Лекция 2.

Решение обратной задачи динамики. Общие указания к решению обратной задачи динамики. Примеры решения обратной задачи динамики. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха.

Рекомендуемая литература

1. Лекции по теоретической механике [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю. В. Лоскутов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВПО "Поволж. гос. технол. ун-т". - Йошкар-Ола : ПГТУ, 2015.
2. Соколов Г.М. Теоретическая механика: курс лекций. Ч.1 Статика. Кинематика, 2011.
3. Лоскутов Ю.В., Журавлев Е.А., Кузовков С.Г. Теоретическая механика: учебное пособие, 2012.

Лекция 2

- **Решение обратной задачи динамики** – В общем случае движения точки силы, действующие на точку, являются переменными, зависящими от времени, координат и скорости. Движение точки описывается системой трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\ddot{x} = \sum X_i; \quad m\ddot{y} = \sum Y_i; \quad m\ddot{z} = \sum Z_i.$$

После интегрирования каждого из них будет **шесть постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_6$:

$$\dot{x} = f_1(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{y} = f_2(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{z} = f_3(t, C_1, C_2, C_3).$$

$$x = f_4(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad y = f_5(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad z = f_6(t, C_1, C_2, \ldots, C_6).$$

Значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$ находятся из шести начальных условий при $t = 0$:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

После подстановки найденных значений постоянных получаем:

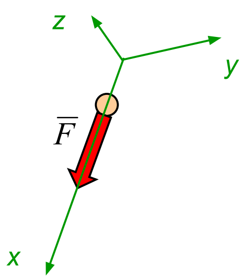
$$\dot{x} = f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{y} = f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{z} = f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

$$x = f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad y = f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad z = f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, **под действием одной и той же системы сил материальная точка может совершать целый класс движений, определяемых начальными условиями**.

Начальные координаты учитывают исходное положение точки. Начальная скорость, задаваемая проекциями, учитывает влияние на ее движение по рассматриваемому участку траектории сил, действовавших на точку до прихода на этот участок, т.е. начальное кинематическое состояние.

Пример 1 решения обратной задачи: Свободная материальная точка массы *m* движется по действием силы ***F***, **постоянной по модулю и величине.** . В начальный момент скорость точки составляла v_0 и совпадала по направлению с силой. Определить уравнение движение точки.



1. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const}.$

2. Выберем декартову систему отсчета, направляя ось x вдоль направления силы и спроецируем основное уравнение динамики на эту ось: $(x):\ ma_x = F_x$ или $m\ddot{x} = F.$ $\quad m\ddot{x} = F.$

3. Понижаем порядок производной: $m\dfrac{dv_x}{dt} = F.$

4. Разделяем переменные: $dv_x = \dfrac{F}{m}dt.$

5. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int dv_x = \int \dfrac{F}{m}dt. \Rightarrow \boxed{v_x = \dfrac{F}{m}t + C_1.}$

6. Представим проекцию скорости как производную координаты по времени: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F}{m}t + C_1.$

7. Разделяем переменные: $dx = (\dfrac{F}{m}t + C_1)dt.$

8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int dx = \int (\dfrac{F}{m}t + C_1)dt. \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{F}{m}\dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.}$

9. Для определения значений постоянных C1 и C2 используем начальные условия $t = 0$, $v_x = v_0$, $x = x_0$:

$$v_x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\cdot 0 + C_1 = v_0. \qquad x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^2}{2} + C_1\cdot 0 + C_2 = x_0. \Rightarrow \boxed{C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.}$$

В итоге получаем уравнение равнопеременного движения (по оси *x*): $\boxed{x = \dfrac{F}{m}\dfrac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.}$

Лекция 2 (продолжение 2.2)

- **Общие указания к решению прямой и обратной задачи. Порядок решения:**

1. Составление дифференциального уравнения движения:

1.1. **Выбрать систему координат** – прямоугольную (неподвижную) при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) при известной траектории, например, окружность или прямая линия. В последнем случае можно использовать одну прямолинейную координату. Начало отсчета совместить с начальным положением точки (при *t* = 0) или с равновесным положением точки, если оно существует, например, при колебаниях точки.

1.2. **Изобразить точку** в положении, соответствующем произвольному моменту времени (при *t* > *0*) так, чтобы координаты были положительными (s > 0, x > 0). При этом считаем также, что проекция скорости в этом положении также положительна. В случае колебаний проекция скорости меняет знак, например, при возвращении к положению равновесия. Здесь следует принять, что в рассматриваемый момент времени точка удаляется от положения равновесия. Выполнение этой рекомендации важно в дальнейшем при работе с силами сопротивления, зависящими от скорости.

1.3. **Освободить материальную точку от связей**, **заменить** их действие реакциями, **добавить** активные силы.

1.4. **Записать основной закон динамики** в векторном виде, **спроецировать** на выбранные оси, **выразить** задаваемые или реактивные силы через переменные время, координаты или скорости, если они от них зависят.

2. Решение дифференциальных уравнений:

2.1. **Понизить производную**, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду. например: $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$, или $\ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$.

2.2. **Разделить переменные**, например: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}kv_x,$ $\Rightarrow$ $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{m}kdt$ или $\frac{dv_\tau}{dt} = g - \frac{k}{m}v_\tau^2,$ $\Rightarrow$ $\frac{dv_\tau}{g - \frac{k}{m}v_\tau^2} = dt.$

2.3. Если в уравнении три переменных, то **сделать замену переменных**, например: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}cx,$ $\Rightarrow$ $\frac{dv_x dx}{dt dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{1}{m}cx$ и затем разделить переменные.

2.4. **Вычислить неопределенные интегралы** в левой и правой частях уравнения, например: $\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{1}{m}kdt$ $\Rightarrow$ $\ln v_x = -\frac{1}{m}kt + C_1$

Используя начальные условия, например, *t* = 0, $v_x = v_{x0}$, **определить постоянную интегрирования**: $\ln v_x\big|_{v_{x0}} = -\frac{1}{m}kt\big|_0 + C_1; \quad C_1 = \ln v_{x0}.$

Замечание. Вместо вычисления неопределенных интегралов можно **вычислить определенные интегралы с переменным верхним пределом**. Нижние пределы представляют начальные значения переменных (начальные условия) .Тогда не требуется отдельного нахождения постоянной, которая автоматически включается в решение, например:

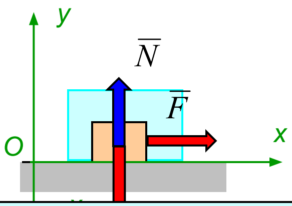
$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m}kdt. \Rightarrow \ln v_\tau\big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = -\frac{1}{m}kt\big|_0^t; \Rightarrow \ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m}kt - 0; \quad \ln v_\tau = -\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}.$$

2.5. **Выразить скорость** через производную координаты по времени, например, $v_\tau = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}}$ и **повторить пункты 2.2 -2.4**

Замечание. Если уравнение приводится к каноническому виду, имеющему стандартное решение, то это готовое решение и используется. Постоянные интегрирования по прежнему находятся из начальных условий. См., например, колебания (лекция 4, стр.8).

Лекция 2 (продолжение 2.3)

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от времени.** Груз весом ***P*** начинает двигаться по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы ***F***, величина которой пропорциональна времени (*F* = *kt*). Определить пройденное расстояние грузом за время *t*.



1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:

2. Принимаем объект движения за материальную точку (тело движется поступательно), освобождаем от связи (опорной плоскости) и заменяем реакцией (нормальной реакцией гладкой поверхности):

3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}.$

4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : $(x):\ ma_x = F$ или kt $\quad \boxed{\ddot{x} = \frac{k}{m} t.}$

6. Разделяем переменные: $\dfrac{v_y dv_y}{dy} = -\dfrac{gR^2}{y^2}. \Rightarrow v_y dv_y = -\dfrac{gR^2}{y^2} dy.$

7. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int\limits_{v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = -\int\limits_R^y \dfrac{gR^2}{y^2} dy. \Rightarrow \dfrac{v_y^2}{2}\Bigg|_{v_{y0}}^{v_y} = -gR^2(-\dfrac{1}{y})\Bigg|_R^y.$

8. Подставляем пределы: $\dfrac{v_y^2}{2} - \dfrac{v_{y0}^2}{2} = gR^2\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{R}\right).$

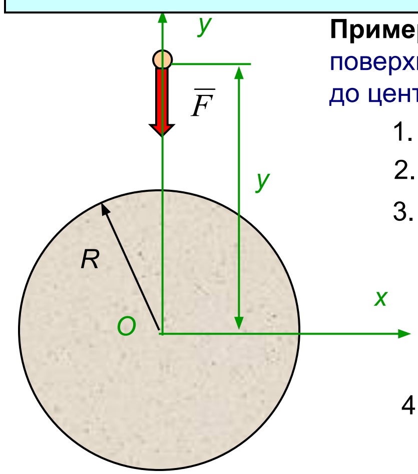
В итоге получаем выражение для скорости в функции от координаты *y* : $\boxed{v_y = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gR^2\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{R}\right)}.}$

Максимальную высоту полета можно найти приравнивая скорость нулю: $\dfrac{v_{y0}^2}{2gR^2} = -\left(\dfrac{1}{H_{max}} - \dfrac{1}{R}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{H_{max}} = \dfrac{1}{R} - \dfrac{v_{y0}^2}{2gR^2} \Rightarrow \boxed{H_{max} = \dfrac{2gR^2}{2gR - v_{y0}^2}.}$

Максимальная высота полета $\to \infty$ при обращении знаменателя в нуль: $\boxed{2gR = v_{y0}^2}$

Отсюда при постановке радиуса Земли и ускорения свободного падения получается II космическая скорость: $\boxed{v_{y0} = \sqrt{2gR} = 11.2 км/с}$

Пример 3 решения обратной задачи: **Сила зависит от координаты.** Материальная точка массой *m* брошена вверх с поверхности Земли со скоростью v_0. Сила притяжения Земли обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до центра тяготения (центра Земли). Определить зависимость скорости от расстояния *y* до центра Земли.



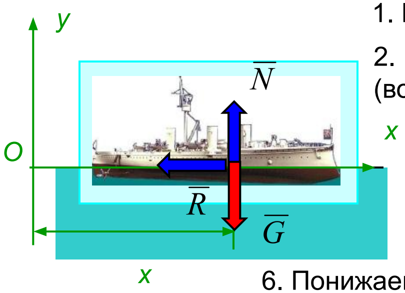
1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}.$
3. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y* : $(y):\ ma_y = -F$ или $-\dfrac{k}{y^2} \quad m\ddot{y} = -\dfrac{k}{y^2}.$

Коэффициент пропорциональности можно найти, используя вес точки на поверхности Земли: $F = P$ при $y = R.$

$\dfrac{k}{R^2} = mg. \Rightarrow k = mgR^2.$ Отсюда дифференциальное уравнение имеет вид: $m\ddot{y} = -\dfrac{mgR^2}{y^2}$ или $\boxed{\ddot{y} = -\dfrac{gR^2}{y^2}.}$

4. Понижаем порядок производной: $\dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{gR^2}{y^2}.$ 5. Делаем замену переменной: $\dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{dv_y dy}{dy dt} = \dfrac{v_y dv_y}{dy}.$

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от скорости**. Судно массы *m* имело скорость *v*0. Сопротивление воды движению судна пропорционально скорости. Определить время, за которое скорость судна упадет вдвое после выключения двигателя, а также пройденное расстояние судном до полной остановки.



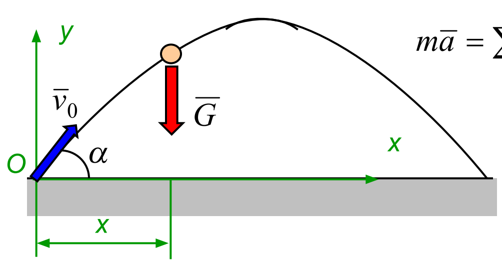
1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Принимаем объект движения за материальную точку (судно движется поступательно), освобождаем от связей (воды) и заменяем реакцией (выталкивающей силой – силой Архимеда), а также силой сопротивления движению.
3. Добавляем активную силу (силу тяжести).
4. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N}.$
5. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : $(x):\ \ ma_x = -R$ или $-\mu v_x$ $\quad \boxed{\ddot{x} = -\frac{\mu}{m}v_x.}$
6. Понижаем порядок производной: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m}v_x.$
7. Разделяем переменные: $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\mu}{m}dt.$
8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int_{v_{x0}}^{v_x}\frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{\mu}{m}dt.$ $\Rightarrow$ $\ln v_x\Big|_{v_{x0}}^{v_x} = -\frac{\mu}{m}t\Big|_0^t.$
9. Подставляем пределы: $\ln v_x - \ln v_{x0} = -\frac{\mu}{m}t.$

Исключив время из уравнений движения получаем уравнение траектории: $\boxed{y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.}$

Время полета определяем приравниванием координаты *y* нулю: $y = v_0\sin\alpha\cdot T - \frac{gT^2}{2} = 0;$ $\boxed{T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}}$

Дальность полета определяем подстановкой времени полета: $\boxed{x = v_0\cos\alpha\cdot T = v_0\cos\alpha\frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2\sin 2\alpha}{g} = L;}$

- **Движение точки, брошенной под углом к горизонту, в однородном поле силы тяжести без учета сопротивления воздуха**



$m\bar{a} = \sum\bar{F}_i = \bar{G}.$ $\Rightarrow$ $(x):\ m\ddot{x} = 0;$ $(y):\ m\ddot{y} = -G = -mg;$ $\Rightarrow$ $\frac{dv_x}{dt} = 0;$ $\frac{dv_y}{dt} = -g;$ $\Rightarrow$ $dv_x = 0;$ $dv_y = -gdt;$

$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = 0;$ $\int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -\int_0^t gdt;$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_x = v_{x0} = v_0\cos\alpha;}$ $\boxed{v_y = v_{y0} - gt = v_0\sin\alpha - gt;}$

$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha;$ $\frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha - gt;$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = v_0\cos\alpha\cdot t;}$ $\boxed{y = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2};}$