

Проверка на нормальность распределения

Законы распределения вероятностей в R

° **d** (от "*density*", плотность): функции плотности вероятности ("функция распределения масс" для дискретных величин);

° **p** (от "*probability*", вероятность): кумулятивные функции

Распределения вероятностей;

° **q** (от "*quantile*", квантиль): функции для нахождения квантиле

° **r** (от "*random*", случайный): функции для генерации случайных чисел в соответствии с параметрами того или иного закона распределения вероятностей.

Законы распределения вероятностей (базовая версия) :

- ° Бета-распределение (dbeta)
- ° Биномиальное распределение (включая распределение Бернулли) (dbinom)
- ° Распределение Коши (dcauchy)
- ° Распределение хи-квадрат (dchisq)
- ° Экспоненциальное распределение (dexp)
- ° Распределение Фишера (df)
- ° Гамма-распределение (dgamma)
- ° Геометрическое распределение (как частный случай отрицательного биномиального распределения) (dgeom)
- ° Гипергеометрическое распределение (dhyper)
- ° Логнормальное распределение (dlnorm)
- ° Полиномиальное (или мультиномиальное) распределение (dmultinom)
- ° Отрицательное биномиальное распределение (dnbinom)
- ° Нормальное распределение (dnorm)
- ° Распределение Пуассона (dpois)
- ° Распределение Стьюдента (dt)
- ° Равномерное распределение (dunif)
- ° Распределение Вейбулла (dweibull)

Пусть мы имеем дело с непрерывной количественной величиной X , значения которой распределены в соответствии со стандартным нормальным распределением (среднее значение = 0, стандартное отклонение = 1).

Функция плотности вероятности представляет собой такую функцию $f(x)$, что для любых двух значений a и b (при $a \leq b$)

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Вероятность того, что некоторая случайная величина X принимает значение, лежащее в интервале $[a, b]$, равна площади под кривой плотности вероятности, ограниченной этим интервалом.

Дифференциальная функция плотности вероятности стандартного нормального распределения в точке x задается уравнением

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Для $x = -1$ в случае со стандартным нормальным распределением

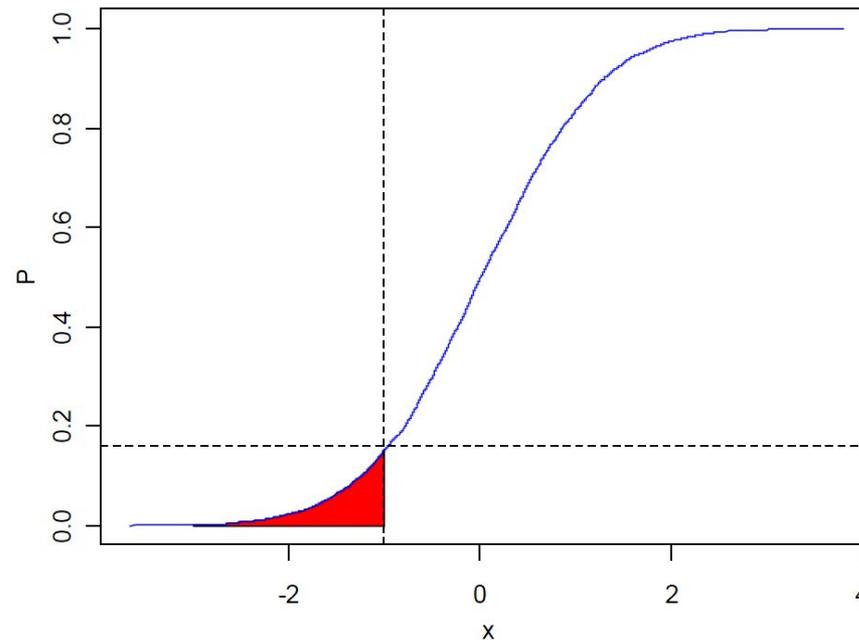
```
dnorm(-1)
```

```
[1] 0.2419707
```

```
pnorm(-1)
```

```
[1] 0.1586553
```

Кумулятивная функция нормального распределения



функция `qnorm()`

Вычислим 1-ый и 3-ий квартили стандартного нормального распределения:

```
> qnorm(p = c(0.25, 0.75))
```

```
[1] -0.6744898 0.6744898
```

```
> qnorm(p = c(0.025, 0.975))
```

```
[1] -1.959964 1.959964
```

Функция `rnorm()` служит для случайной генерации совокупностей нормально распределенных чисел.

Сгенерируем совокупность из 10 значений из стандартного нормального распределения:

```
>rnorm(10, mean = 0, sd = 1)
```

```
[1] -0.98696489 -0.53126664 -0.23150543 -0.84139429
```

```
[5] -1.81401823  0.48510932  0.04734179  0.32588926
```

```
[9] -0.36508765 -0.37539185
```

```
> rnorm(8, mean = 13, sd = 3)
```

```
[1] 12.65565 18.07006 11.97118 16.21725 15.04990 21.60843 16.14872 16.05072
```

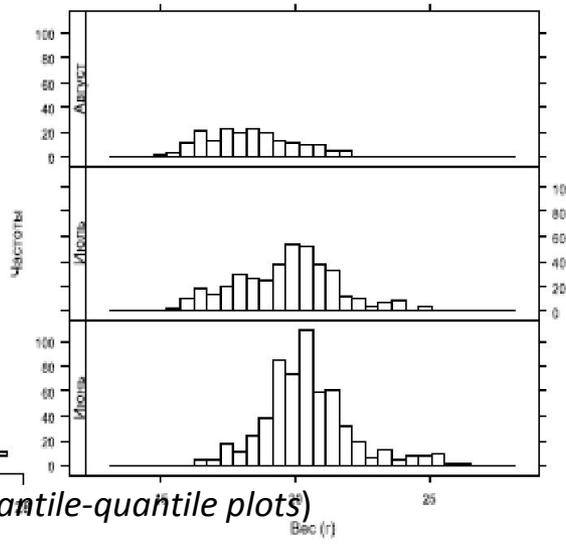
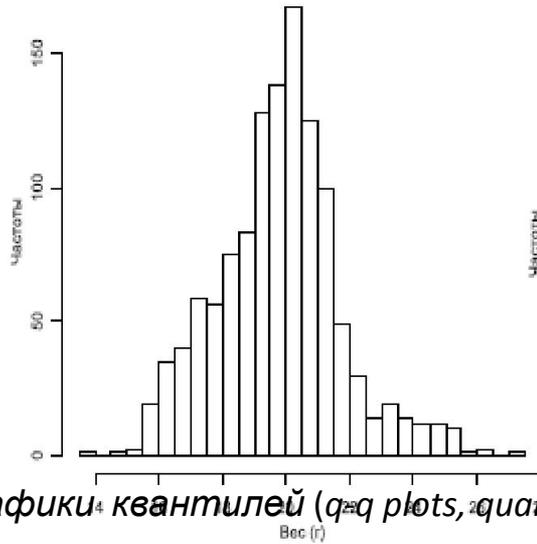
пакеты VGAM, actuar, gamlss и ActuDistns

Проверка на нормальность распределения

Проверка исследуемых переменных на нормальность распределения является важной составной частью разведочного анализа данных

Графические способы

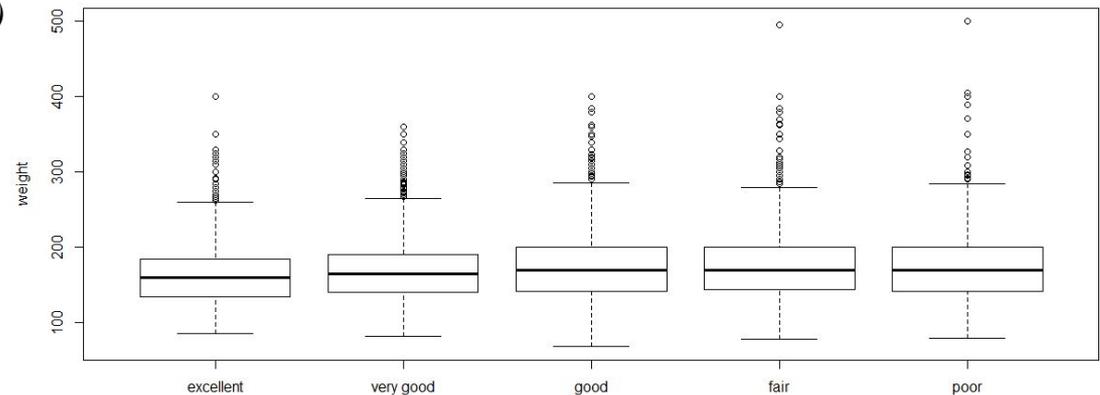
гистограммы



Графики квантилей (qq plots, quantile-quantile plots)

распределение веса 1193 воробьев (Zuur et al., 2010)

Коробчатые графики, боксплоты (boxplots)



Графики квантилей (*q-q plots, quantile-quantile plots*)

функции `qqnorm()` и

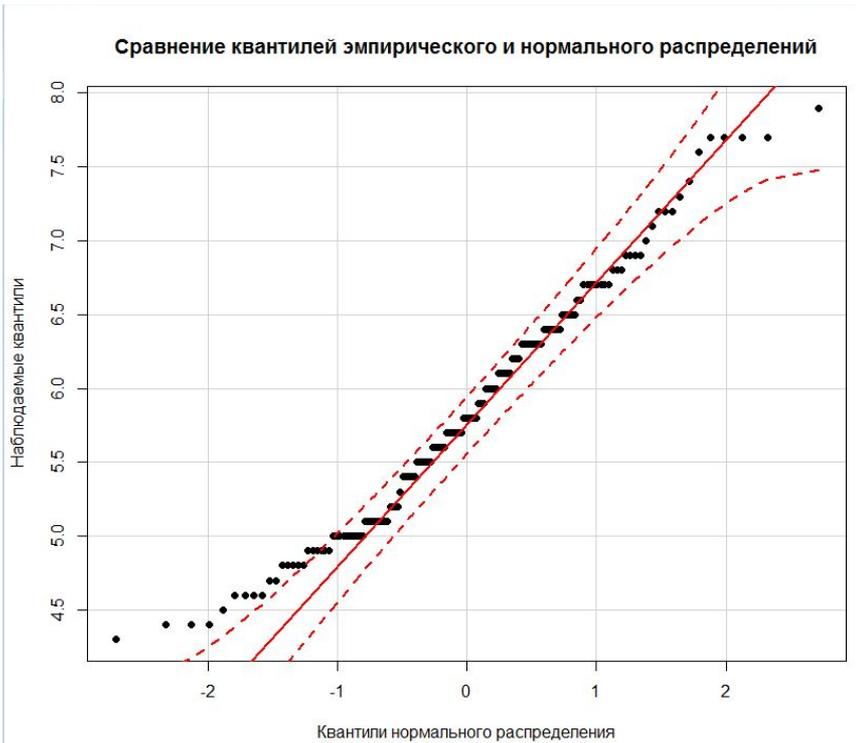
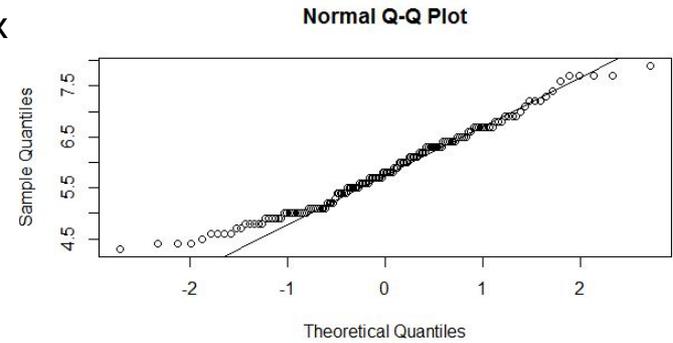
Квантиль-квантильный график без доверительных огибающих
`qqplot()`
`qqnorm(x)`; `qqnlme(x)`

Функция `qqPlot()` пакета

для `car`
для `Sepal.Length` из фрейма `iris`:

```
>library(car)
```

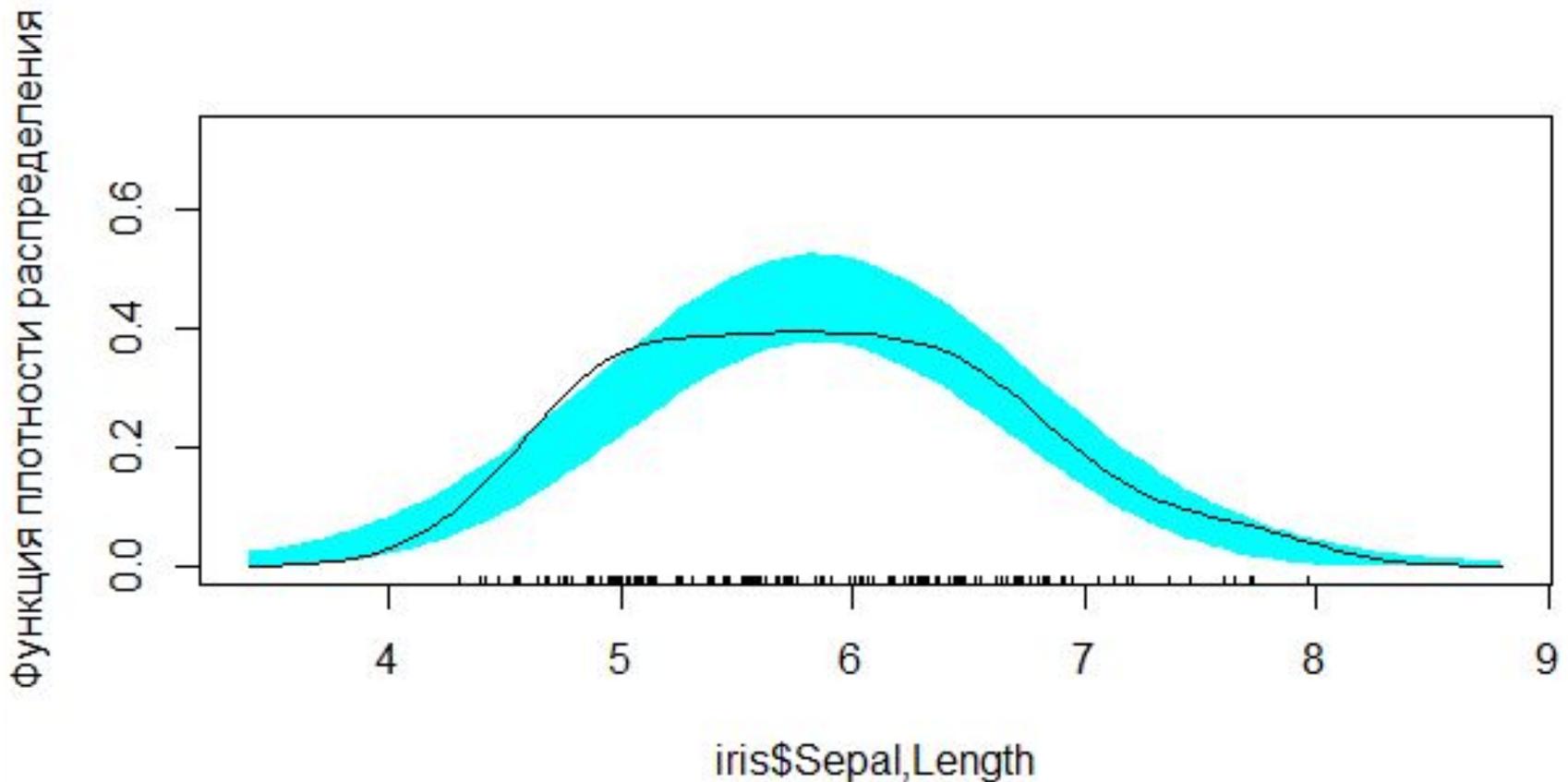
```
>qqPlot(x, dist= "norm", col=palette()[1], pch=19, xlab="Квантили нормального распределения", ylab="Наблюдаемые квантили",main="Сравнение квантилей эмпирического и нормального распределений")
```



sm.density() и sm.density.compare() из пакета sm

```
>library(sm)
```

```
>sm.density(x, model = "Normal", xlab=" iris$Sepal.Length", ylab="Функция плотности  
распределения")
```



Формальные тесты

Нулевую гипотезу можно сформулировать так: "анализируемая выборка происходит из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение". Если получаемая при помощи того или иного теста вероятность ошибки p оказывается меньше некоторого заранее принятого уровня значимости (например, 0.05), нулевая гипотеза отклоняется.

Базовая функция `shapiro.test()`, при помощи которой можно выполнить широко используемый **тест Шапиро-Уилка**.

функции из пакета `nortest`, реализующие другие распространенные тесты на нормальность:

- ° `ad.test()` - **тест Андерсона-Дарлинга**;
- ° `cvm.test()` - **тест Крамера фон Мизеса**;
- ° `lillie.test()` - **тест Колмогорова-Смирнова в модификации Лиллиефорса**;
- ° `sf.test()` - **тест Шапиро-Франсия**

`shapiro.test(x)`

Shapiro-Wilk normality test

data: x

W = 0.8986, p-value = 1.219e-06

`library(nortest)`

`ad.test(x)`

Anderson-Darling normality test

data: x

A = 2.0895, p-value = 2.382e-05

`cvm.test(x)`

Cramer-von Mises normality test

data: x

W = 0.3369, p-value = 0.0001219

`lillie.test(x)`

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data: x

D = 0.1348, p-value = 0.0001225

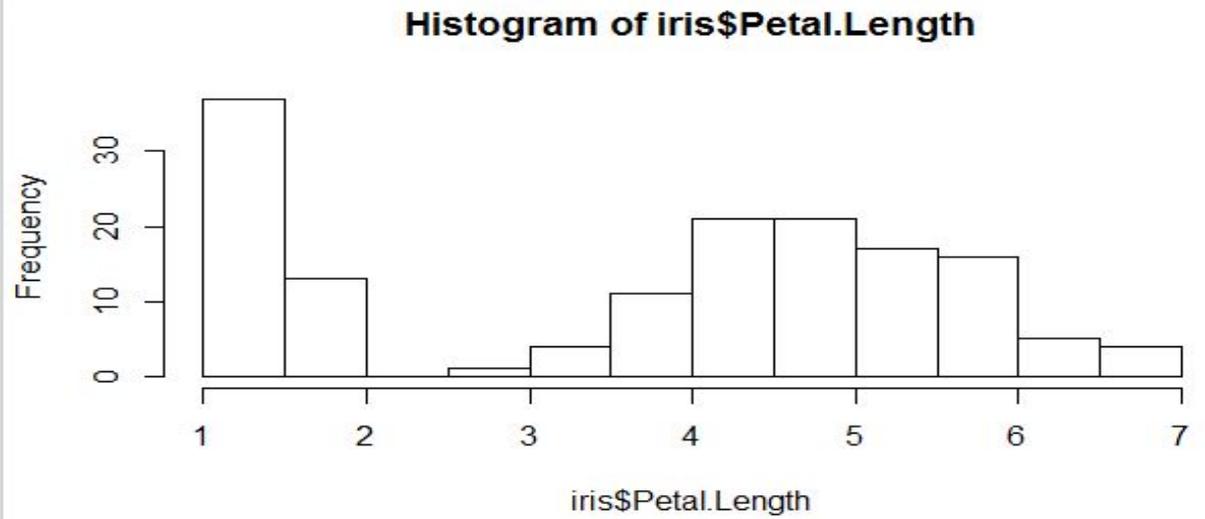
`sf.test(x)`

Shapiro-Francia normality test

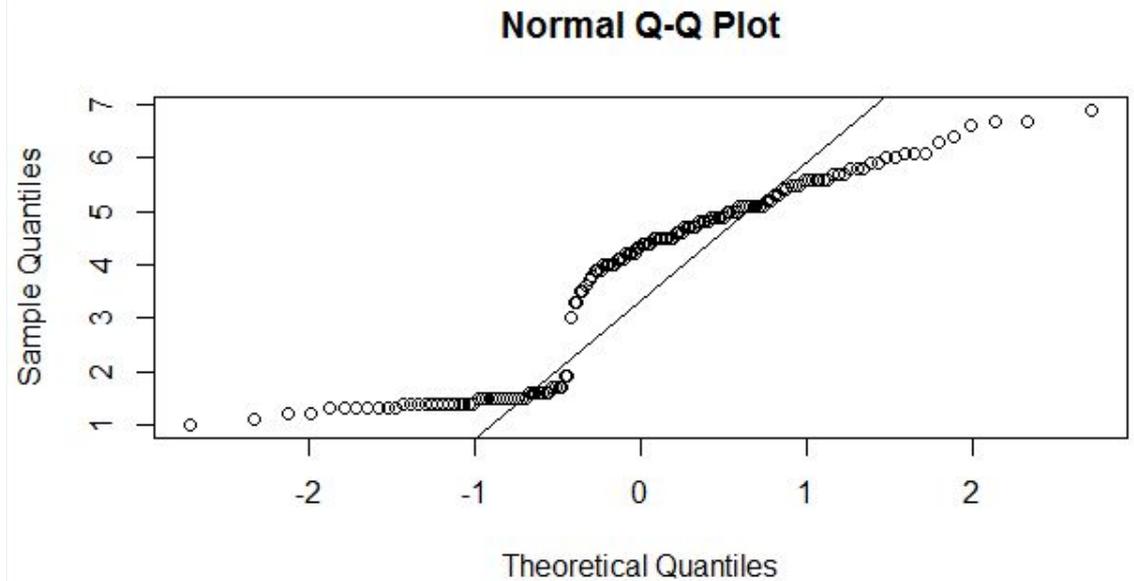
data: x

W = 0.8936, p-value = 3.617e-06

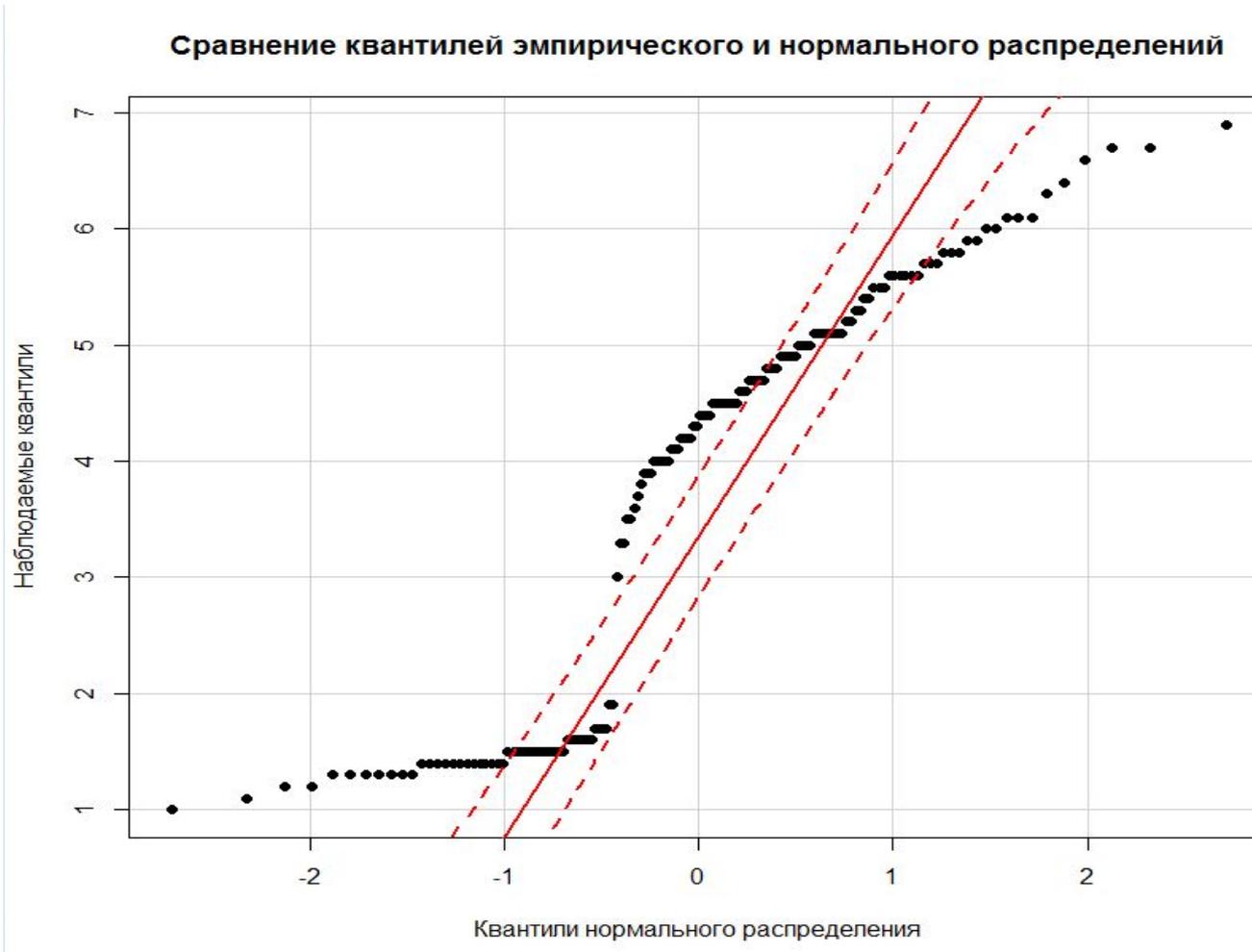
```
> hist(iris$Petal.Length)
```



```
> qqnorm(iris$Petal.Length)  
> qqline(iris$Petal.Length)
```

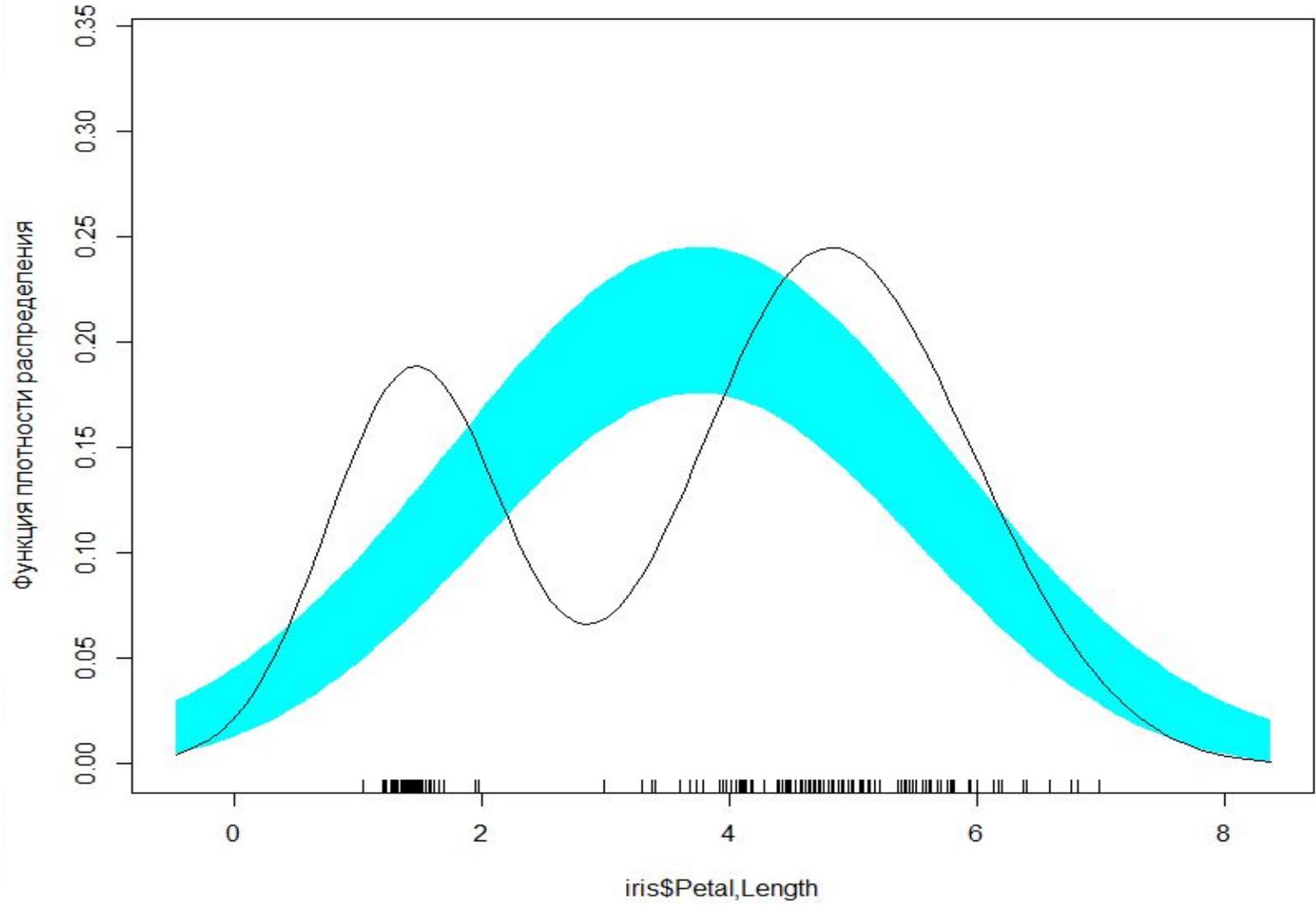


```
> library(car)
> qqPlot(iris$Petal.Length, dist= "norm", col=palette()[1] , pch=19,
+ xlab="Квантили нормального распределения",
+ ylab="Наблюдаемые квантили",
+ main="Сравнение квантилей эмпирического и нормального распределений")
```



```
> library(sm)
```

```
> sm.density(iris$Petal.Length, model = "Normal", xlab="iris$Petal.Length", ylab="Функция плотности распределения")
```

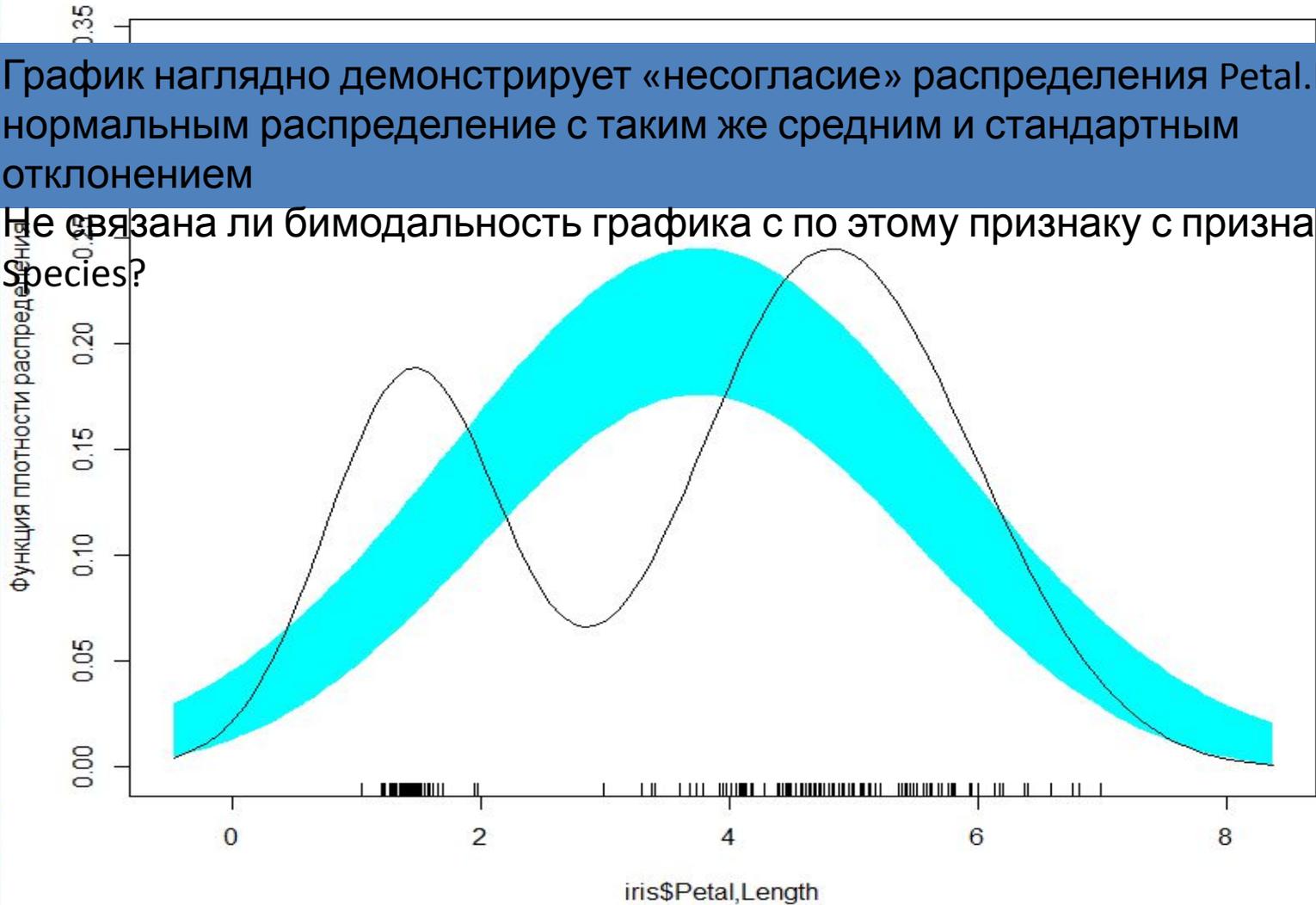


```
> library(sm)
```

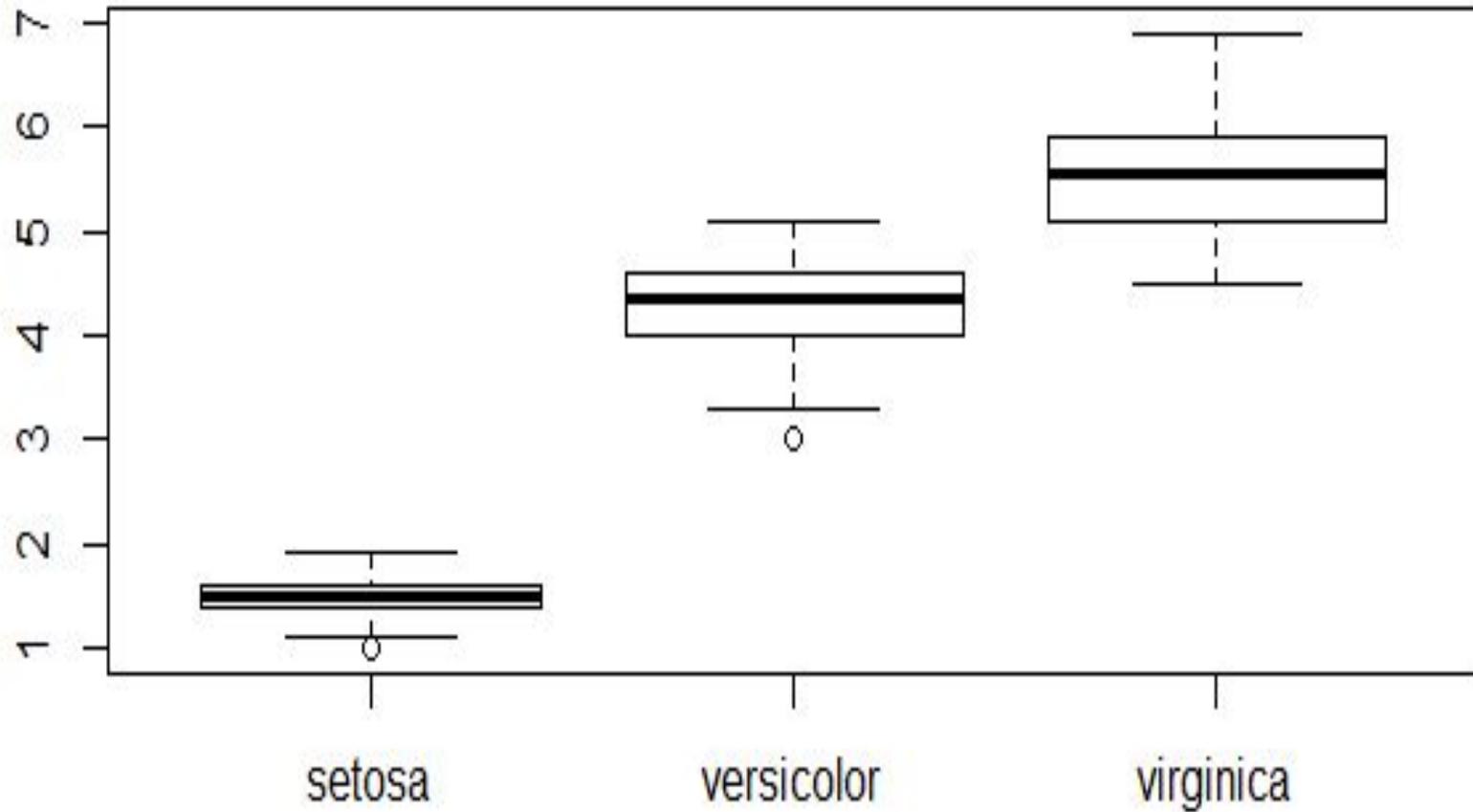
```
> sm.density(iris$Petal.Length, model = "Normal", xlab="iris$Petal.Length", ylab="Функция  
плотности распределения")
```

График наглядно демонстрирует «несогласие» распределения Petal.Length с нормальным распределением с таким же средним и стандартным отклонением

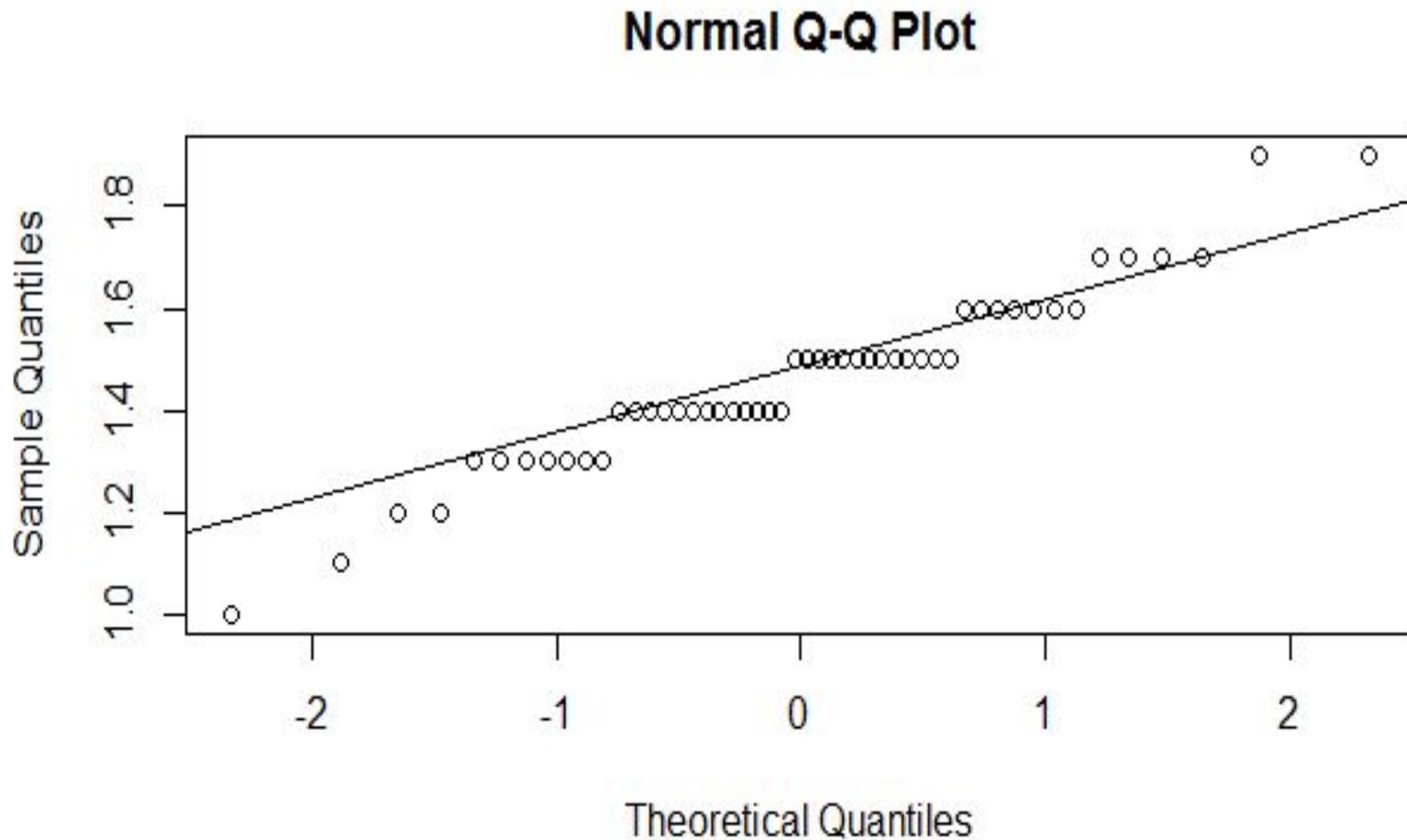
Не связана ли бимодальность графика с по этому признаку с признаком Species?



```
> boxplot(iris$Petal.Length~iris$Species)
```

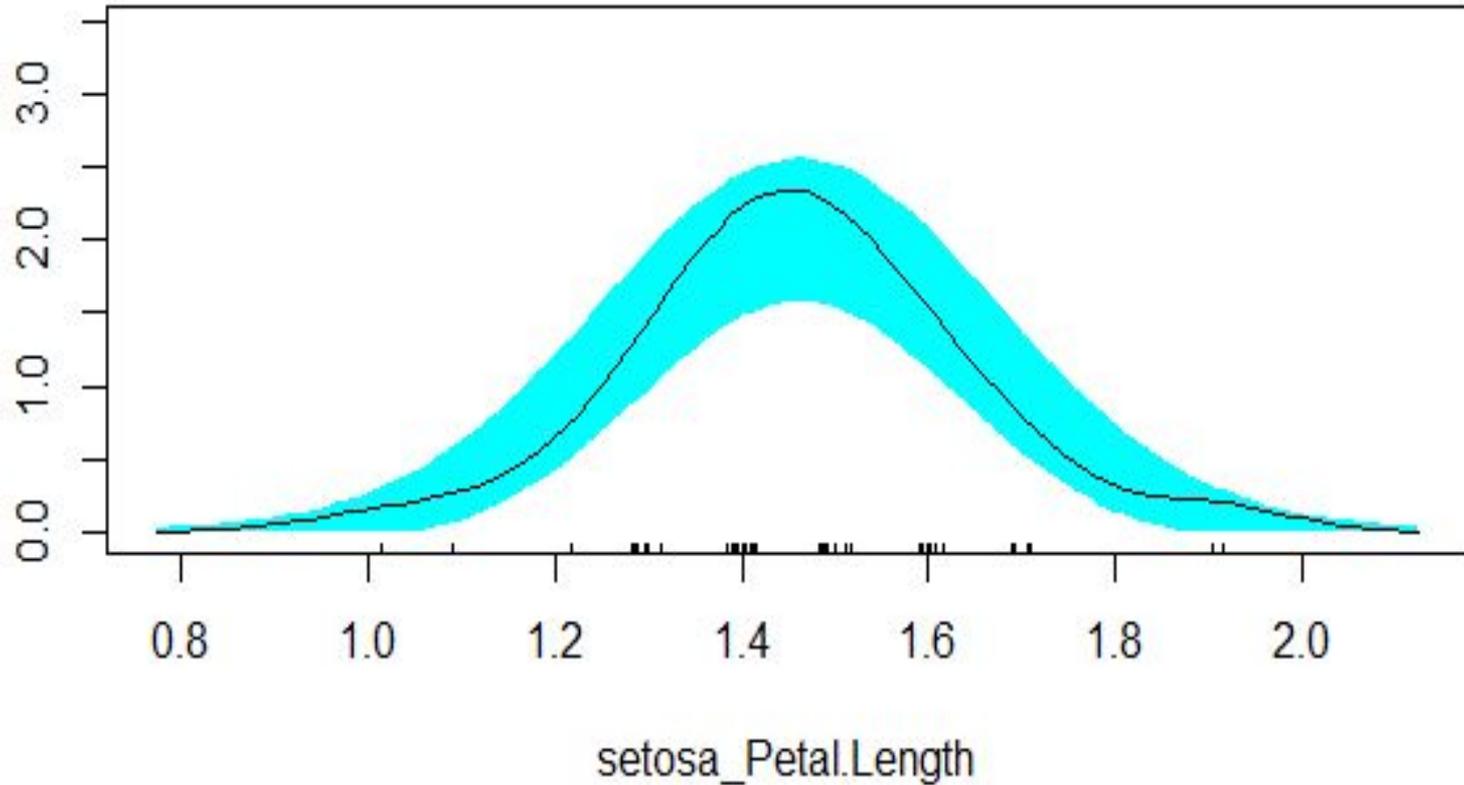


```
> setosa<-subset(iris, iris$Species=="setosa")$Petal.Length  
> qqnorm(setosa)  
> qqline(setosa)
```

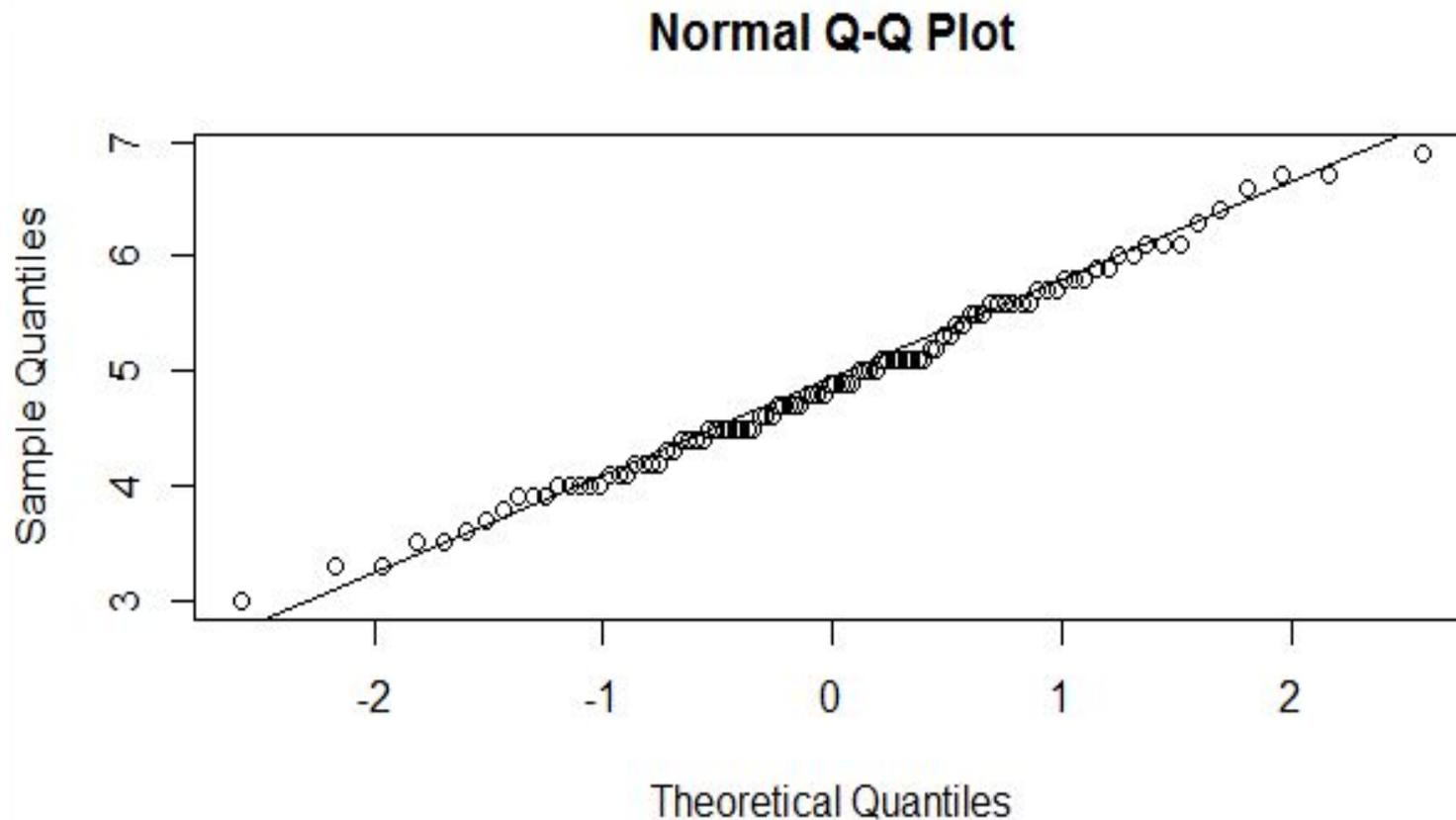


```
> sm.density(setosa, model = "Normal", xlab="setosa_Petal.Length",  
+ ylab="Функция плотности распределения")
```

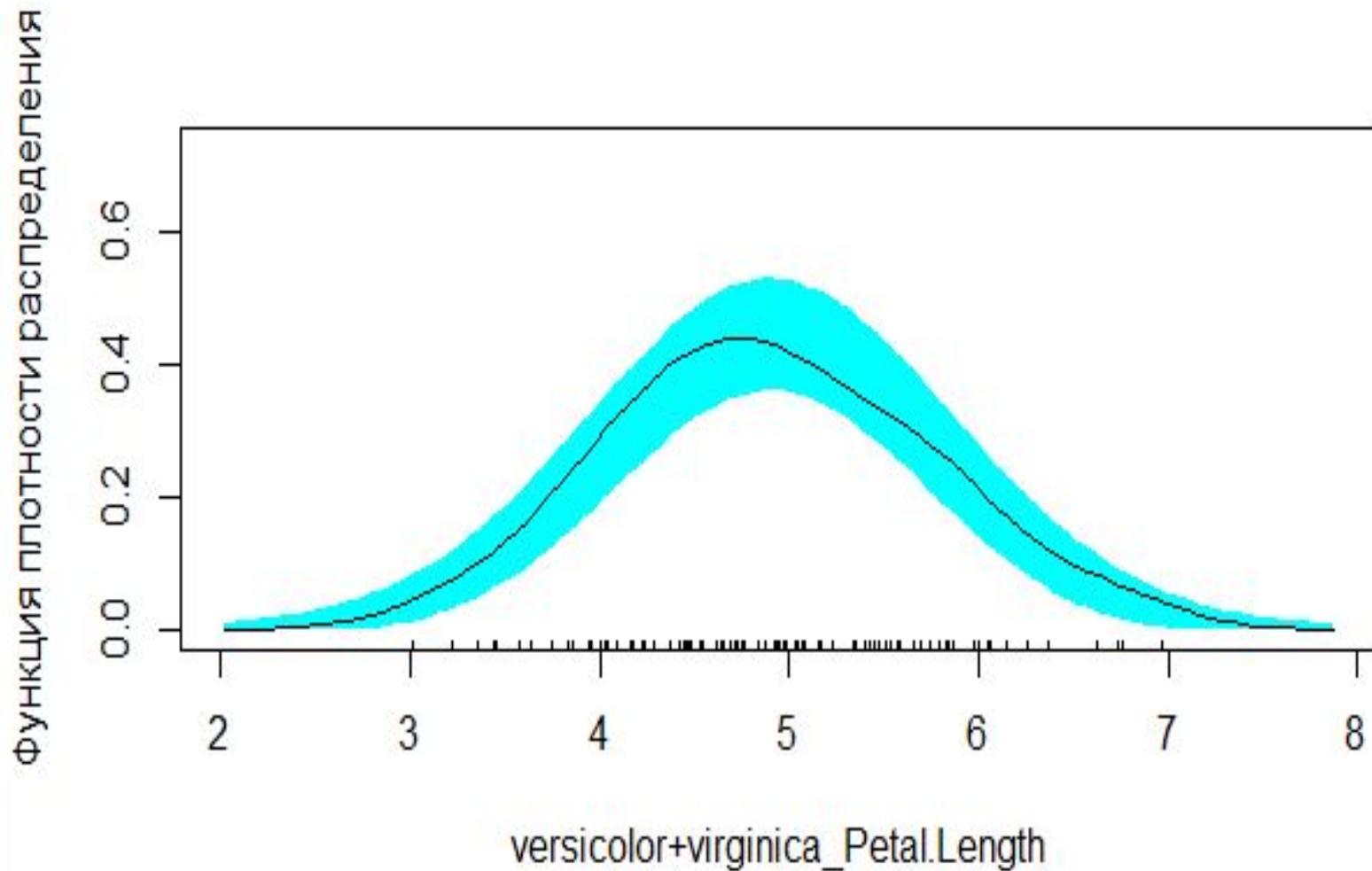
Функция плотности распределения



```
> versicolor<-subset(iris, iris$Species=="versicolor")$Petal.Length  
> virginica<-subset(iris, iris$Species=="virginica")$Petal.Length  
> ver_vir<-c(versicolor,virginica)  
> qqnorm(ver_vir)  
> qqline(ver_vir)
```

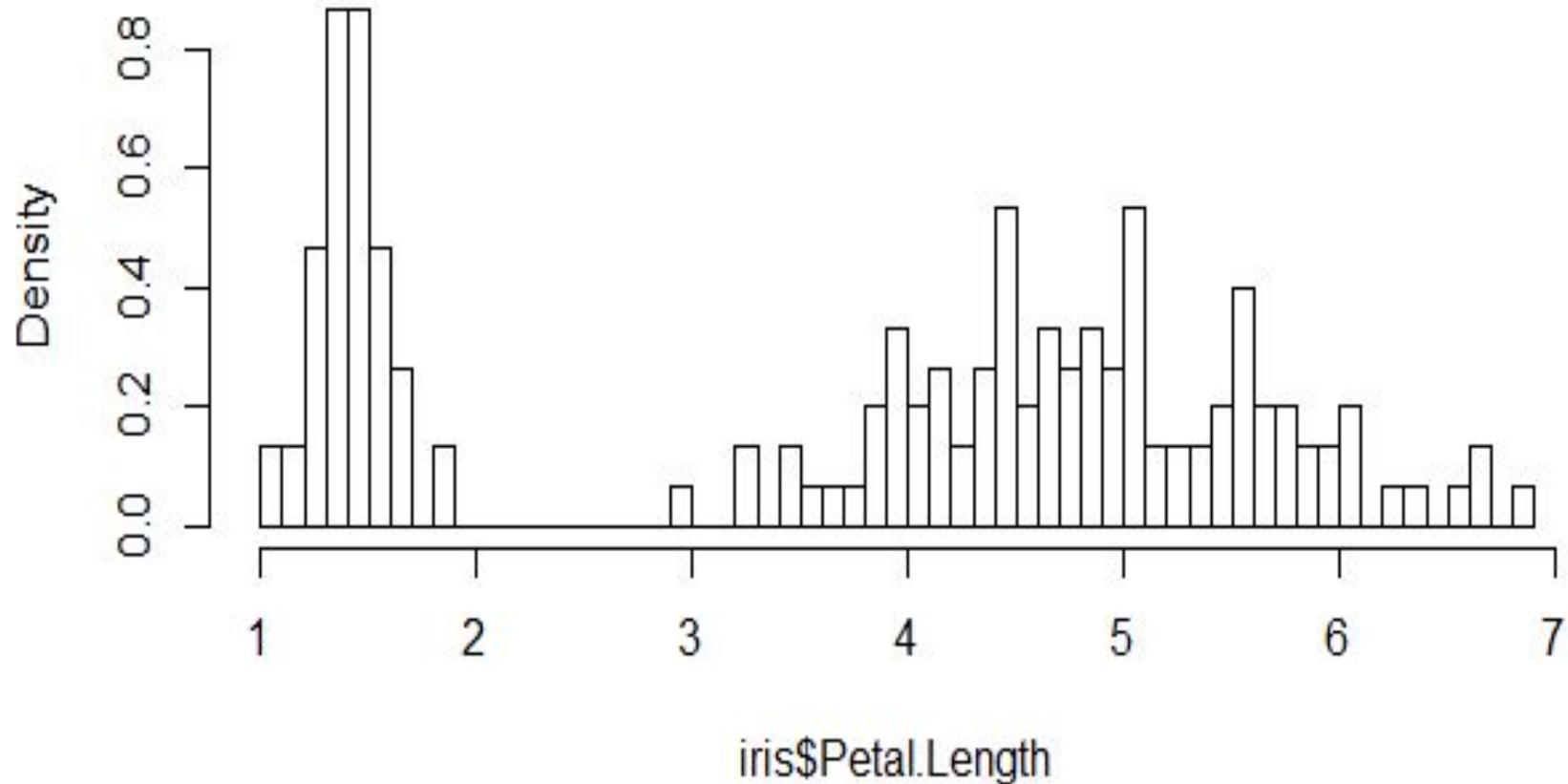


```
> sm.density(ver_vir, model = "Normal", xlab="versicolor+virginica_Petal.Length",  
+ ylab="Функция плотности распределения")
```



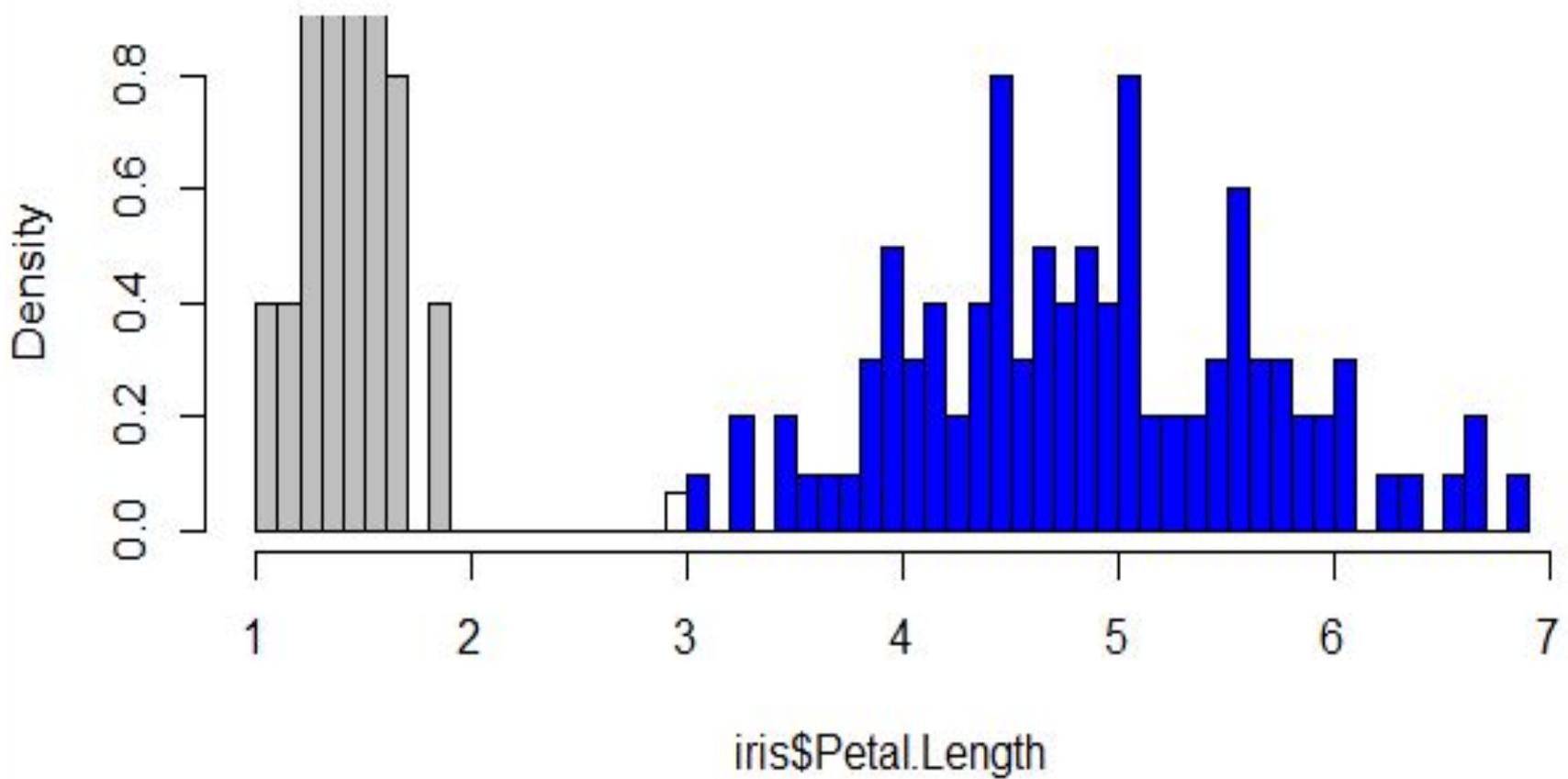
```
> hist(iris$Petal.Length, breaks=50, freq=F)
```

Histogram of iris\$Petal.Length



```
> hist(setosa, breaks=8, freq=F, col="grey", add=T )  
> hist(ver_vir, breaks=50, freq=F, col="blue", add=T )
```

Histogram of iris\$Petal.Length



```
> boxplot(iris$Petal.Length,setosa,ver_vir)  
> legend("top",c("1-iris,2-setosa,3-ver+vir"))
```

