

Применение производной при решении текстовых задач

**Учитель высшей категории
Гаврилова В.И.
г. Нефтекумск**

ГИПОТЕЗА:

ГИПОТЕЗА:

Способ решения задач с помощью применения производной, есть своего рода универсальный способ, так как он распространяется на любой из видов задач, независимо от содержания.

ЦЕЛЬ:

ЦЕЛЬ:

- Научиться решать задачи с применением производной функции;
- Разработать алгоритм решения задач на экстремум.

МЕТОДЫ:

МЕТОДЫ:

Систематизация и обобщение

Рассмотрим ряд текстовых задач, при решении которых будем использовать механический смысл производной.

Мама с своей дочкой гуляла в парке. Девочка захотела покататься на каруселях, а мама решила сфотографировать очку. Вращение карусели совершается по закону $\varphi(t) = t^3/9 - 5t^2/2$. Фотография может быть хорошего качества только при ускорении равном 3 м/с^2 . В какой момент времени необходимо сделать снимок?

Задача 1.



РЕШЕНИЕ:

- Скорость движения карусели $\omega(t)=\varphi'(t)=t^2/3-5t$;
- Ускорение $a(t)=\omega'(t)=2t/3-5$. Так как фотография будет хорошего качества при ускорении 3 м/с^2 , тогда

$$2t/3-5=3$$

$$2t-15=9,$$

$$2t=24,$$

$$t=12.$$

Таким образом фотографировать девочку необходимо на 12 секунде.

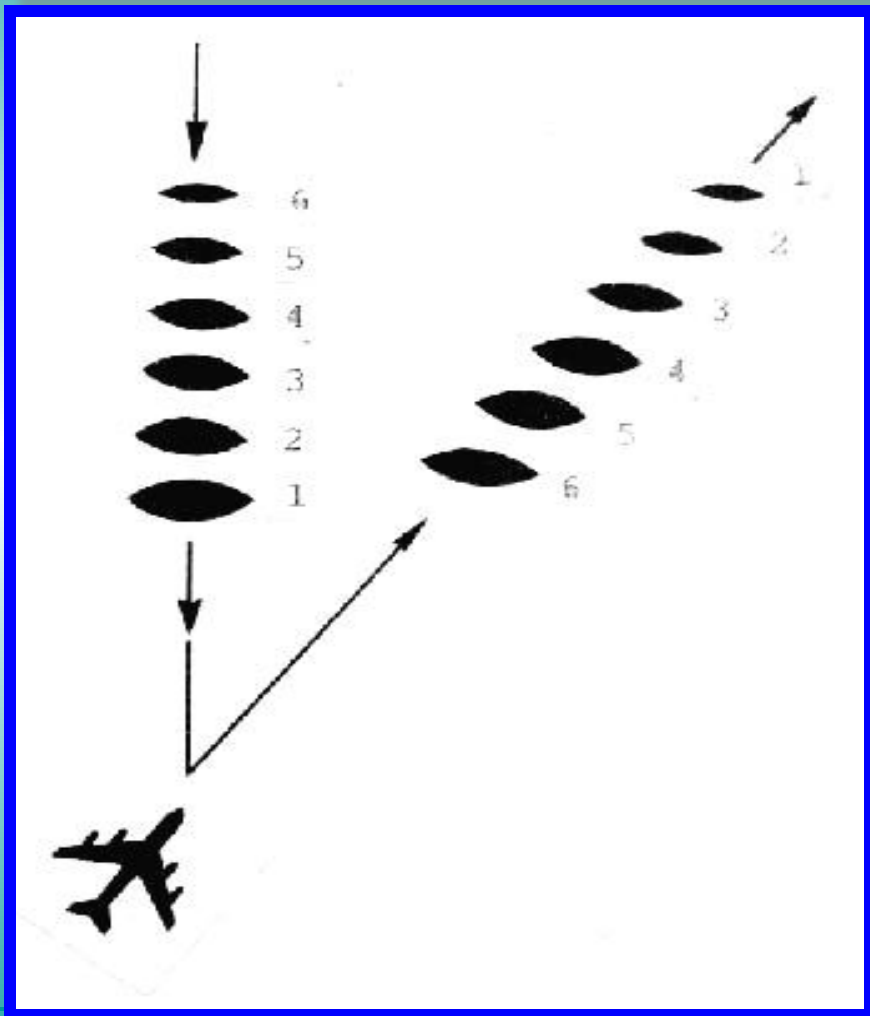
ОТВЕТ: на 12 секунде.

ЗАДАЧА 2.

- Из пункта А по двум лучам, угол между которыми 60° , движется два тела: первое равномерно со скоростью 10 км/ч , второе – по закону

$$S(t) = 2t^2 + t.$$

С какой скоростью они отдаляются друг от друга?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ:

- Используя теорему косинусов имеем:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

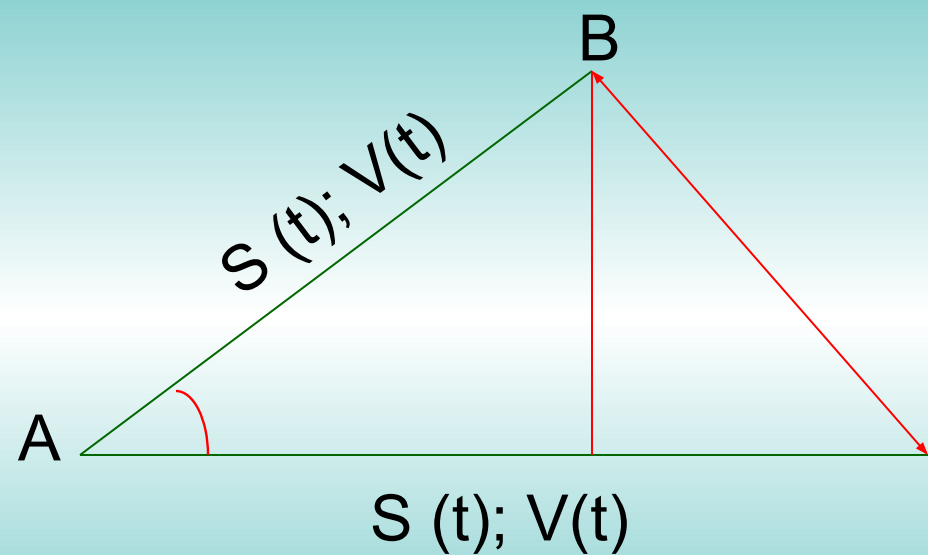
$$BC = \sqrt{91t^2 - 16t^3 + 4t^4} \quad , \text{ т.к. } BC = S,$$

$$V(t) = S'(t) = (\sqrt{91t^2 - 16t^3 + 4t^4})'$$

$$V(t) = \frac{91t - 24t^2 + 8t^3}{\sqrt{91t^2 - 16t^3 + 4t^4}} ;$$

ОТВЕТ: $\frac{91t - 24t^2 + 8t^3}{\sqrt{91t^2 - 16t^3 + 4t^4}}$.

$$\sqrt{91t^2 - 16t^3 + 4t^4}$$



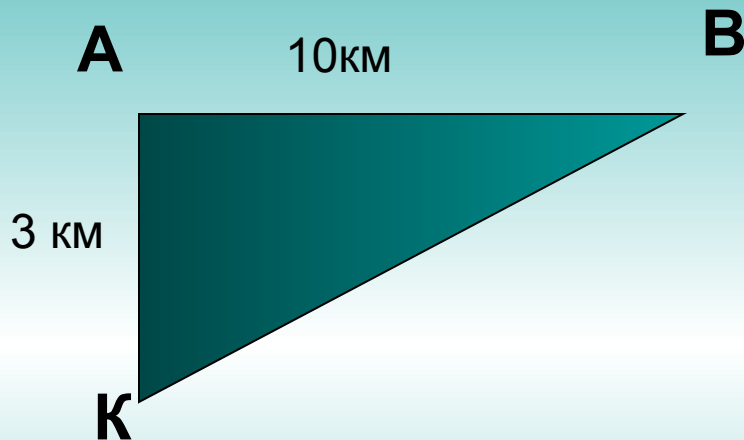
Текстовые задачи на экстремум

■ ЗАДАЧА 3.

Корабль находится от точки А берега на расстоянии 3 км. С корабля отправлен гонец с донесением в штаб В, находящийся от точки А на расстоянии 10 км по берегу. Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а гонец, выйдя из лодки может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы донесение в штаб было доставлено в кратчайшее время?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ



- Выразим время, затраченное на путь KBM, через x . Тогда из прямоугольного треугольника AKM, по теореме Пифагора, имеем:

$$KM = \sqrt{x^2 + 9}$$

Время, затраченное на путь KBM, будет $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{10 - x}{5}$

Найдем критические точки функции t на $[0; 10]$.

$$t'(x) = \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{9 + x^2}}{20\sqrt{9 + x^2}}$$

Производная всюду существует, так как знаменатель дроби не обращается в нуль ни при каких значениях x . Следовательно, критическими точками могут быть те, в которых производная равна нулю.

$$\frac{5x - 4\sqrt{9 + x^2}}{20\sqrt{9 + x^2}} = 0; \quad 5x - 4\sqrt{9 + x^2} = 0;$$

$$4\sqrt{9 + x^2} = 5x;$$

$$x^2 = 16; \quad x = 4 \quad \text{или} \quad x = -4$$

Точку $x = -4$ проверять не нужно, так как она не принадлежит промежутку $[0; 10]$.

Найдем значения функции в точке $x = 4$ и на концах отрезка $x = 0$ и $x = 10$.

$$t(4) = 2\frac{9}{20}; \quad t(0) = 2\frac{3}{4}; \quad t(10) = \frac{\sqrt{109}}{4}$$

Таким образом наименьшее значение функция достигает в точке $x = 4$.

ОТВЕТ: донесение будет доставлено в штаб в кратчайший промежуток времени, если лодка пристанет к берегу в месте, отстоящем от точки А на расстоянии, равном 4 км.

РЕШЕНИЕ:

- $m(t)=0; 1-2t/3=0;$
 $t=3/2/$
- Капля испарится на $3/2$ сек.
- Обозначим время падения капли через t ;
 $U(t)=gt; \omega(t)=m(t) \cdot U^2(t) / 2.$
- Найдем критические точки на $[0;3/2]$



ЗАДАЧА 4



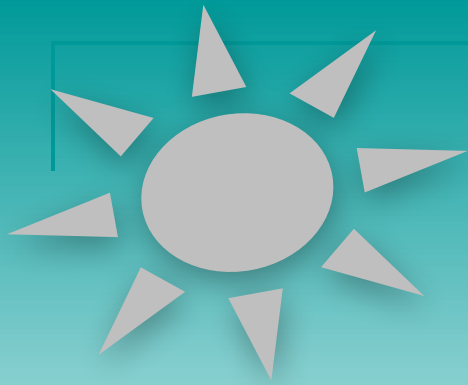
- Дождевая капля падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что её масса m изменяется по закону $m(t) = 1 - 2t/3$.
- Через сколько времени после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

1) $\omega'(t) = g^2t - g^2t^2 = g^2t(1-t).$

2) $\omega'(t)=0; \quad g^2t(1-t)=0$
 $t=0$ ИЛИ $t=1$

3) $\omega(0)=0; \quad \omega(1)=g^2/6; \quad \omega(3/2)=0;$

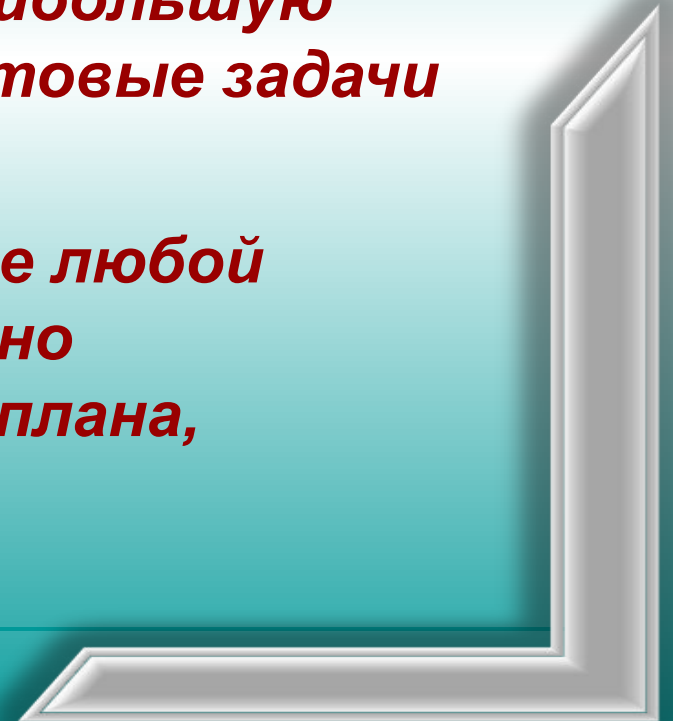
ОТВЕТ: *через 1 секунду после падения кинетическая энергия капли будет наибольшей.*



Я УЗНАЛ:

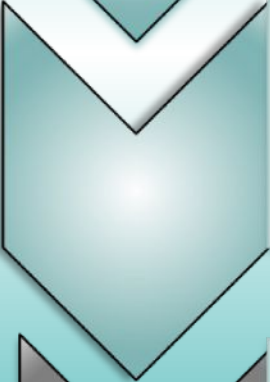
Я УЗНАЛ:


- Среди всего материала, касающегося применения производной, наибольшую сложность вызывают текстовые задачи на экстремум.
- Общеизвестно, что решение любой задачи может быть облегчено выработкой определённого плана, алгоритма её решения.



АЛГОРИТМ

- 
- **Выделить постоянные величины;**
 - **Установить область допустимых значений для переменной величины;**

- 
- **Исследуемую величину выразить через независимую переменную;**
 - **Найти критические точки;**

- 
- **Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка области определения;**
 - **Выбрать наибольшее или наименьшее значение и ответить на вопрос задачи.**

ВЫВОД:

Данная тема представляет собой благодатный материал для формирования диалектико-материалистического представления о предмете математики. Мы показали, как понятие производной используется для изучения многообразных явлений и процессов реального мира, как с помощью этого понятия получают единую трактовку многие понятия в физике, химии, биологии, географии и т.д.

РЕСУРСЫ:

1. <http://images.yandex.ru/yandpage?&p=2&text=%EA%EE%EB%E5%E1%E0%ED%E8%E5%20%F1%F2%F0%F3%ED%FB&rpt=simage>
2. <http://images.yandex.ru/yandpage?&p=1&text=%EA%EE%EB%E5%E1%E0%ED%E8%E5%20%F1%F2%F0%F3%ED%FB&rpt=simage>
3. <http://images.yandex.ru/yandpage?&p=138&text=%EA%EE%F0%E0%E1%EB%FC%20%F3%20%E1%E5%F0%E5%E3%E0&rpt=simage>
4. <http://images.yandex.ru/yandsearch?&p=1&text=%F4%EE%F2%EE%E3%F0%E0%F4%E8%FF+%F3%F7%E5%ED%EE%E3%EE+%CD%FC%FE%F2%EE%ED%E0&stype=image>
5. <http://images.yandex.ru/yandsearch?&p=1&text=%F4%EE%F2%EE%E3%F0%E0%F4%E8%FF+%F3%F7%E5%ED%EE%E3%EE+%CB%E5%E9%E1%ED%E8%F6%E0&stype=>
6. <http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%F4%E8%E7%E8%F7%E5%F1%EA%E8%E9+%F1%EC%FB%F1%EB+%EF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%EE%E9&stype=imageimage>

7. Е. Г. Глаголева, И. Л. Никольская. Формирование материалистического мировоззрения на уроках алгебры и начала анализа.

8. Е. Г. Глаголева Б. В. Сорокин. Предел и непрерывность функции в курсе 10 класса.

9. А. Я. Блох, И. А. Павленкова. Орешении задач на экстремум при изучении производной в 10 классе.

10. А. К. Арнольд. Теория катастроф.

11. А. А. Пинский, С. Т. Тхамафокова. Основные направления взаимосвязи курса «Алгебра и начала анализа» с курсом физики 9-10 классов.

12. Э. К. Розенов. Статьи о музыке.

13. Ч. Тейлор. Физика музыкальных звуков.

14. Н. Я. Виленкин. Специализированные учебные пособия.

15. Л. В. Тарасов. Математический анализ. Беседы об основных понятиях.
