

Глава 3

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ И МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ

Логическое следствие и проблема дедукции в логике высказываний

$A \models B$ означает, что из A лог. следует B .

Т. 3.1. Если $A \models B$ и $B \models C$, то $A \models C$.

$\models A$ означает, что A - тавтология
(логически общезначима).

Т. 3.2. $A \models B \leftrightarrow \models (A \Rightarrow B)$.

$A_1, A_2, \dots, A_m \models B$

ПРОБЛЕМА ДЕДУКЦИИ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

$$A_1, A_2, \dots, A_m \models B \quad ?$$

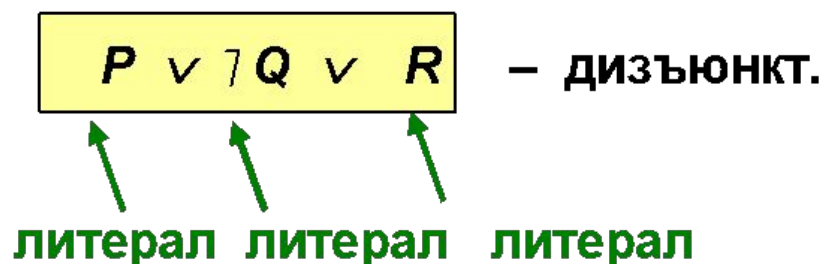
Теорема 3.4. Если формула

$$A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& \neg B$$

является противоречием, то

$$A_1, A_2, \dots, A_m \models B.$$

РЕЗОЛЬВЕНТА ДИЗЪЮНКТОВ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ



P и $\neg P$ контрарные. Пусть в D_1 есть L , а в D_2 – $\neg L$

$R = (D_1 - L) \vee (D_2 - \neg L)$ – бинарная резольвента D_1 и D_2 .

1. Пусть $D_1 = P \vee Q$, $D_2 = \neg P \vee T$, тогда $R = Q \vee T$.

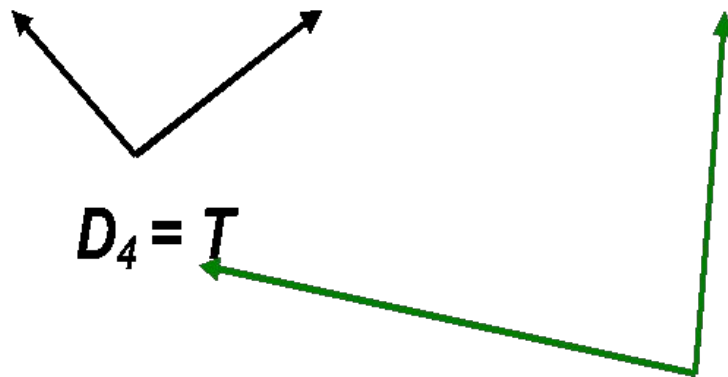
2. Пусть $D_1 = \neg P \vee Q$ ($D_1 = P \Rightarrow Q$),
 $D_2 = \neg Q \vee T$ ($D_2 = Q \Rightarrow T$), $\left. \vphantom{\begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix}} \right\} R = \neg P \vee T$ ($R = P \Rightarrow T$)

Теорема 3.5. Пусть для дизъюнктов D_1 и D_2 существует резольвента R . Тогда R есть логическое следствие из D_1 и D_2 .

МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Метод резолюций: последовательное получение бинарных резольвент из данных дизъюнктов и вновь получаемых дизъюнктов.

$$D_1 = P \vee T, \quad D_2 = \neg P \vee T, \quad D_3 = \neg T.$$



получим пустой дизъюнкт: $\square$.

Теорема 3.6 (полнота метода резолюций). Множество S дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S (имеется в виду, что выводом является применение метода резолюций).

МЕТОД НАСЫЩЕНИЯ УРОВНЯ. $S = \{ D_1, D_2, \dots, D_k \}$. Строим $S^0, S^1, S^2, \dots$

1) $S^0 = S$;

2) если S^{n-1} построено, то $S^n = \{ \text{резольвенты } D_j \text{ и } D_k: j < k : D_j \in (S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^{n-1}), D_k \in S^{n-1} \}, n = 1, 2, \dots$

Пр.: $S = \{ P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \}$.

S^0 : (1) $P \vee Q$;
(2) $\neg P \vee Q$;
(3) $P \vee \neg Q$;
(4) $\neg P \vee \neg Q$;

S^1 : (5) Q из (1) и (2);
(6) P из (1) и (3);
(7) $Q \vee \neg Q$ из (1) и (4);
(8) $P \vee \neg P$ из (1) и (4);
(9) $Q \vee \neg Q$ из (2) и (3);
(10) $P \vee \neg P$ из (2) и (3);
(11) $\neg P$ из (2) и (4);
(12) $\neg Q$ из (3) и (4);

S^2 : (13) $P \vee Q$ из (1) и (7);
(14) $P \vee Q$ из (1) и (8);
(15) $P \vee Q$ из (1) и (9);
(16) $P \vee Q$ из (1) и (10);
(17) Q из (1) и (11);

На 39 шаге получим:

(39) $\square$ из (5) и (12).

СТРАТЕГИЯ ВЫЧЕРКИВАНИЯ

$D^* = D \vee D'$ D^* - наддизъюнктом для D

Строим $(S^0 \vee S^1 \vee \dots \vee S^{n-1})$ находим резольвенты R для
 $D_i \in (S^0 \vee S^1 \vee \dots \vee S^{n-1})$ и $D_k \in S^{n-1}$, $i < k$.
 R записываем, если она не тавтология и не наддизъюнкт существующего дизъюнкта.

S^0 : (1) $P \vee Q$,
(2) $\neg P \vee Q$,
(3) $P \vee \neg Q$,
(4) $\neg P \vee \neg Q$,

S^1 : (5) Q из (1) и (2),
(6) P из (1) и (3),
(7) $\neg P$ из (2) и (4),
(8) $\neg Q$ из (3) и (4),

S^2 : (9) $\square$ из (5) и (8).

ЛОК-РЕЗОЛЮЦИЯ

Рассмотрим: $P \vee Q$, $\neg P \vee Q$. Введем индексы:

$$(1) \quad {}_1 P \vee {}_2 Q,$$

$$(2) \quad {}_3 \neg P \vee {}_4 Q.$$

Получаем лок-резольвенту:

$$(3) \quad {}_2 Q \vee {}_4 Q \sim {}_2 Q.$$

Пример: (1) ${}_1 P \vee {}_2 Q$,

$$(2) \quad {}_3 P \vee {}_4 \neg Q,$$

$$(3) \quad {}_5 \neg P \vee {}_6 Q,$$

$$(4) \quad {}_7 \neg P \vee {}_8 \neg Q.$$

$$(5) \quad {}_2 Q \quad \text{из (1) и (3),}$$

$$(6) \quad {}_2 Q \vee {}_8 \neg Q \quad \text{из (1) и (4).}$$

$$(7) \quad {}_4 \neg Q \vee {}_6 Q \quad \text{из (2) и (3),}$$

$$(8) \quad {}_4 \neg Q \quad \text{из (2) и (4),}$$

$$(9) \quad \square \quad \text{из (5) и (8).}$$

Теорема 3.7. Пусть S - множество дизъюнктов, в котором каждая литера индексирована целым числом. Если S противоречиво, то имеется лок-вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S .

МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ ДЛЯ ХОРНОВСКИХ ДИЗЪЮНКТОВ

Хорновские дизъюнкты: A , $\neg A$, $\neg A \vee \neg C \vee B$, $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D$.

S множество хорновских дизъюнктов без тавтологий.

1. Полагаем, что $S^0 = S$.

2. Пусть S^{n-1} , $n \geq 1$, построено. Выбираем из S^{n-1} D_1 и D_2 :

D_1 - унитарный позитивный дизъюнкт, например, $D_1 = P$;

D_2 - дизъюнкт, содержащий литеру $\neg P$.

Вычисляем резольвенту R для дизъюнктов D_1 и D_2 и

$S^n = (S^{n-1} \setminus \{D_2\}) \cup \{R\}$. Повторяем до тех пор, пока

получим $\square$ либо в S^{n-1} не $\exists D_1$ и D_2 указанных видов.

МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ ДЛЯ ХОРНОВСКИХ ДИЗЪЮНКТОВ.

ПР.: $S = \{ \underline{P \vee \neg Q \vee \neg R}, \underline{T}, \underline{Q}, \underline{R \vee \neg P \vee \neg Q \vee \neg U}, \underline{R \vee \neg T}, \underline{\neg P \vee \neg Q \vee \neg T} \}.$

№ итерац ии	S^n	Дизъюнкты					
0	S^0	$P \vee \neg Q \vee \neg R$	$\neg T$ *	Q	$R \vee \neg P \vee \neg Q \vee \neg U$	$R \vee \neg T$ *	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg T$ *
1	S^1	$P \vee \neg Q \vee \neg R$ *	T	$\neg Q$ *	$R \vee \neg P \vee \neg Q \vee \neg U$ *	R	$\neg P \vee \neg Q$ *
2	S^2	$P \vee \neg R$ *	T	Q	$R \vee \neg P \vee \neg U$	$\neg R$ *	$\neg P$
3	S^3	$\neg P$ *	T	Q	$R \vee \neg P \vee \neg U$	R	$\neg P$ *
4	S^4						$\square$

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕДУКЦИИ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

$$A_1, A_2, \dots, A_m \models B \quad (1)$$

1. Строим формулу: $C = A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& \neg B$ и приводим ее к к.н.ф.:

$$C = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_k.$$

2. Применяем к $S = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ метод резолюций. Если получим пустой дизъюнкт, то (1) имеет место, если пустой дизъюнкт получить нельзя, то (1) не имеет места.

Множество дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ наз-ся невыполнимым если C невыполнима (является противоречием).

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ И ПРОБЛЕМА ДЕДУКЦИИ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

Будем рассматривать только замкнутые формулы логики предикатов.

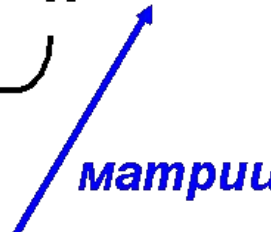
Проблема дедукции логики предикатов:

$$A_1, A_2, \dots, A_m \models B \quad ?$$

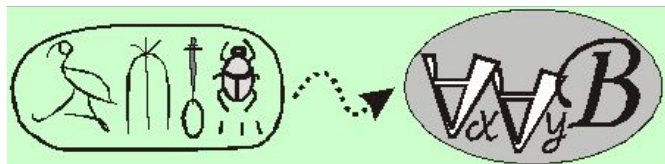
Строим: $C = A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& \neg B$ и приводим ее к предваренной нормальной форме (пренексной нормальной форме):

Пусть $Q_i = \begin{cases} \forall x_i; \\ \exists x_i \end{cases}$

$$C \sim \underbrace{Q_1 Q_2 \dots Q_n}_{\text{префикс}} D$$

 **матрица**

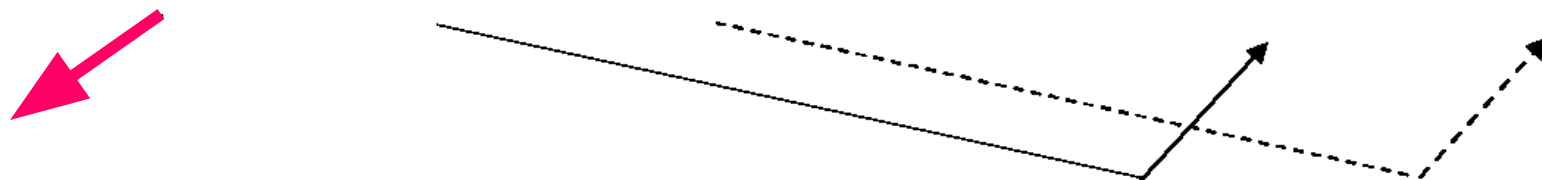
СКОЛЕМОВСКАЯ СТАНДАРТНАЯ ФОРМА



$$A \sim \underbrace{Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n}_{\text{префикс}} D$$

↑
матрица

$$A = \exists x \forall y (P(x, y) \Rightarrow Q(x, a)) \rightarrow A_s = \forall y (P(c, y) \Rightarrow Q(c, a)).$$



$$\exists x \exists y \forall z (P(x, y, z) \Rightarrow Q(a, b, x, y)) \rightarrow$$

→ $\forall z (P(c, d, z) \Rightarrow Q(a, b, c, d)).$

$$A = \forall x \exists y \forall z (P(x, y) \Rightarrow Q(f_1(a), y)).$$

$$A_s = \forall x \forall z (\neg P(x, f_2(x)) \vee Q(f_1(a), f_2(x))).$$

СКОЛЕМОВСКАЯ СТАНДАРТНАЯ ФОРМА

A не всегда $\sim A_s$

Теорема 3.8. Формула A является противоречием т. и т. т., когда её стандартная форма A_s является противоречием.

Сл. 3.1. Если A противоречие, и $A_s = (Q_1, \dots, Q_n)' D_1 \& D_2 \& \dots \& D_m$, то

$$A \sim D_1 \& D_2 \& \dots \& D_m.$$

Сл. 3.2. Пусть A_s – стандартная форма для A и пусть A – противоречие.

Тогда $A_s \sim A$.



ПРОЦЕСС «СКОЛЕМИЗАЦИИ» (ЗАМКНУТОЙ) ФОРМУЛЫ

- а) исходная формула: $B = \exists x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y)) \Rightarrow \neg \exists y \forall x R(x, y);$
- б) переименовываем перемен.: $B = \exists x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y)) \Rightarrow \neg \exists z \forall w R(z, w);$
- в) переносим отрицание: $B = \exists x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y)) \Rightarrow \forall z \exists w \neg R(z, w);$
- г) выносим кванторы за скобки: $B = \forall x \exists y \forall z \exists w ((P(x) \vee \neg Q(y)) \Rightarrow \neg R(z, w));$
- д) приводим матрицу к к.н.ф.:

$$B = \forall x \exists y \forall z \exists w ((\neg P(x) \vee \neg R(z, w)) \& (Q(y) \vee \neg R(z, w)));$$

- е) удаляем кванторы $\exists$, вводя сколемовские функции

$$B = \forall x \forall z ((\neg P(x) \vee \neg R(z, g(x, z))) \& (Q(f(x)) \vee \neg R(z, g(x, z)))).$$

Формула B имеет дизъюнкты:

$$\forall x \forall z (\neg P(x) \vee \neg R(z, g(x, z))) \quad \text{и} \quad \forall x \forall z (Q(f(x)) \vee \neg R(z, g(x, z)))$$

Их записываем в виде:

$$\neg P(x) \vee \neg R(z, g(x, z))$$

и

$$Q(f(x)) \vee \neg R(z, g(x, z)).$$

ДИЗЪЮНКТЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Элементарную формулу или её отрицание называют *литералом* (литерой) в логике предикатов.

Дизъюнктом в логике предикатов считают дизъюнкцию литералов, при этом все переменные связаны кванторами всеобщности.

$$\forall x \forall y \forall z (P(x) \vee \neg Q(c,y) \vee R(z)) \quad - \text{дизъюнкт.}$$


литерал литерал литерал

$P(x)$ и $\neg P(c)$ не являются контрарными, но $P(c)$ и $\neg P(c)$ - контрарные.

Иногда литералы или дизъюнкты называют *клаузами* (clause – предложение, являющееся частью сложного предложения).

ДИЗЬЮНКТ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Дизъюнктом или клаузой в логике предикатов наз. выражение вида:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k (C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n),$$

где C_i , $1 \leq i \leq n$ – литералы, а $x_1, x_2, \dots, x_k$ все переменные встречающиеся в C_i , $1 \leq i \leq n$. При $n = 0$ получим пустой дизъюнкт, который обозначается символом $\square$.

*Дизъюнкт содержит кванторы общности по **всем** переменным из $C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$. Для краткости дизъюнкт пишут без кванторов:*

$$C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$$

УНИФИКАЦИЯ



$$S = \{ \underbrace{P(x, f(y), b)}_{\text{литерал}} \vee \underbrace{P(x, f(a), b)}_{\text{литерал}}, \underbrace{\neg P(c, f(a), b)}_{\text{литерал}} \}$$

ДИЗЪЮНКТ ДИЗЪЮНКТ

Подстановочный частный случай литерала получается при подстановке в литералы термов вместо переменных.

Пусть $L = P(x, f(y), b)$. Тогда:

$$L_1 = P(z, f(w), b),$$

$$L_2 = P(x, f(a), b),$$

$$L_3 = P(g(z), f(a), b).$$

Подстановки:

$$\theta_1 = \{ z/x, w/y \};$$

$$\theta_2 = \{ a/y \};$$

$$\theta_3 = \{ g(z)/x, a/y \};$$

$$L_{\theta_1} = L_1, \quad L_{\theta_3} = L_3, \quad L_{\theta_2} = L_2.$$

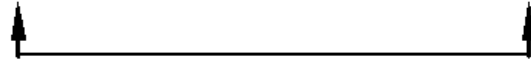
Множество $\{ L_i \}$ литералов **унифицируемо**, если $\exists$ подстановка θ ,

что $(L_1)_\theta = (L_2)_\theta = \dots = (L_n)_\theta$ и θ - **унификатор** для $\{ L_i \}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

- 1) Начинает работу с пустой подстановки ε , если ε унификатор, то завершаем, иначе переходим к 2);
- 2) Пусть на k -ом шаге получена θ_k . Если θ_k – унификатор, то завершаем, иначе строится множество рассогласования.

Пример: $\{ P(a, f(a, g(z)), h(x)), P(a, f(a, u), g(w)) \}$.



$W = \{ g(z), u \}$.

Тогда: $\theta_{k+1} = \theta_k \circ \{ g(z) / u \}$.

Теорема 3.9. Описанный алгоритм находит наиболее общий унификатор для множества унифицируемых литералов и сообщает о неудаче, если литералы неунифицируемы.



МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

Пусть в D_1 есть литера L_1 , в D_2 - литера L_2 .

Если L_1 и $\neg L_2$ имеют унификатор θ , то новый дизъюнкт R :

$$R = ((D_1)_\theta - (L_1)_\theta) \vee ((D_2)_\theta - (L_2)_\theta)$$

называется **бинарной резольвентой** D_1 и D_2 .

Резольвента дизъюнктов D_1 и D_2 :

- 1) бинарная резольвента D_1 и D_2 ,
- 2) бинарная резольвента D_1 и склейки D_2 ,
- 3) бинарная резольвента D_2 и склейки D_1 ,
- 4) бинарная резольвента склейки D_1 и склейки D_2 .

Метод резолюций в логике предикатов: последовательное получение резольвент из заданных дизъюнктов и вновь получаемых дизъюнктов.

Теорема 3.10 (полнота метода резолюций). Множество S дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует вывод пустого дизъюнкта из S .

О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Выбор, в какой последовательности строить резольвенты для множества дизъюнктов S очень важен так как:

- 1) для невыполнимого множества дизъюнктов S можно никогда не завершить процесс построения непустых резольвент;
- 2) если в процессе построения резольвент из S не использовать все дизъюнкты из S , то процесс построения резольвент может завершиться за конечное число шагов без получения пустого дизъюнкта, так как из невыполнимости множества S не следует (в общем случае) невыполнимость части S .

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕДУКЦИИ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

$$A_1, A_2, \dots, A_m \models B \quad (1)$$

1. Строим: $C = A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m \& \neg B$ и приводим ее к предваренной нормальной форме:

$C \sim Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n D$
$\underbrace{\hspace{10em}}$ префикс $\uparrow$ матрица

2. Строим сколемовскую нормальную форму:

$$(Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n)^* D_1 \& D_2 \& \dots \& D_k.$$

3. Применяем к $S = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ метод резолюций. Если получим пустой дизъюнкт, то (1) имеет место, если пустой дизъюнкт получить нельзя, то (1) не выполняется.

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СИЛЛОГИЗМОВ АРИСТОТЕЛЯ

A : Всякий *M* есть *P*

E : Всякий *M* не есть *P*

I : Некоторый *M* есть *P*

O : Некоторый *M* не есть *P*

$\forall x (M(x) \Rightarrow P(x));$

$\forall x (M(x) \Rightarrow \neg P(x));$

$\exists x (M(x) \& P(x));$

$\exists x (M(x) \& \neg P(x)).$

Силлогизм Барбара по 1-ой фигуре: Выяснить следует ли из

$$\forall x (S(x) \Rightarrow P(x)), \quad \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

формула

$$\forall x (S(x) \Rightarrow Q(x)),$$

Если $C = (\forall x (S(x) \Rightarrow P(x))) \& (\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))) \& \neg \forall x (S(x) \Rightarrow Q(x))$

- противоречие, то силл. правильный. Из *C* получим:

1) $\neg S(x) \vee P(x),$

2) $\neg P(y) \vee Q(y),$

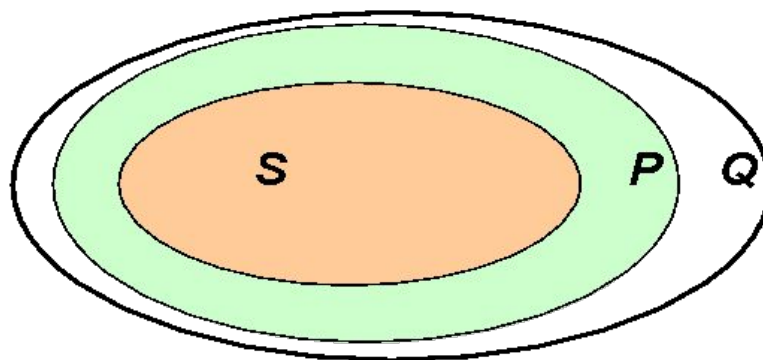
3) $S(a),$

4) $\neg Q(a),$

5) $P(a)$ из 3) и 1),

6) $\neg P(a)$ из 4) и 2),

7) $\square$ из 5) и 6).



Следовательно, силлогизм правильный.

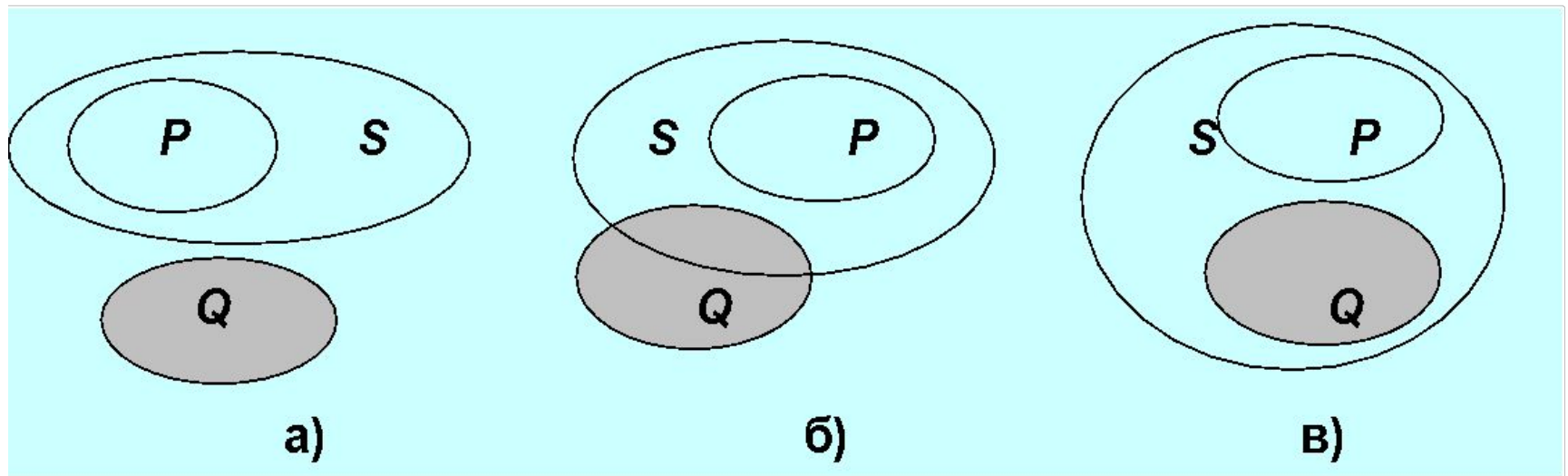
Рассмотрим силлогизм: $\forall x (P(x) \Rightarrow S(x)), \quad \forall x (Q(x) \Rightarrow \neg P(x)),$
.....
 $\forall x (Q(x) \Rightarrow \neg S(x))$.

Преобразовав, получим:

- 1) $\neg P(x) \vee S(x),$
- 2) $\neg Q(y) \vee \neg P(y),$
- 3) $Q(a),$
- 4) $S(a).$
- 5) $\neg P(a)$ из 2) и 3).

Далее:

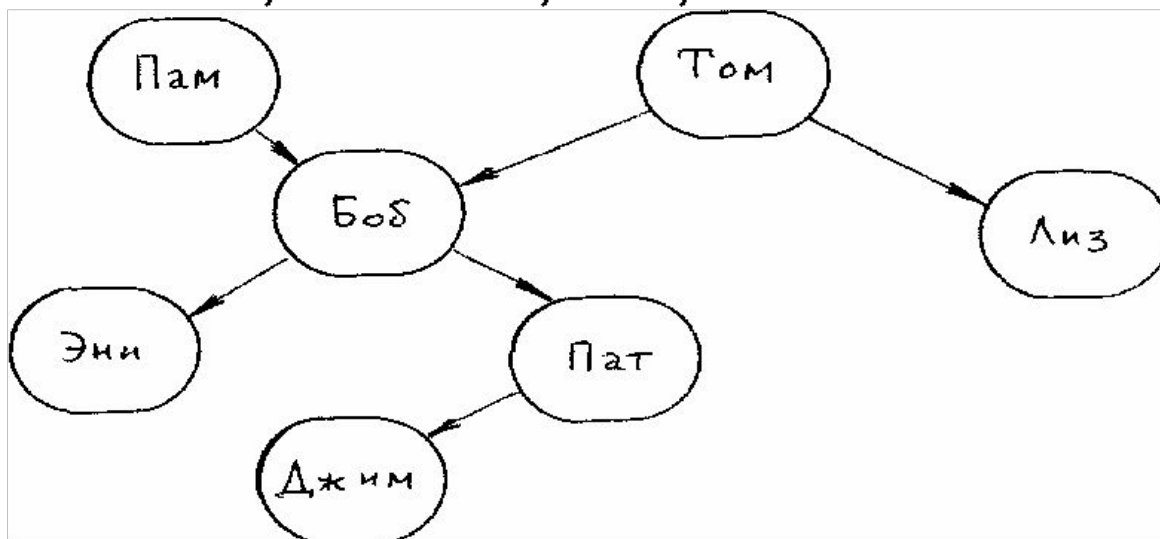
Нельзя получить $\square$, $\rightarrow$ силлогизм не правильный.



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ В ЯЗЫКЕ ПРОЛОГ

Формула Вирта: *Программа := Алгоритм + Структуры данных*

АЛГОЛ, ФОРТРАН, ПАСКАЛЬ, C++ , но не ПРОЛОГ



родитель (пам, боб). (3.1)

родитель (том, боб). (3.2)

родитель (том, Лиз). (3.3)

родитель (боб, эни). (3.4)

родитель (боб, пат). (3.5)

родитель (пат, Джим). (3.6)

СТРУКТУРА ПРОЛОГ ПРОГРАММЫ

domains

/ определение типов данных */*

имя = symbol

predicates

/ определение предикатов */*

родитель (имя, имя)

clauses

/ определение фактов и правил */*

родитель (пам, боб).

родитель (том, боб).

...

родитель (боб, пат).

goal

/ определение цели */*

? - родитель (боб, пат).

Система ответит: YES (да).

ВВЕДЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРАВИЛ В ПРОЛОГЕ

Введем отношение дети.

дети (лиз, том).

дети (боб, пам). ...

Правило:

*Для всех X и Y
 Y дети X , если
 X является родителем для Y .*

дети (Y, X): - родитель (X, Y). (3.20)

Является ли Лиз дитем для Тома: ? - дети (лиз, том).

$\exists$ дети (лиз, том). (3.21)

Из (3.20):

$\exists$ родитель(X, Y) $\vee$ дети(Y, X). (3.22)

Из (3.21) и (3.22) получим: $\exists$ родитель (том, лиз).

Из последнего и (3.12), получим $\square$, следовательно: YES (да).₂₇

Отношение предок:

*Для всех X и Z : X - предок Z ,
если X - родитель Z .*

предок(X, Z): -
родитель(X, Z).

предок(X, Z): -
родитель(X, Y),
родитель(Y, Z).

предок(X, Z): -
родитель(X, Y_1),
родитель(Y_1, Y_2),
родитель(Y_2, Z).

предок(X, Z): -
родитель(X, Y_1),
родитель(Y_1, Y_2),
родитель(Y_2, Y_3),
родитель(Y_3, Z).

Рекурсивное правило:

*Для всех X и Z : X -предок Z , если $\exists Y$, такой, что
(1) X -родитель Y и (2) Y -предок Z .*

предок(X, Z): -
родитель(X, Z).

предок(X, Z): -
родитель(X, Y),
предок(Y, Z).

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРОЛОГА

В ПРОЛОГе имеются (нелогические) операторы, позволяющие управлять решением задачи, отсекая ненужные ветви поиска. Может оказаться, что теряется нужный для дальнейшего дизъюнкт, и процесс поиска может либо не завершиться, либо привести к неправильному результату.

Нужно помнить о неразрешимости логики предикатов. Из этого следует, что для решения некоторой задачи, возможно, не существует разрешающей процедуры и алгоритм, основанный на методе резолюций, не сможет решить рассматриваемую задачу, и будет считать безостановочно.

Считается (принято думать), что задача, сформулированная на некотором языке программирования, должна быть решена компьютером, тогда как имеются проблемы, для которых нет алгоритмического решения, и которые, таким образом, не могут быть решены компьютером.