

# Комбинаторика

# Комбинаторика

- *Комбинаторика* – раздел математики, посвященный подсчету количеств разных комбинаций элементов некоторого, обычно конечного, множества
- **Задачи:**
- 1) Сколькими способами 6 разных папок с документами можно расставить на полке?
- 2) При расследовании хищения установлено, что у преступника шестизначный номер телефона, в котором все цифры различны и нет нулей. Следователь, полагая, что перебор этих номеров достаточно будет одного - двух часов, доложил о раскрытии преступления. Прав ли он?
- 3) На иномарке, скрывшейся с места ДТП, был трехзначный номер, в котором первая цифра 2. Сколько номеров необходимо проверить по картотеке ГИБДД, чтобы найти нарушителя?

# Принципы комбинаторики

## Принцип сложения

- Основные принципы комбинаторики:
- Принцип сложения.
- Принцип умножения.

### Принцип сложения

- **Задача 1:** В группе 7 девушек и 8 юношей. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?  
**Решение:**  $7+8=15$
- **Задача 2:** В группе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по философии. В сессии 2 экзамена. Известно, что 4 человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеют хотя бы одну пятерку в сессии?  
**Решение:**  $7+9-4=12$

# Принцип сложения

- Принцип сложения: Если объект **a** можно получить **n** способами, объект **b** – **m** способами, то объект «**a** или **b**» можно получить **n+m-k** способами, где **k** – это количество повторяющихся способов.
- Теоретико-множественная формулировка

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

# Принцип умножения

- **Задача**: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?
- **Решение**:  $5 \cdot 5 = 25$ .
- **Принцип умножения**: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** – ***m*** способами, то объект «***a* и *b***» можно получить ***m \cdot n*** способами.
- **Теоретико-множественная формулировка**

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

# Задачи

- Из 3 экземпляров учебника алгебры, 5 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника истории нужно выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** По принципу умножения

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

# Задачи

- От дома до школы существует 6 маршрутов. Сколькими способами можно дойти до школы и вернуться, если дорога «туда» и «обратно» идет по разным маршрутам?

**Решение.** По принципу умножения

$$6 \cdot 5 = 30$$

# Задачи

- В корзине лежат 7 различных яблок и 5 апельсинов. Яша выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Полина берет яблоко и апельсин. В каком случае Полина имеет большую свободу выбора: если Яша взял яблоко или если он взял апельсин?

**Решение.** Если Яша взял яблоко, то по принципу умножения Полина может осуществить свой выбор  $6 \cdot 5 = 30$  способами. Если Яша взял апельсин, то -  $7 \cdot 4 = 28$  способами.

В первом случае у Полины свобода выбора большая.



# Замечание

$n!$  читается « $n$  факториал» и вычисляется по формуле

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

• Например,  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

• Считают, что  $0! = 1$

# Перестановки без повторений

- Определение 1

- Перестановкой  $n$  элементного множества называется упорядоченный набор неповторяющихся элементов этого множества длины  $n$ .

- **Пример:**

$$A = \{a; b; c;\}$$

- перестановки:  $(a; b; c); (b; a; c); (a; c; b); (b; c; a); (c; a; b); (c; b; a)$
- Число размещений  $n$  – элементного множества обозначают  $P_n$  и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

- **Задача:** В команде 6 человек. Сколькими способами можно осуществить построение?

$$P_6 = 6! = 720$$

# Перестановки с повторениями

- **Определение 2**

- Число перестановок  $n$  – элементов, в котором  $n_i$  элементов  $i$ –того типа ( $i = \overline{1, k}$ ) вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

**Задача:** Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», а в слове «математика»?

Решение:

$$7! = 5040$$

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

# Размещение без повторений

- **Определение 3**

$k$ -размещением без повторений элементов множества  $A$  называется упорядоченный набор длины  $k$  попарно различных элементов множества  $A$ .

Пример:  $A = \{a; b; c\}$  - 2 размещения:  $(a; b); (a; c); (b; c); (b; a); (c; a); (c; b)$

Число  $k$ - размещений  $n$  элементного множества обозначается

$A_n^k$  и вычисляется по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Задача:** В соревновании участвуют 12 команд, сколькими способами они могут занять призовые места?

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

# Размещения с повторениями

- **Определение 4**

- $k$  – размещением с повторениями  $n$ –элементного множества называется упорядоченный набор длины  $k$  элементов данного множества.

- **Пример**

$$A = \{a; b; c\} \quad \bullet \quad \text{2- размещения с повторениями:}$$
$$(a; b); (b; a); (a; c); (c; a); (b; c); (c; b); (a; a); (b; b); (c; c)$$

Число  $k$  – размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

**Задача:** Сколько существует номеров машин?

$$\overline{A}_{10}^3 \cdot \overline{A}_{12}^3 = 12^3 \cdot 10^3$$

# Сочетания

- **Определение 1**

- $k$ -сочетанием множества  $A$  называется неупорядоченный набор попарно различных элементов множества  $A$  длины  $k$ . Другими словами  $k$ -сочетание – это  $k$ -элементное подмножество множества  $A$
- Пример:  $A = \{a; b; c\}$  . 2- сочетания:  $\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$
- Число  $k$ - сочетаний  $n$ -элементного множества обозначается  $C_n^k$  и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Свойства сочетаний

$$1) C_n^k = C_n^{n-k}$$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$2) C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

Доказательство:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

# Свойства сочетаний

3) Бином Ньютона:  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

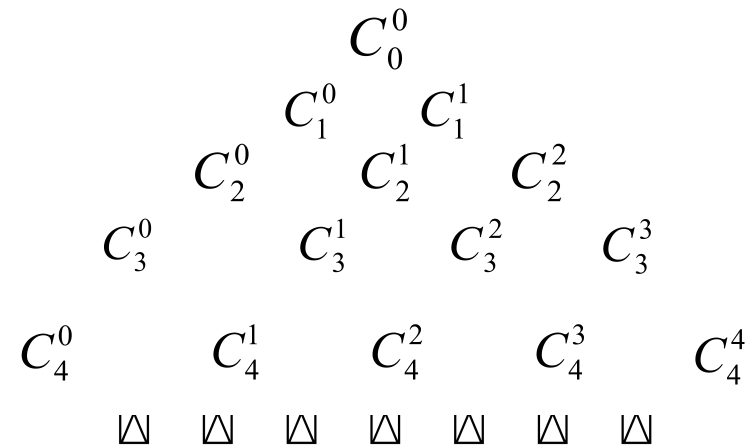
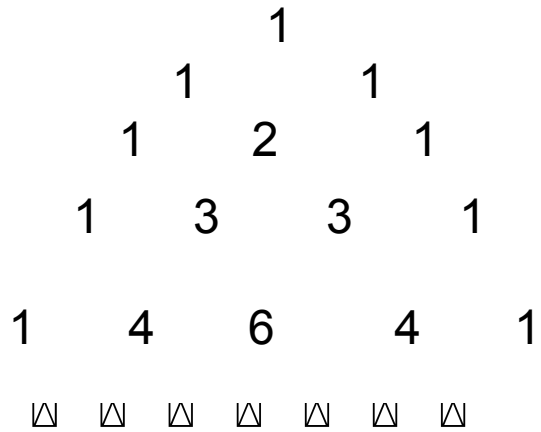
Следствия из бинома Ньютона:

Равенство  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$  получается из бинома Ньютона при  $a = b = 1$

Равенство  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$  получается из бинома Ньютона при  $a = 1, b = -1$



# Треугольник Паскаля



# Сочетание с повторениями

- **Определение 2**

- $k$ -сочетанием с повторениями  $n$  элементного множества, называется неупорядоченный набор элементов данного множества длины  $k$ .
- Пример:  $A = \{a; b; c\}$

2 сочетания с повторениями:  $[a; b]; [b; c]; [a; c]; [a; a]; [b; b]; [c; c]$

Число  $k$ -сочетание с повторениями  $n$  – элементного множества обозначается:

$$C_n^k$$

# Сочетания с повторениями

## Теорема 3

Число  $k$ -сочетание с повторениями  $n$  – элементного множества вычисляется по формуле:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

## Доказательство:

**Лемма.** Число наборов из  $m$  нулей и  $n$  единиц равно

$$C_{n+m}^n$$

Закодируем  $k$  - сочетания с повторениями наборами из 0 и 1, отделяя нулями группы элементов одного типа. Количество 1 равно  $k$ , а количество нулей  $(n-1)$ . Число таких кодов равно

$$C_{k+n-1}^k$$

# Сводная таблица

	Упорядоченный	Неупорядоченный
С повторениями	$\overline{A}_n^k = n^k$ $\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Без повторений	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $A_n^n = P_n = n!$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

# Решение задач

# Задачи

- 1) Сколькими способами можно составить список из 8 студентов, если у них различные инициалы?
- **Решение**

Задача сводится к подсчету числа перестановок ФИО.

$$P_8 = 8! = 40320$$

# Задачи

- 2) Сколько способами можно составить список 8 студентов, так, чтобы два указанных студента располагались рядом?

- **Решение**

Можно считать двоих указанных студентов за один объект и считать число перестановок уже 7 объектов, т.е.

$$P_7 = 7! = 5040$$

Так как этих двоих можно переставлять местами друг с другом, необходимо умножить результат на 2!

$$P_7 \cdot 2! = 7! \cdot 2! = 5040 \cdot 2 = 10080$$

# Задачи

- 3) Сколькими способами можно разделить 11 спортсменов на 3 группы по 4, 5 и 2 человека соответственно?
- **Решение.** Сделаем карточки: четыре карточки с номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3. Будем раздавать эти карточки с номерами групп спортсменам, и каждый способ раздачи будет соответствовать разбиению спортсменов на группы. Таким образом нам необходимо посчитать число перестановок 11 карточек, среди которых четыре карточки с одинаковым номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3.

$$P(4,5,2) = \frac{11!}{4!5!2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 6930$$



# Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

# Задачи

- 5) Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?
- **Решение.** В разряде единиц тысяч не может быть нуля, т.е. возможны 9 вариантов цифры.

В остальных трех разрядах не может быть цифры, стоящей в разряде единиц тысяч (так как все цифры должны быть различны), поэтому число вариантов вычислим по формуле размещений без повторений из 9 по 3

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

По правилу умножения получим  $9 \cdot A_9^3 = 4536$

# Задачи

- 6) Сколько существует двоичных чисел, длина которых не превосходит 10?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений с повторениями из двух элементов по 10

$$\overline{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$$

# Задачи

- 7) В лифт 9 этажного дома зашли 7 человек. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома?
- **Решение.** Очевидно, что на первом этаже никому не надо выходить. Каждый из 7 человек может выбрать любой из 8 этажей, поэтому по правилу умножения получим

$$\underbrace{8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8}_7 = 8^7 = 2097152$$

- Можно так же применить формулу для числа размещений с повторениями из 8 (этажей) по 7 (на каждого человека по одному этажу)

$$\overline{A}_8^7 = 8^7$$

# Задачи

- 8) Сколько чисел, меньше 10000 можно написать с помощью цифр 2, 7, 0?
- **Решение.** Так как среди цифр есть 0, то, например запись 0227 соответствует числу 227, запись 0072 соответствует числу 72, а запись 0007 соответствует числу 7. Таким образом, задачу можно решить, используя формулу числа размещений с повторениями

$$\overline{A}_3^{-4} = 3^4 = 81$$

# Задачи

- 1) В почтовом отделении продают 10 сортов открыток. Сколькими способами можно купить в нем 8 различных открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток?

$$C_{10}^8 = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

$$\bar{C}_{10}^8 = C_{10+8-1}^8 = \frac{17!}{8!(17-8)!} = \frac{17!}{8! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 10 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 24310$$

- 2) Сколькими способами можно раздать 5 одинаковых апельсинов, 3 банана, 7 яблок между 4 людьми?

$$\bar{C}_4^5 \cdot \bar{C}_4^3 \cdot \bar{C}_4^7 = C_8^5 \cdot C_6^3 \cdot C_{10}^7 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{10!}{7!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 56 \cdot 20 \cdot 120 = 134400$$

# Задачи

- 3) Сколькими способами можно закодировать дверь?

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 2^{10} - 1 = 1023$$

- 4) Сколько существует трехзначных чисел?

$$\overline{A}_{10}^3 - \overline{A}_{10}^2 = 10^3 - 10^2 = 900$$

- 5) Абонент забыл последние 3 цифры телефонного номера. Помня, что эти цифры различны, он набирает номер наугад. Сколько номеров ему нужно перебрать, если он невезучий человек?

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

# Задачи

- 6) В компьютерном салоне продают мониторы 5 марок. Сколькими способами организация может купить в нем 3 монитора различных марок? Сколькими способами можно купить 3 монитора?
- **Решение.** Ответ на первый вопрос получим с помощью формулы числа сочетаний без повторений, так как мониторы различные

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

- На второй вопрос ответим, используя формулу числа сочетаний с повторениями, так как не сказано, что мониторы различных марок, значит марки могут повторяться

$$\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$



# Задачи

- 7) В группе 8 юношей и 9 девушек. Сколькими способами можно выбрать группу студентов, состоящей из 4 юношей и 3 девушек?
- **Решение.** Четырех юношей выберем из 8, троих девушек – из 9. По правилу умножения получим

$$C_8^4 \cdot C_9^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{9!}{3!6!} = 70 \cdot 84 = 5880$$

# Задачи

- 8) Используя бином Ньютона, раскрыть скобки  
.  
 $(a+b)^5$

- **Решение.**

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5 = \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

# Задачи

- 9) Сколькими способами можно раздать 7 одинаковых апельсинов между тремя детьми?
- **Решение.** Так как апельсины одинаковые, их вообще нельзя использовать в качестве 7 различных элементов множества.

Рассмотрим множество, состоящее из троих детей. Будем выбирать детей для апельсинов. Используем формулу числа сочетаний с повторениями, так как одному ребенку может достаться несколько апельсинов, а может не достаться ни одного.

$$\bar{C}_3^7 = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

# Задачи

- 10) Сколькими способами можно распределить 5 одинаковых принтеров, 3 телефонных аппарата, 7 мониторов между 4 фирмами?
- **Решение.** Распределим сначала принтеры, затем телефонные аппараты, и, наконец, мониторы. Используя правило умножения, получим

$$\bar{C}_4^5 \cdot \bar{C}_4^3 \cdot \bar{C}_4^7 = C_8^5 \cdot C_6^3 \cdot C_{10}^7 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{10!}{7!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 56 \cdot 20 \cdot 120 = 134400$$