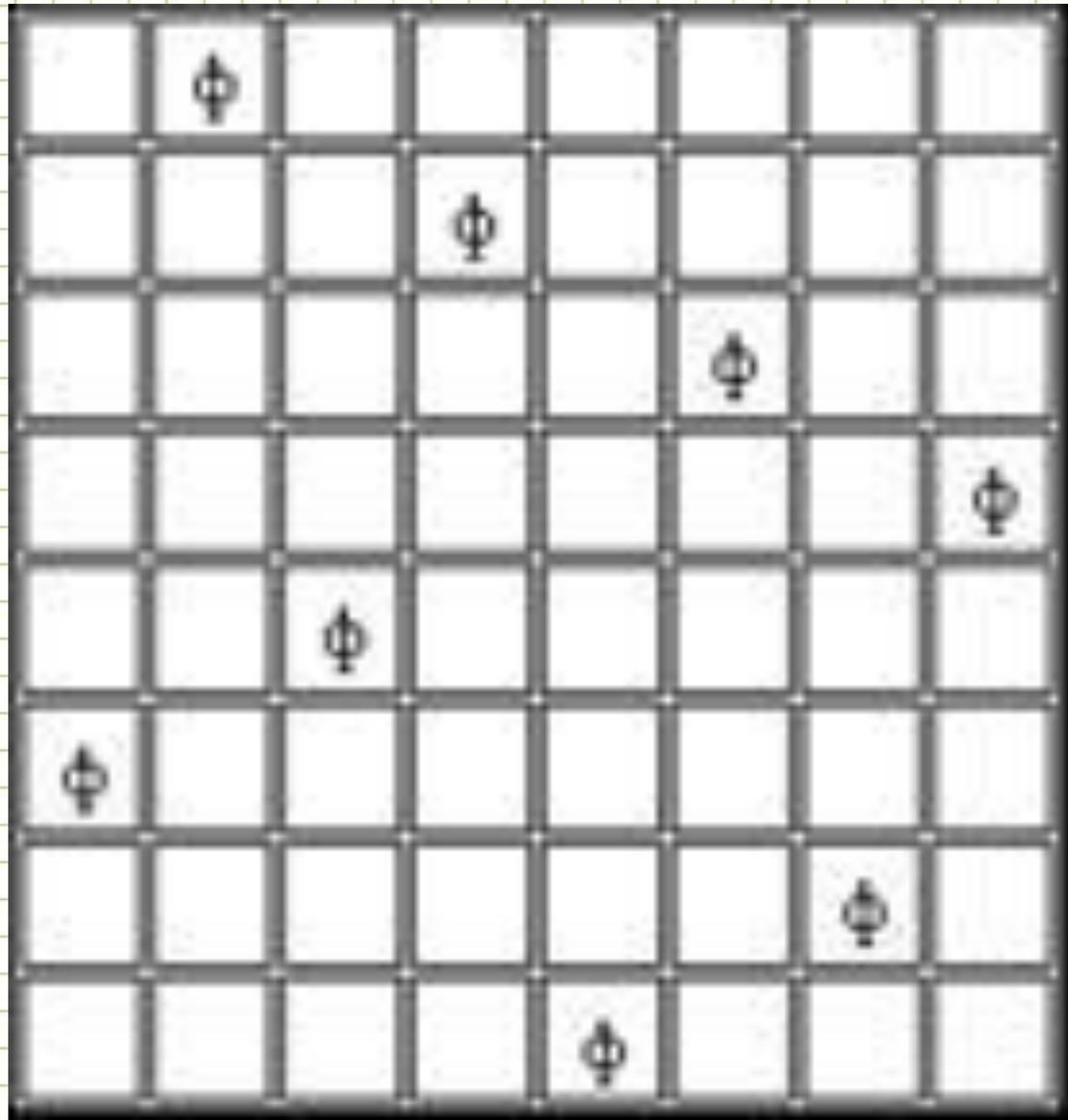


- Ответ. а) 8; б) 8.
- Решение. а) Докажем, что больше 8 ладей поставить нельзя. Каждая ладья бьет все клетки в столбце, на котором она стоит. Значит, мы не можем поставить более одной ладьи в столбец. Столбцов всего 8, значит, более 8 ладей поставить не удастся. А ровно 8 поставить можно – например по диагонали.



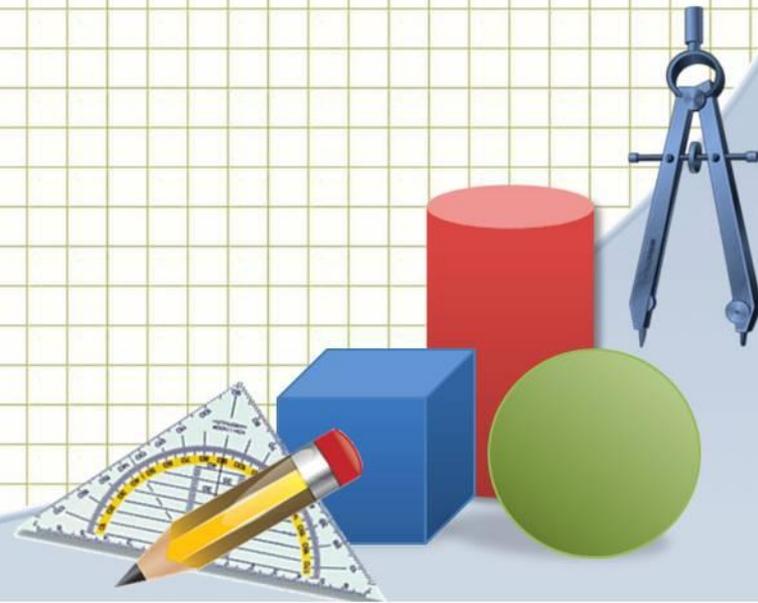
- б) Аналогично предыдущему пункту, мы не можем поставить более одного ферзя в столбец, значит поставить больше 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга никак не получится. А 8 ферзей поставить можно – например как на рисунке.
- Замечание. В обоих пунктах этой задачи для полного решения надо и доказывать, что больше 8 нельзя и приводить пример как сделать 8. (Задача на «оценку+пример» - так же как и 5 задача) При этом в пункте а) – оценку сделать посложнее, а в пункте б) явно сложнее пример.





Задача №10

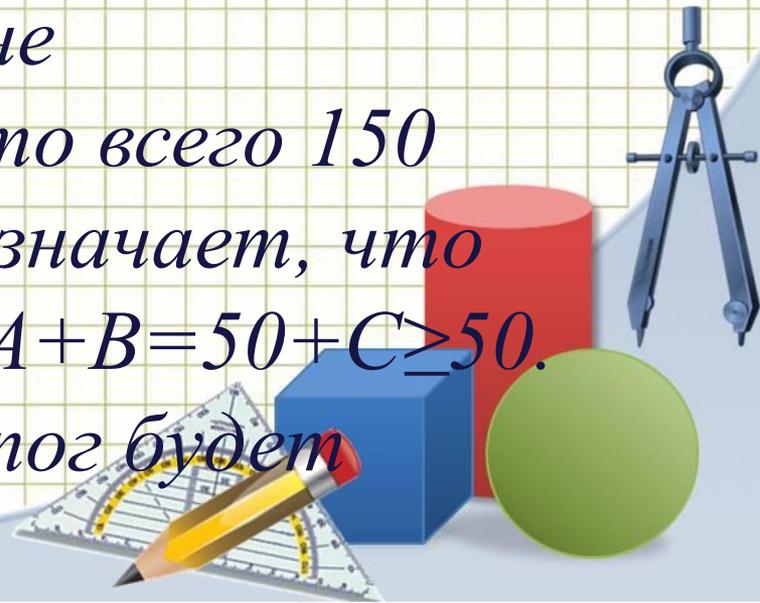
В партии из 300 сапог 150 левых и 150 правых, кроме того, по 100 штук каждого из трех размеров. Докажите, что есть по крайней мере 50 годных пар обуви.



- Решение. В каждом размере либо левых и правых поровну, либо каких-то больше. Если левых и правых поровну, то их по 50 – вот мы и нашли 50 годных пар. Пусть в каждом размере или левых или правых больше. Можно считать, что в двух размерах больше левых, а в еще одном больше правых. (Во всех трех размерах левых быть больше не может, так как всего левых и правых сапог поровну).



- Введем обозначения, пусть в первых двух размерах правых A и B , а левых тогда $100-A$ и $100-B$. В третьем размере левых C , а правых $100-C$. Так как в первых двух размерах правых меньше, то там можно найти соответственно A и B пар, а в третьем размере левых меньше, значит там C годных пар. Мы еще не воспользовались условием, что всего 150 правых сапог. Это условие означает, что $A+B+(100-C)=150$, Откуда $A+B=50+C \geq 50$. Значит, всего пар годных сапог будет $A+B+C \geq A+B \geq 50$.



Caŭm: <http://pedsovet.su/>
[http:// problems.ru](http://problems.ru)

