Лекция 6.2

Раздел: Алгоритмы на графах

Тема лекции:

Часть 2.

Минимальное остовное дерево (МОД) как приближение в задаче коммивояжёра

МОД как приближение в задаче коммивояжёра

На лекции 2 рассматривались приближённые алгоритмы решения задачи коммивояжёра (ЗК):

- АБС – алгоритм ближайшего соседа
- АВБГ – алгоритм включения ближайшего города

Если рассматривается ***евклидов*** (частный) случай ЗК, то существуют оценки отклонения стоимости приближённого решения от стоимости точного решения.

Евклидова ЗК:

Матрица стоимостей $\{C_{ij}\}$:

(a) симметрична

($б$) удовлетворяет неравенству треугольника

$$C_{ij} \leq C_{ik} + C_{kj}\,,\ \forall\, i, j, k$$

Более точная терминология

Лучше (более точно) называть это задачей коммивояжёра с неравенством треугольника (ЗКНТ)

На плоскости при использовании евклидова расстояния неравенство треугольника выполняется (но есть и другие случаи с НТ)

$$v_i \leftrightarrow p_i = (x_i, y_i)$$

$$C_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Если стоимости вычисляются как евклидово расстояние, то это и есть евклидова задача коммивояжёра (ЕЗК).

Т.о. оценки верны в случае ЗКНТ и в т.ч. в евклидовом случае.

Оценка степени приближения алгоритмов АБС и АВБГ в евклидовом случае

N_n – маршрут АБС, $|N_n|$ – его длина (стоимость).
I_n – маршрут АВБГ, $|I_n|$ – его длина (стоимость).
O_n – оптимальный маршрут, $|O_n|$ – его длина (стоимость).

$$\frac{|N_n|}{|O_n|} \le \frac{1}{2}\left(\lceil \log_2 n \rceil + 1\right).$$

$$\frac{|I_n|}{|O_n|} \le 2$$

Было ранее без доказательства.

Новое:

Приближённый алгоритм двойного обхода МОД при решении ЗК

1)Для заданного графа ЗКНТ построить МОД

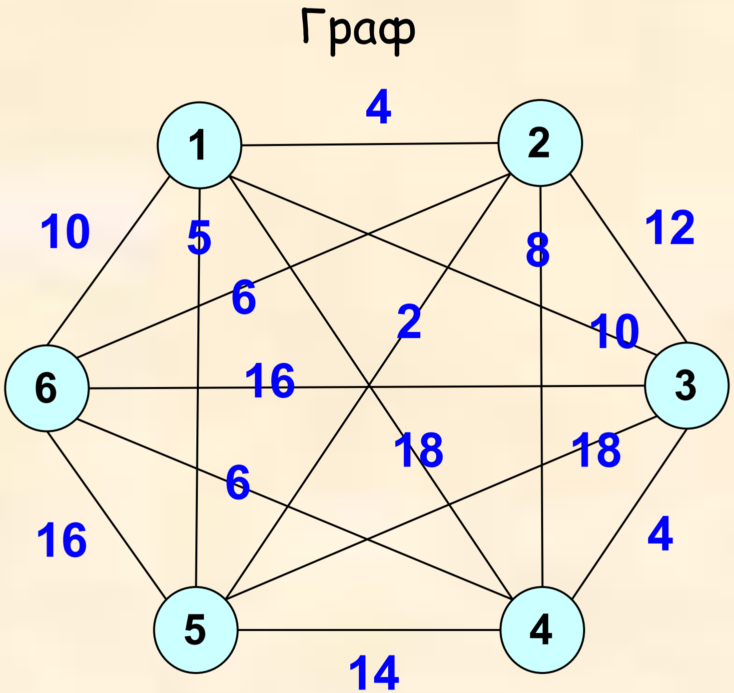
2)Начиная с любой вершины обойти по рёбрам МОД все вершины, «спрямляя пути» при возвратах к уже посещённым вершинам, и вернуться в стартовую вершину

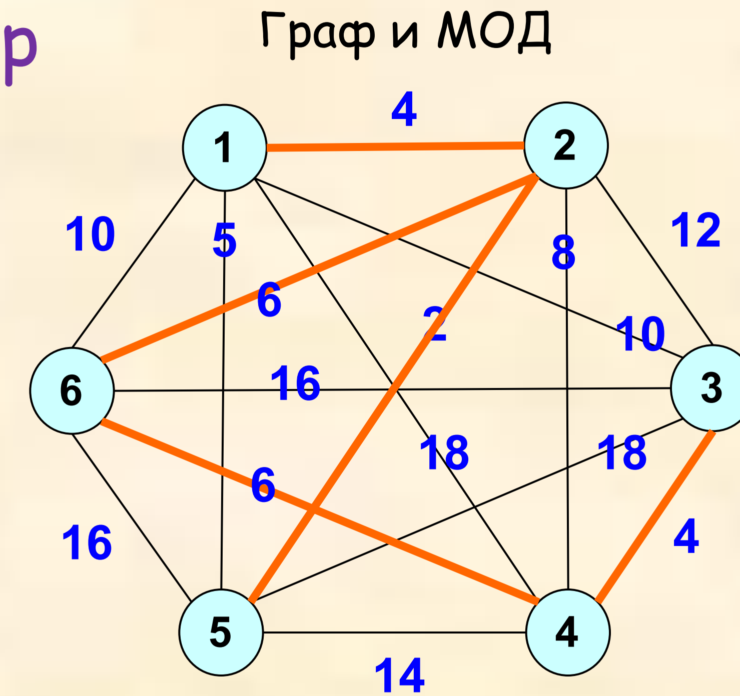
Другие формулировки п.2:

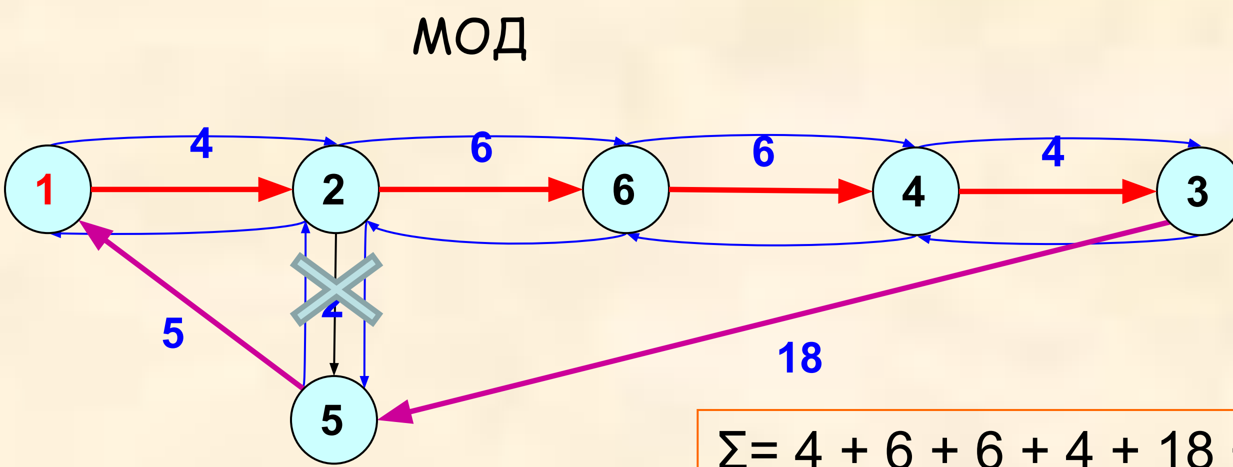
2′) Сделать двойной обход МОД. В списке пройденных вершин вычеркнуть повторения (оставить первые вхождения).

2″) Обойти МОД в *прямом порядке*, фиксируя первые посещения вершин.

Пример

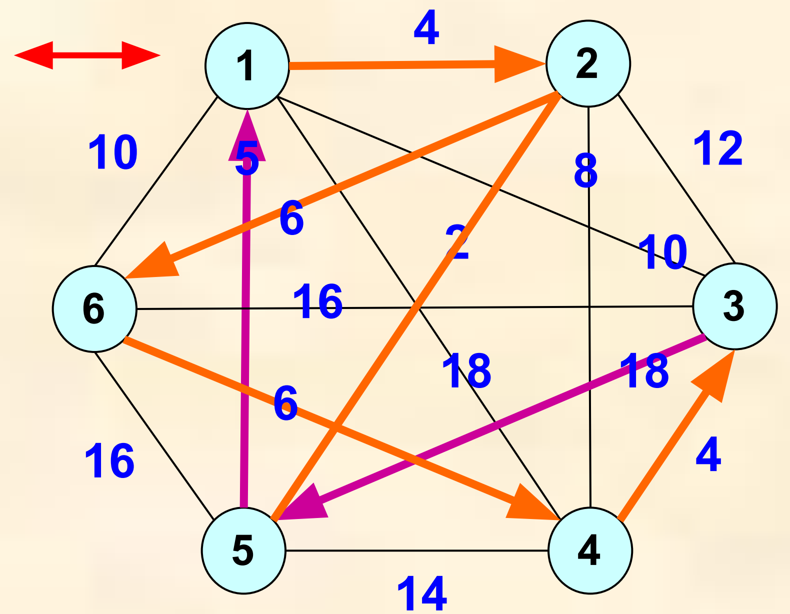


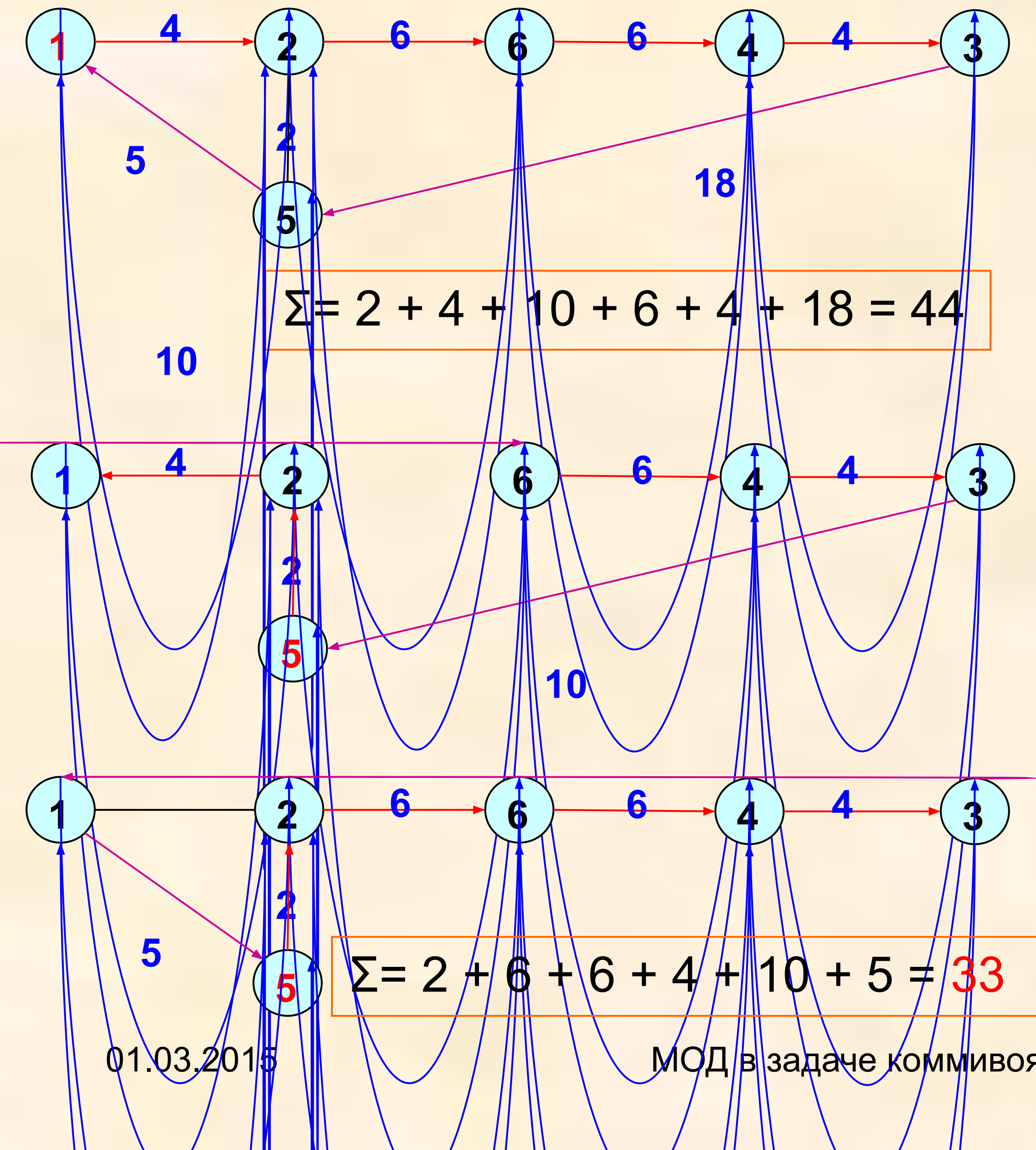




Σ= 4 + 6 + 6 + 4 + 18 + 5 = 43

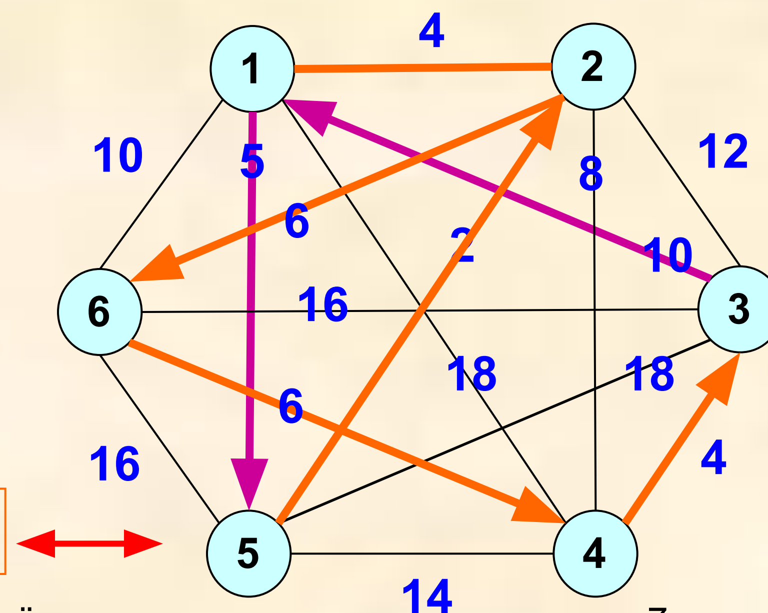
$\Sigma = 4 + 6 + 6 + 4 + 18 + 5 = 43$





$\Sigma = 2 + 4 + 10 + 6 + 4 + 18 = 44$

$\Sigma = 2 + 6 + 6 + 4 + 10 + 5 = 33$



Оценка приближения алгоритма двойного обхода МОД (АДО МОД)

Пусть

O_n – оптимальный маршрут, $|O_n|$– его длина (стоимость);

$ОД_n$ – остовное дерево, $|ОД_n|$ – его длина (стоимость);

$МОД_n$ – минимальное остовное дерево, $|МОД_n|$ – его стоимость;

M_n – маршрут АДО МОД, $|M_n|$ – его стоимость.

Оценка:

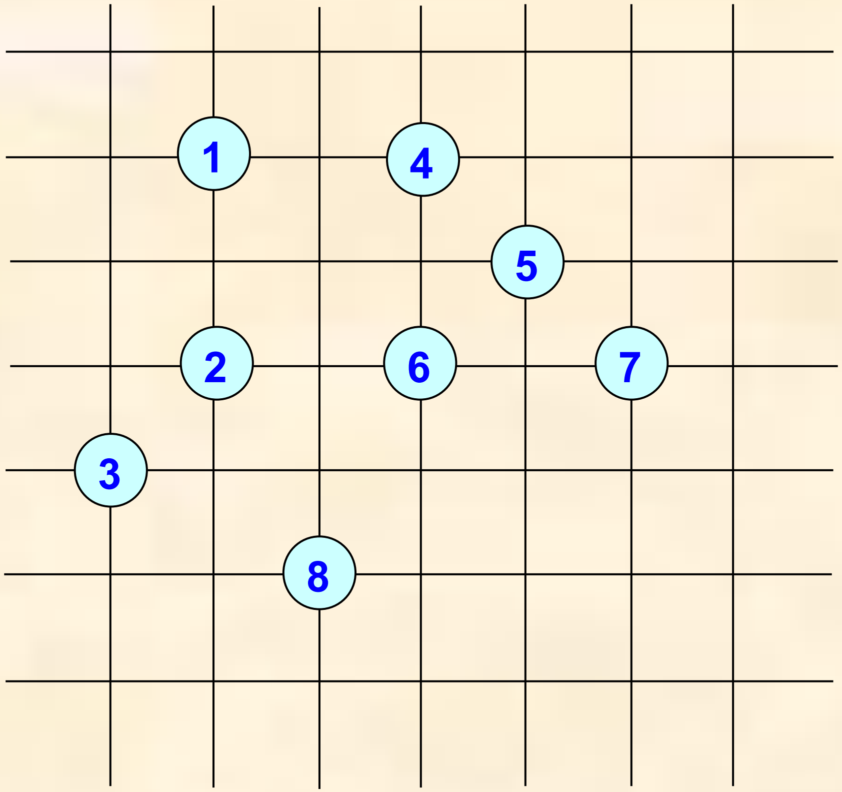
$$\boxed{\frac{|M_n|}{|O_n|} \le 2}$$

Доказательство оценки

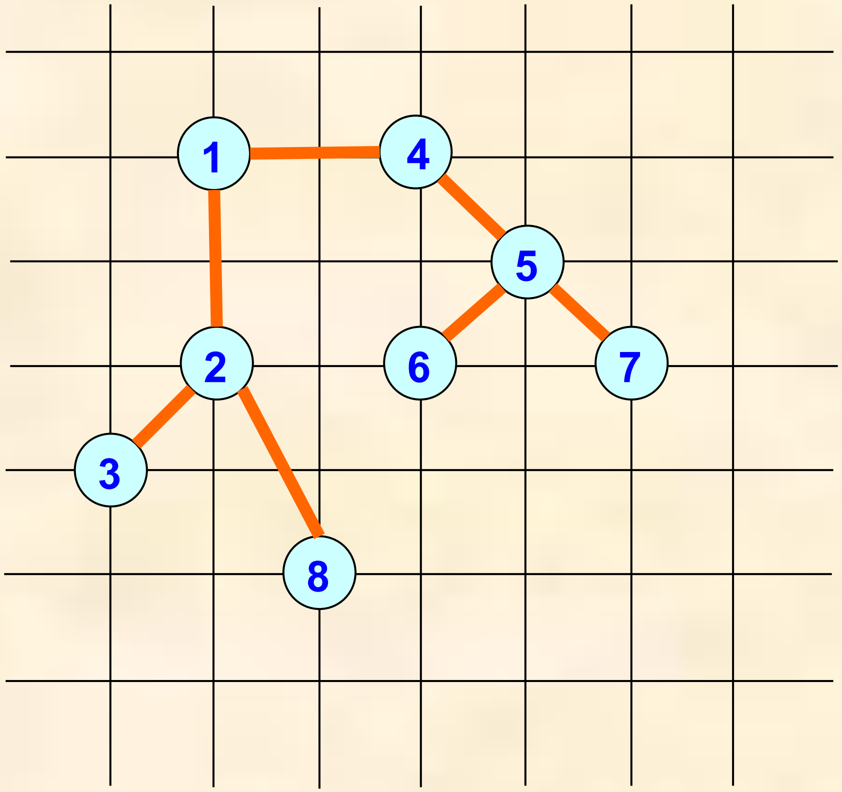
Пусть есть оптимальный маршрут (цикл) O_n.
Удалим одно из рёбер этого цикла – получим $ОД_n$.
При этом $|O_n| \geq |ОД_n| \geq |МОД_n|$.
В силу неравенства треугольника и смысла АДО МОД имеем $2|МОД_n| \geq |M_n|$.
Из неравенств $2|O_n| \geq 2|МОД_n|$ и $2|МОД_n| \geq |M_n|$ следует, что $2|O_n| \geq |M_n|$, т.е.

$$\boxed{\frac{|M_n|}{|O_n|} \leq 2}$$

Другие примеры АДО МОД

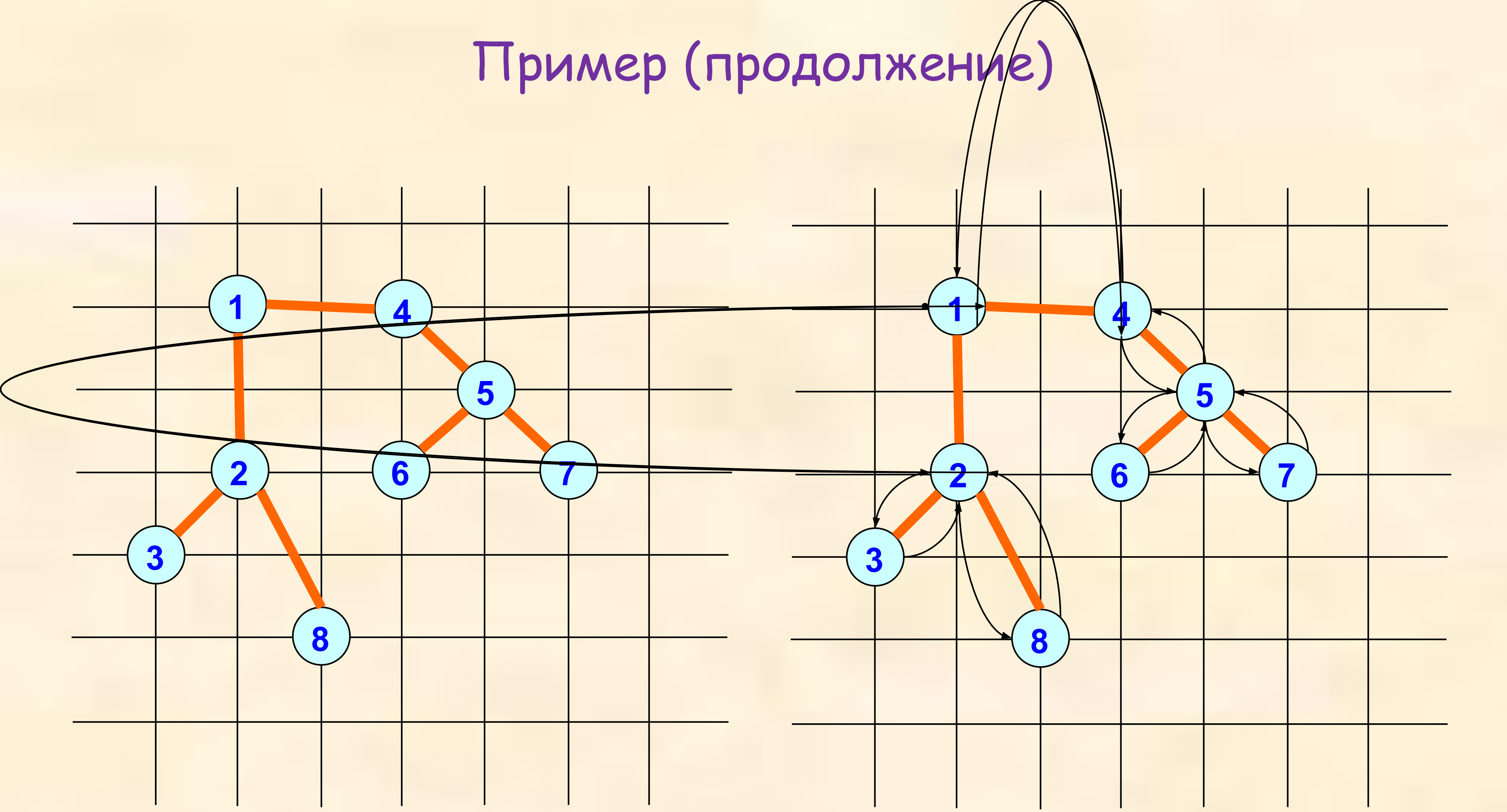


Граф (вершины)



МОД графа

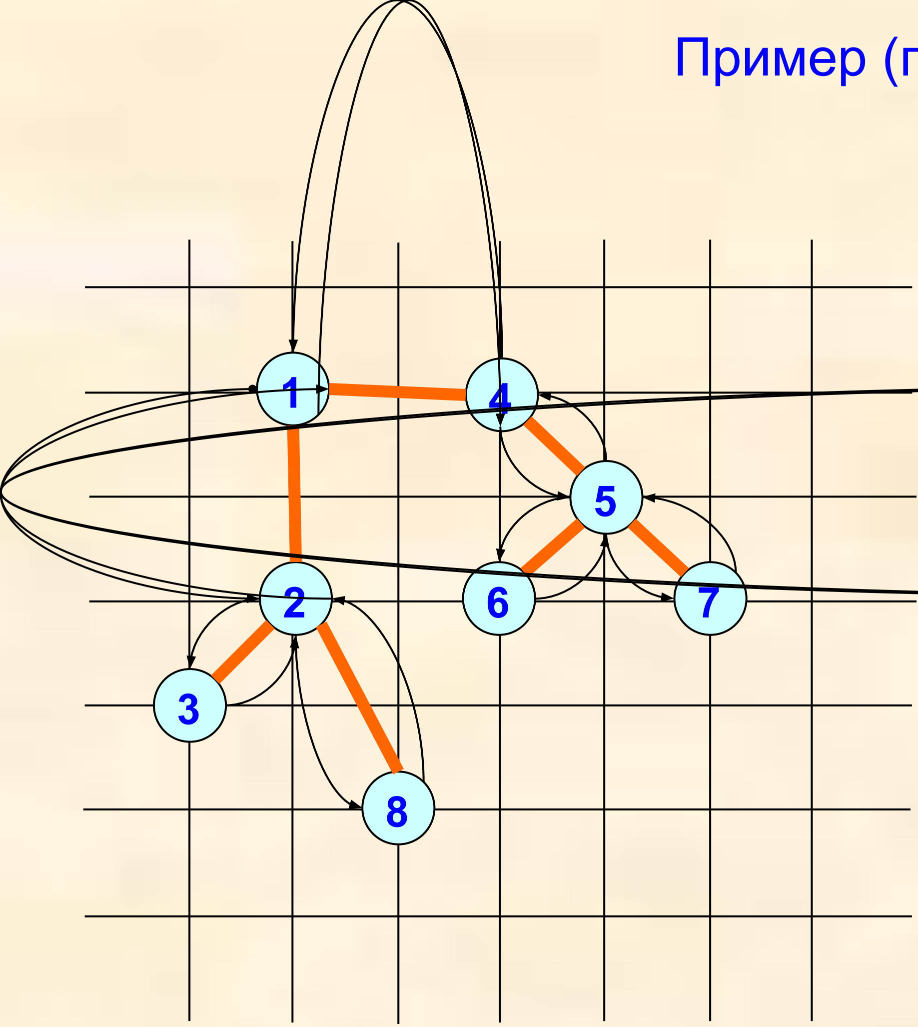
Пример (продолжение)

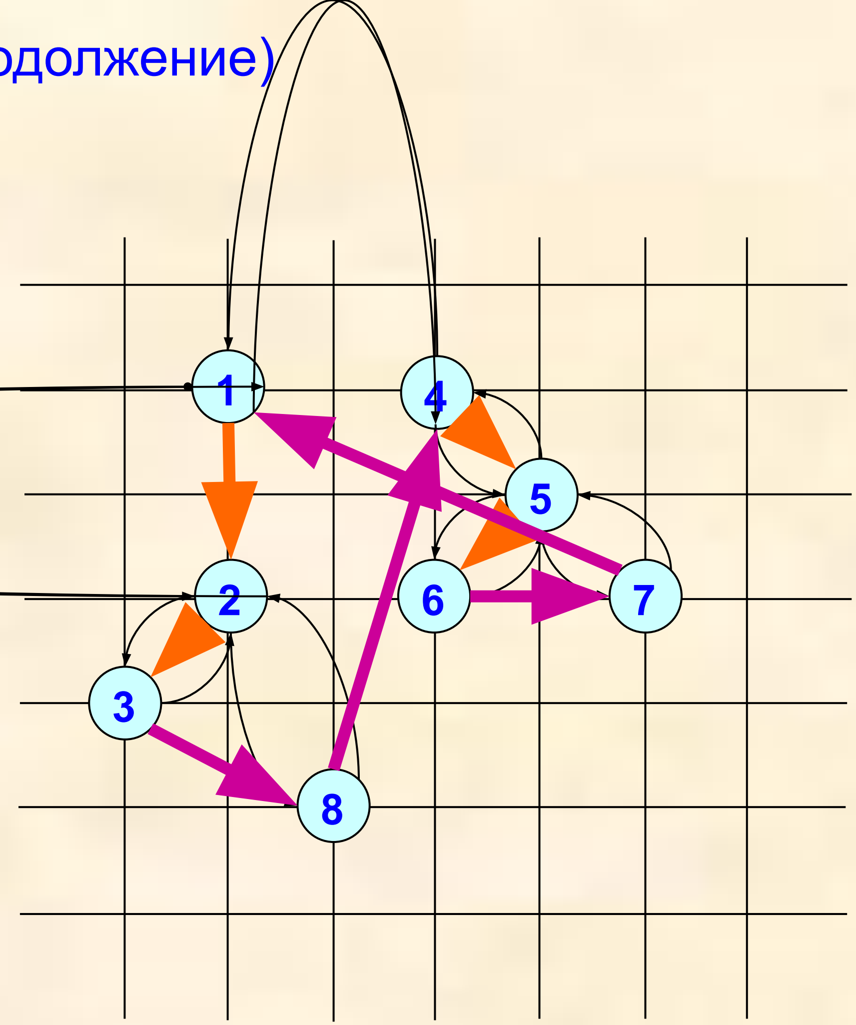


МОД графа

Двойной обход МОД графа

Пример (продолжение)



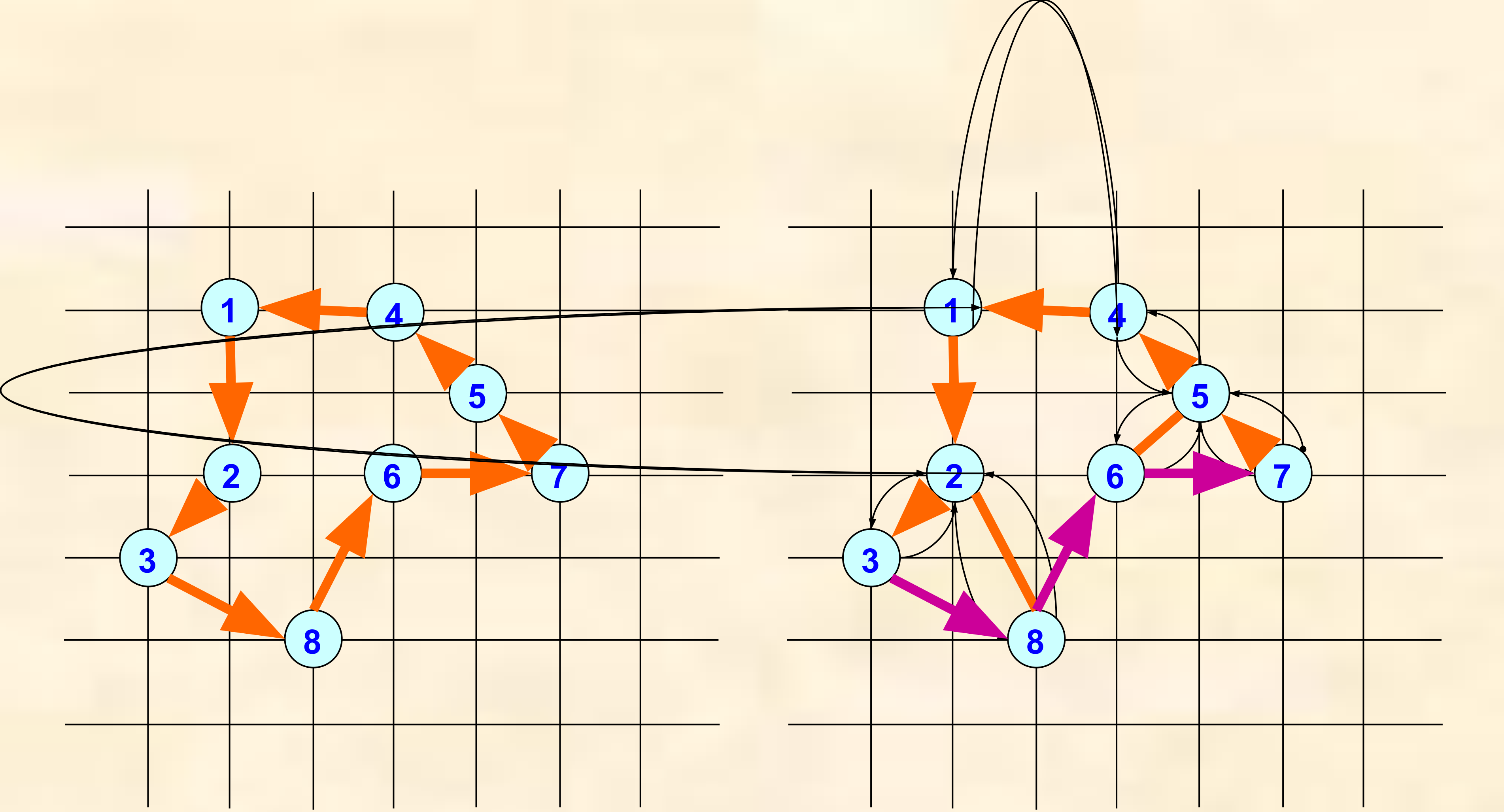


Двойной обход МОД графа

Маршрут в ЗК.

Приближение АДО МОД.

Стоимость = 19.074



Оптимальный маршрут.

Стоимость = 14.715

Меньше, чем АДО МОД, на ≈23%.

Если начать АДО МОД с вершины 7, то можно получить …

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ