Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «Программное обеспечение»

Курс «Дискретная математика»

Тема «Элементы комбинаторики»

Автор Макарова О.Л.,

Ижевск
2013

Вопросы

- **Проблемы комбинаторики**
- **Два правила комбинаторики**
- **Модельные задачи комбинаторики**

  Функции, размещения, слова
- **Задачи с ограничениями**
  1. Перестановки
  2. Сочетания
  3. Полиномиальные коэффициенты
- **Разбиения**
- **Принцип включений-исключений**
  1. Беспорядок (задача о встречах)
  2. Число сюръективных отображений
- **Системы представителей множеств**

Немного истории

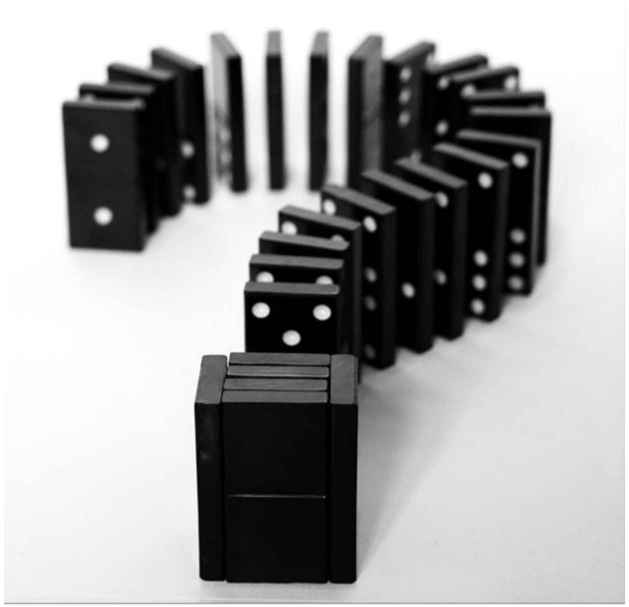
2200 г. до н.э. китайский император ЮИ наблюдал магический узор волшебной черепахи…

В современной интерпретации это есть магический квадрат.

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Сумма чисел в каждом ряду равна 15

Немного истории



- a
- b
- c
- d

Существуют ли другие магические квадраты?

Сколько существует магических квадратов?

Существуют ли магические квадраты другой размерности?

Если «да», то ***сколько существует*** таких квадратов?

Магические квадраты размером 2 х 2 ***не существуют***!

Немного истории

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о количестве различных конфигураций (комбинаций), подчиненных тем или иным условиям, которые можно составить из заданных объектов.

Проблемы комбинаторики

- *Первая проблема – проблема пересчета*

  подсчитать число комбинаций из заданных элементов, подчиненных условиям задачи

- *Вторая проблема – проблема перечисления*

  перечислить все комбинации из заданных элементов, подчиненных условиям задачи

Проблемы комбинаторики

Задачи, решающие проблемы комбинаторики

1. Задача существования комбинаций
2. Оценка числа комбинаций
3. Подсчет числа комбинаций
4. Перечисление комбинаций

   (реализация алгоритма перечисления)
5. Оптимизация алгоритма перечисления

Два правила комбинаторики

- *Правило произведения:*

Если объект A может быть выбран m различными способами и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n различными способами, то выбор двух объектов *«A и B»* в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Два правила комбинаторики

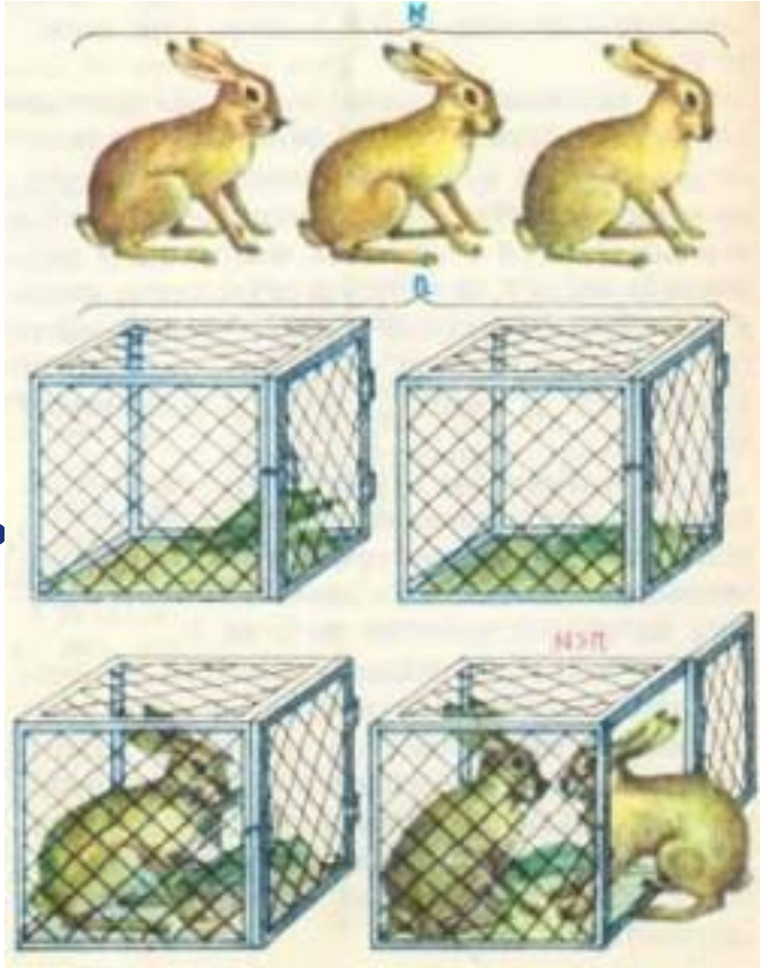
- *Правило суммы:*

Если объект A может быть выбран m различными способами, а объект B может быть выбран другими n различными способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор одного объекта «A или B» может быть осуществлен $(m + n)$ способами.

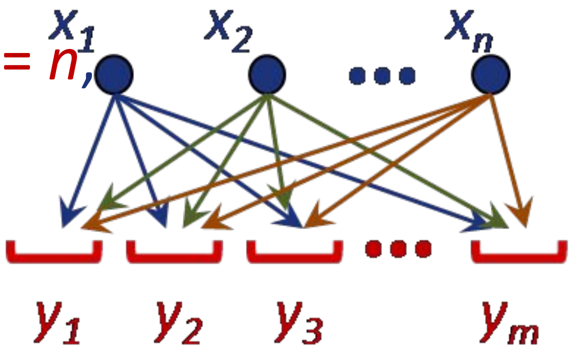
Модельные задачи

I. Классическая задача комбинаторики:

подсчитать число различных размещений *n* объектов по *m* ящикам так, чтобы были выполнены заданные ограничения



Решение:



Пусть X – множество объектов, $|X| = n$,

Y – множество ящиков, $|Y| = m$.

Любое размещение можно описать последовательностью $\langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$,

где y_i – номер ящика с размещенным объектом x_i.

Элемент y_1 может быть выбран m способами,
элемент y_2 может быть выбран m способами,
……………..
элемент y_n может быть выбран m способами.

По *правилу произведения* получаем, что число таких последовательностей равно $\boldsymbol{m^n}$.

Модельные задачи

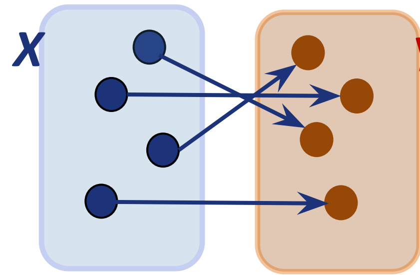
II. Задача о числе функций:

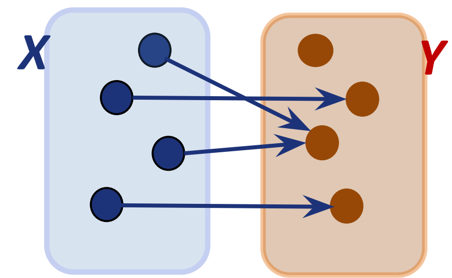
Пусть $f : X \to Y$ – функция,

X , Y – дискретные множества, $|X| = n$, $|Y| = m$

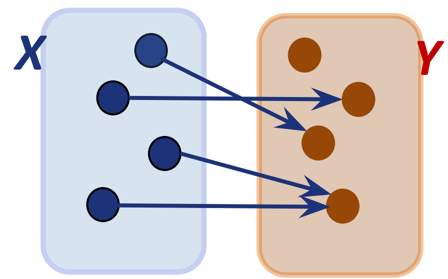
$D(f) = X$, $E(f) \subset Y$

Задача:





подсчитать число таких функций $f : X \to Y$,
(или удовлетворяющих заданным ограничениям)



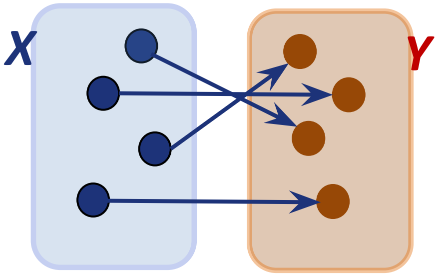
Модельные задачи

- **Утверждение:** задачи I и II эквивалентны

Доказательство:

Любое размещение можно описать последовательностью.

Пусть X – область определения, $|X| = n$,
Y – область значения, $|Y| = m$.
Тогда любая функция задается последовательностью:
$\langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$, где $y_i = f(x_i)$, $i = 1..n$



Т.о. каждой функции соответствует размещение и наоборот.

Задачи эквивалентны.

Модельные задачи

III. Задача о словах:

Пусть $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ – конечный алфавит (множество различных символов), $|Y| = m$

- *Словом* длины n в алфавите $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ называется последовательность $x_1x_2\ldots x_n$, где $x_i \in Y$, $i = 1..n$.

```
ATAACTTCGTATA ATGTATGC TATACGAAGTTAT
ACAACATCCTATT ACACCCTA TATGCCAACATGG

ACAACATCCTATT ACACCCTA AATAGGATGTTGT
ACAACATCGTATA ACACCCTA TATACGATGTTGT
ATAACTTCCTATT ACACCCTA AATAGGAAGTTAT
```

III. Задача о словах:

подсчитать число различных слов длины n в заданном алфавите Y (или удовлетворяющих заданным ограничениям).

Решение:

Пусть $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ – алфавит, $|Y| = m$

Слово есть последовательность $x_1x_2\ldots x_n$, где $x_i \in Y, i = 1..n$ что эквивалентно последовательности $\langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$, где y_i – символ алфавита Y.

Т.о. задача о числе слов эквивалентна задачам I и II .

Значит, число слов длины n в m -алфавите Y равно $\boldsymbol{m^n}$.

Задачи с ограничениями

- Отображение $f : X \to Y$ инъективно $\Leftrightarrow$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- Пусть $x \in \mathbb{R}$. *Нижней n-ой степенью числа x* называется $[x]_n = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot \ldots \cdot (x - n + 1)$ или *n-факториал от x вниз*

❑ **Утверждение 1:** Число инъективных отображений $f : X \to Y$, где

$|X| = n$, $|Y| = m$, равно $[x]_n$.

Решение:

Любое отображение однозначно определяется последовательностью $\langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$, где $y_i = f(x_i)$, $i = 1..n$

Элемент y_1 может быть выбран m способами,
элемент y_2 может быть выбран $(m - 1)$ способами,
……………..
элемент y_n может быть выбран $(m - n + 1)$ способами.

По *правилу произведения* получаем, что число таких последовательностей равно $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - n + 1) = [x]_n$.

Задачи с ограничениями

- **Утверждение 1':** Число размещений n различных объектов по m различным ящикам при условии, что в каждом ящике находится не более одного объекта, равно $[x]_n$.

- **Утверждение 1'':** Число различных слов длины n, в которых все символы различны, в алфавите из m символов равно $[x]_n$.

Перестановки

- *Перестановка* – взаимно-однозначное отображение множества на само себя, т.е. $f : X \to X$

Обозначение: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Краткая запись: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

- **Задача:** Сколько существует перестановок n-элементного множества?

Пример:
Если $X = \{\, 1, 2, 3 \,\}$, то

$$(1\ 2\ 3)\quad (2\ 1\ 3)\quad (3\ 1\ 2)$$
$$(1\ 3\ 2)\quad (2\ 3\ 1)\quad (3\ 2\ 1)$$

- **Утверждение 2:** Число перестановок из n различных элементов равно $P_n = n!$.

Доказательство:

Перестановка – инъективное отображение $f : X \to X$

Т.к. $|X| = n$, то число перестановок равно

$[n]_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

- Произведение $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Называется ***факториалом*** натурального числа n.

Пример: $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$

$P_3 = 6$ $P_4 = 24$ $P_4 = 120$

Двойные факториалы

- *Двойным факториалом* натурального числа *n* называется произведение числа *n* и всех меньших натуральных чисел той же четности.

Пример: $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$

$10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$

Теорема: 1. $(2n)!! = 2^n \cdot n!$

2. $(2n + 1)!! = \dfrac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$

Упорядоченные размещения

Пусть $x \in \mathbb{R}$

- *Верхней* n-ой степенью числа x называется

$[x]^n = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot \ldots \cdot (x + n - 1)$ или n-*факториал от* x

вверх

Свойства:

$[m]_n = (m - n + 1) \cdot [m]_{n+1}$	$[m]^n = (m+n-1) \cdot [m]^{n-1}$
$[m]_n = m! / (m - n)!$	$[m]^n = (m + n - 1)! / (m - 1)!$
$[m]^n = [m + n - 1]_n$	$[m]^n = [m]^{n-1}(m + n - 1)$

Упорядоченнные размещения

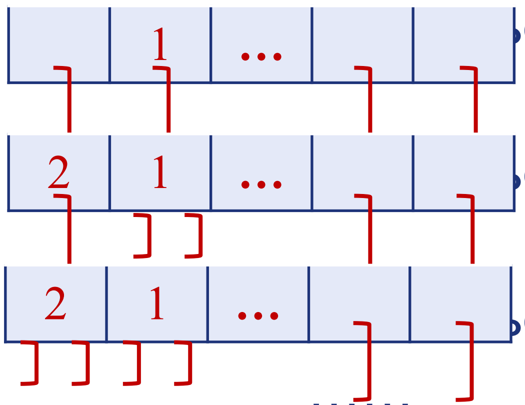
- *Упорядоченное размещение* – размещение n объектов по m ящикам так, что каждый ящик содержит упорядоченную последовательность объектов.
- Два размещения совпадают (равны), если в каждом ящике содержится одна и та же последовательность объектов.
- <u>Пример:</u>
  Пусть $X = \{1, 2\}$ - объекты.
  Упоря… е ра… я по… икам:

1 2	∅	1	2	∅	1 2
2 1	∅	2	1	∅	2 1

- **Утверждение 3:** Число упорядоченных размещений n различных объектов по m ящикам равно $[m]^n = m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot (m+n-1)$.

Доказательство:

Начнем последовательно размещать объекты по m ящикам :



ект можно разместить m способами;

ект можно разместить $(m+1)$ способами;

ект можно разместить $(m+2)$ способами;

……

n-ый объект можно разместить $(m+n-1)$ способом.

По *правилу произведения* получаем, что число таких размещений равно $m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot (m+n-1) = [m]^n$.

Монотонные слова

Пусть $A = \{a_1, \dots ,a_m \}$ – упорядоченный алфавит, т.е.

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

- Слово $x_1x_2 \dots x_n$ длины n называется монотонным, если

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

- <u>Пример:</u>

Пусть $A = \{a, b , c\}$ – алфавит.
Тогда

aa, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *dd* - монотонные слова длины 2;

aaa, *aab*, *abc*, *aad*, *bcd*, *ddd* - монотонные слова длины 3;

aaaa, *aabb*, *abbc*, *aacd*, *bccd* - монотонные слова длины 4.

Утверждение 4: Число монотонных слов длины n в алфавите из m символов равно $[m]^n / n!$.

Доказательство:

Рассмотрим упорядоченное размещение n объектов по m ящикам :

3	2 5 1	6 8	…	9 7 n
a_1	$a_2 a_2 a_2$	$a_3 a_3$		$a_n a_n a_n$

Каждому такому размещению соответствует монотонное слово $a_1 a_2 a_2 a_2 a_3 a_3 \ldots a_n a_n a_n$.

С другой стороны, каждому слову соответствует точно $n!$ различных упорядоченных размещений.

Значит, число монотонных слов длины n в алфавите из m символов равно $[m]^n / n!$.

Монотонные слова

Задача Муавра: Чему равно число способов представления целого положительного числа m как упорядоченной суммы n *неотрицательных* целых чисел $m = u_1 + ... + u_n$.

Решение:

Два представления $m = u_1 + ... + u_n$ и $m = u'_1 + ... + u'_n$ будем считать равными в том и только том случае, если $u_1 = u'_1, \dots, u_n = u'_n$.

Введем частичные суммы σ_k первых k членов последовательности $u_1, ..., u_n$, т.е. $\sigma_k = u_1 + ... + u_k$.

Каждому представлению числа m соответствует единственное слово

$\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$, где $0 \le \sigma_1 \le ... \le \sigma_{n-1} \le m$.

Значит, число представлений m в виде упорядоченной суммы неотрицательных целых слагаемых равно количеству монотонных слов длины $n - 1$ в алфавите из $m + 1$ символа.

Число представлений равно $[m + 1]^{n-1} / (n - 1)!$

Монотонные слова

Задача 1: Небольшой фирме необходимо для работы приобрести 10 компьютеров. В магазине имеется в наличие 4 типа компьютеров. Сколькими способами фирма может купить компьютеры?

Задача 2: Банку было предложено проинвестировать три проекта. На все проекты банком было выделено 10 млн рублей. Сколькими способами эти деньги могут быть разделены между проектами, если выделять на проект можно целое число млн рублей?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ