

Вычисление площадей  
*фигур*  
с помощью интеграла  
11 класс

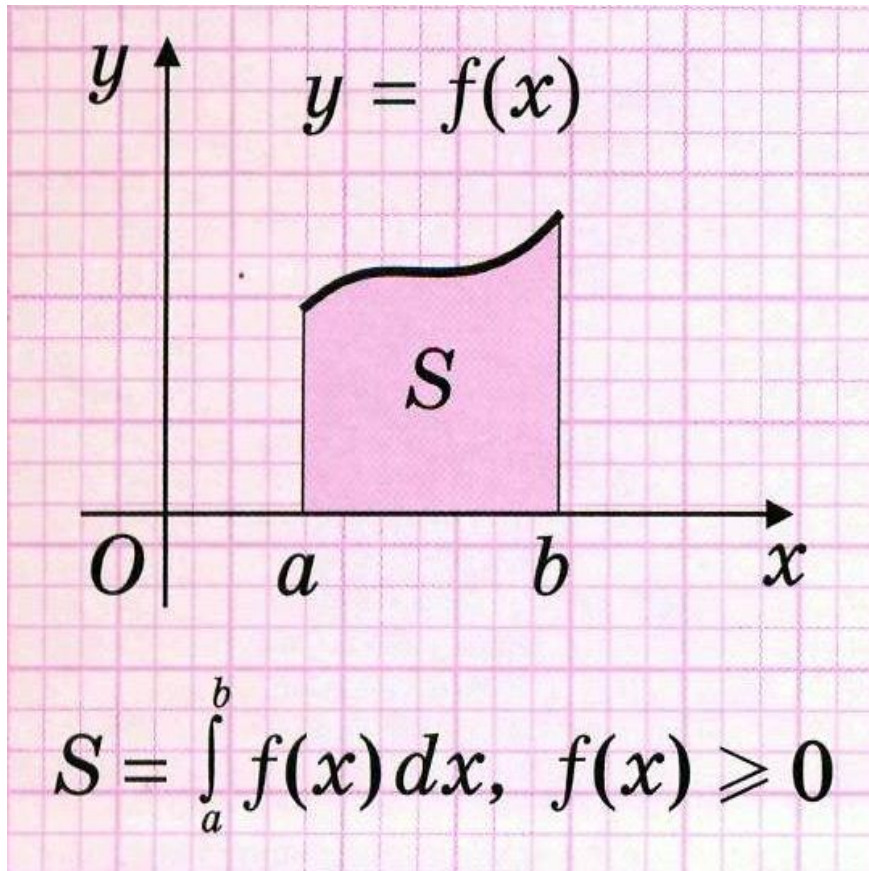
## *Криволинейной трапецией*

называется фигура, ограниченная отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  и графиком непрерывной функции  $y = f(x)$ , такой, что  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a; b]$  и  $f(x) > 0$  при  $x \in (a; b)$ .

Отрезок  $[a; b]$  называется основанием трапеции.

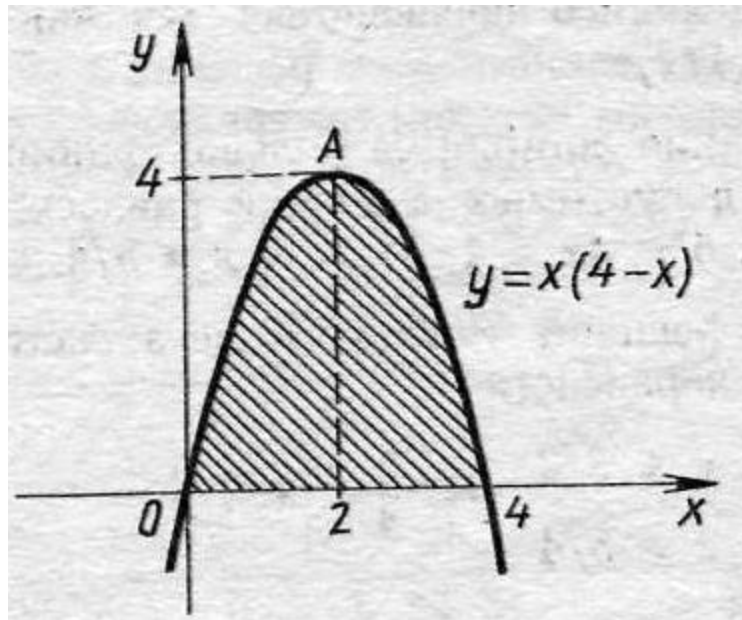
# Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



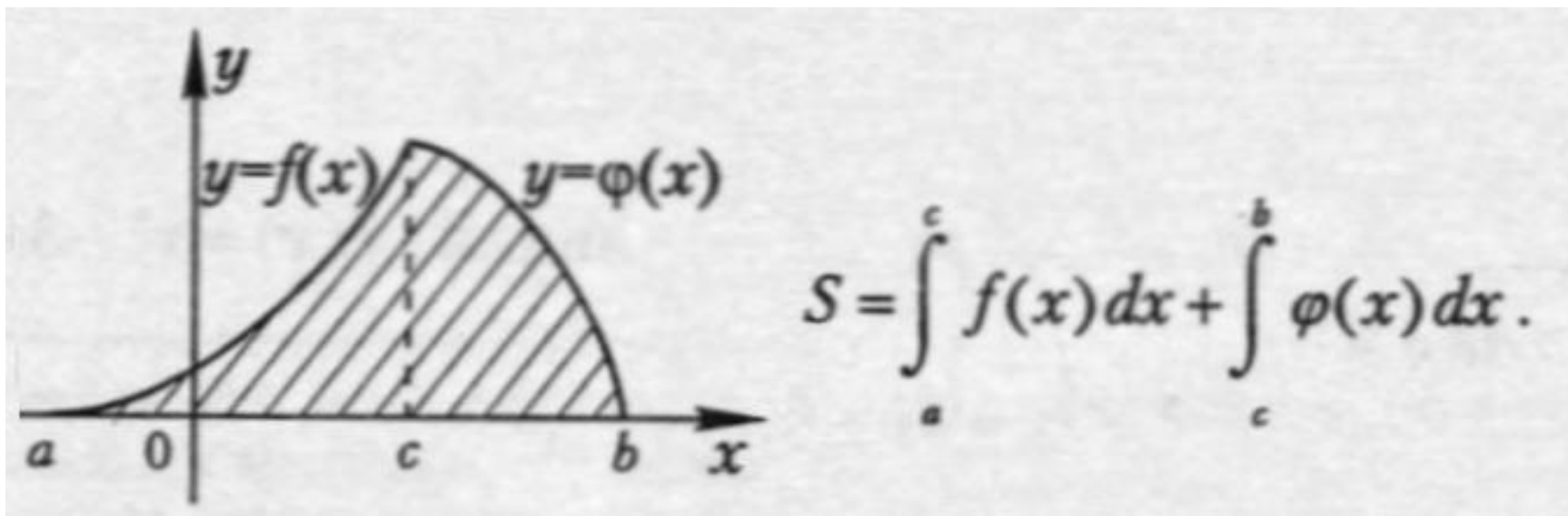
Площадь  
**криволинейн**  
**ой** трапеции

# Вычислить *площадь* криволинейной трапеции

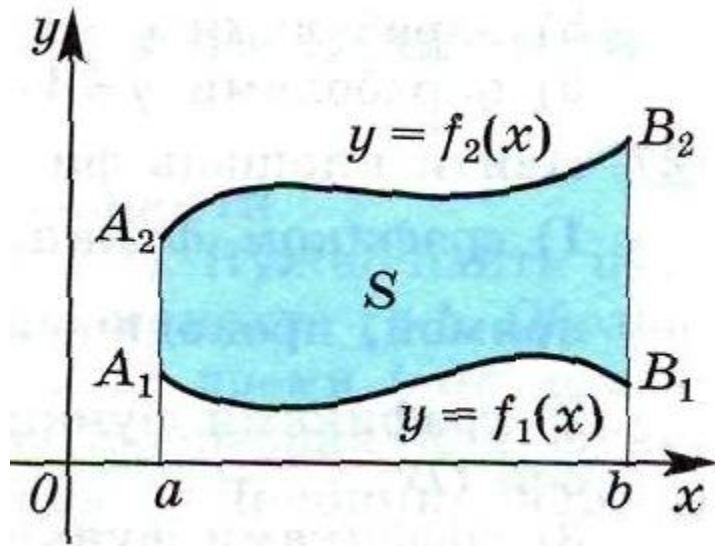


$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 10\frac{2}{3}$$

Площадь фигуры равна  
**сумме** площадей  
криволинейных трапеций



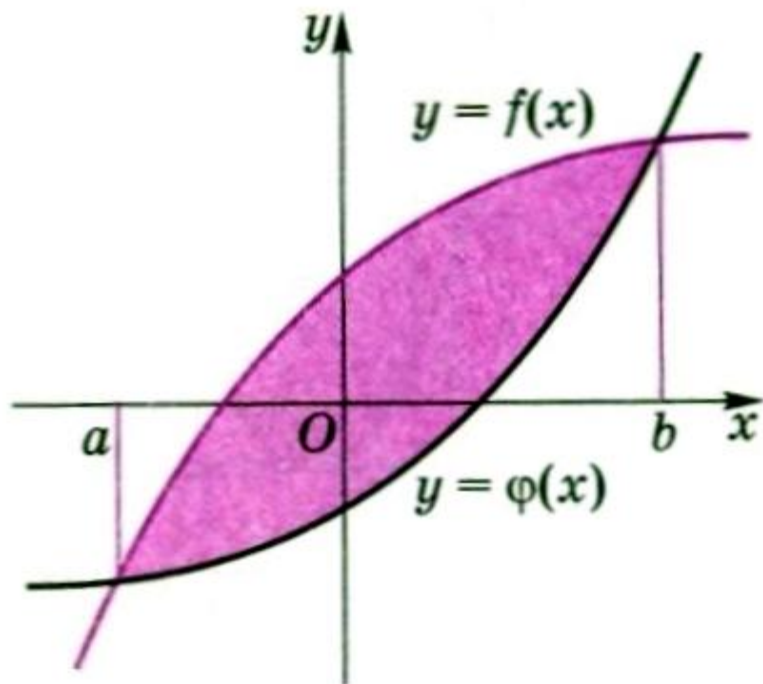
Площадь фигуры равна  
***разности*** площадей  
криволинейных трапеций



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

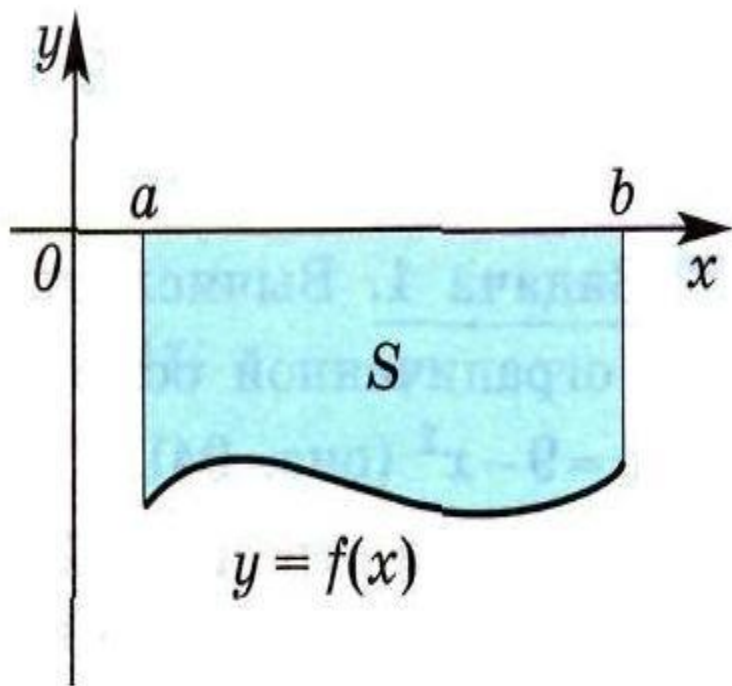
Площадь фигуры вычисляется как ***разность*** площадей криволинейных трапеций на отрезке  $[a;b]$

*Если функции  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a;b]$  и  $f(x) > \varphi(x)$  на  $(a;b)$ , то*



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$

Искомая площадь фигуры равна площади фигуры, *симметричной* данной относительно оси  $Ox$

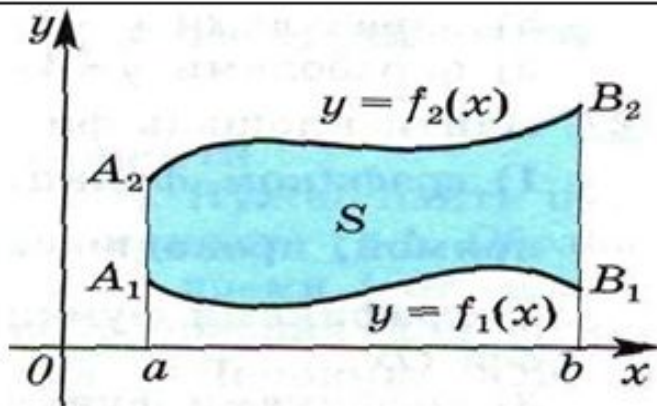
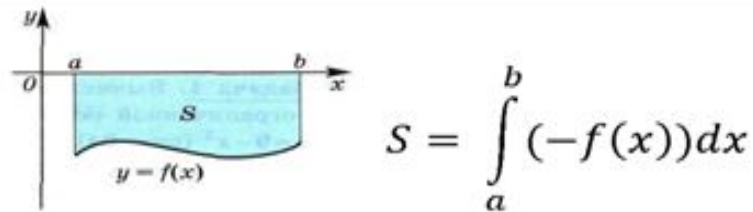
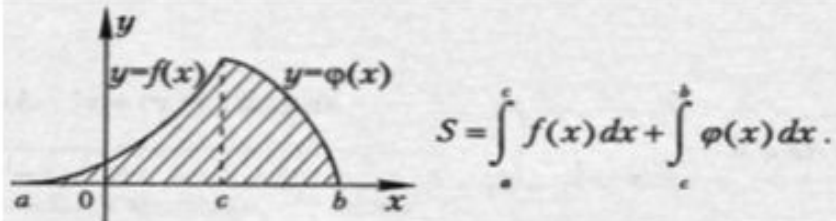


Если  $f(x) \leq 0$  на отрезке  $[a; b]$ , то площадь *криволинейной трапеции* равна

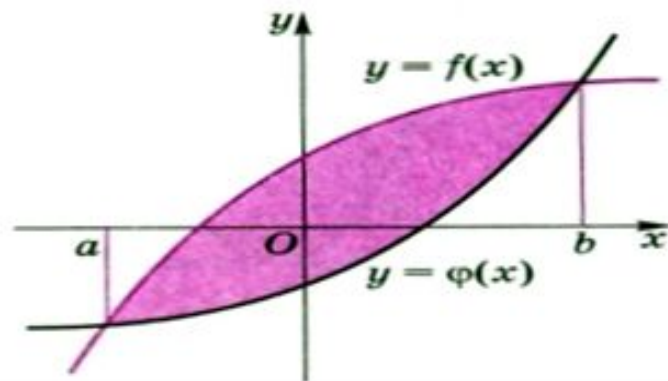
$$S = \int_a^b (-f(x)) dx$$



Нахождение площади фигуры, через площадь криволинейной трапеции

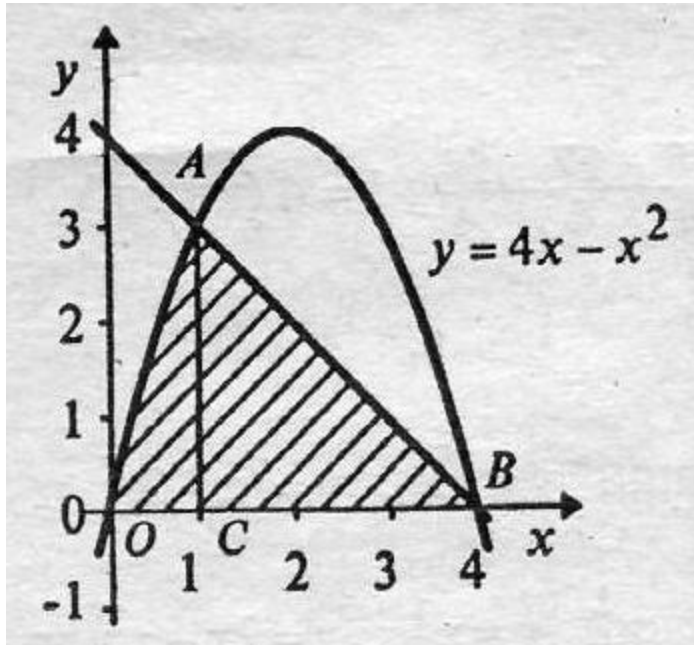


$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 4x - x^2$ , осью  $Ox$  и прямой, проходящей через точки  $(4;0)$  и  $(1;3)$ .



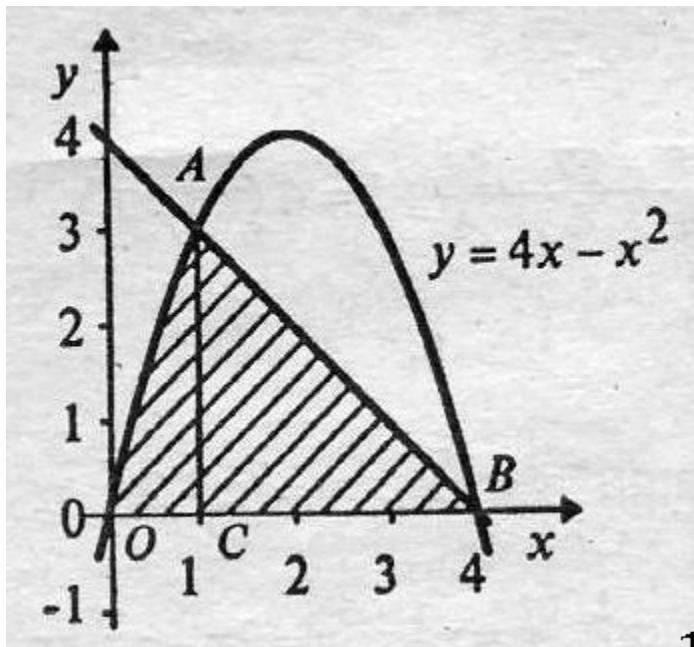
Решение.

*Фигура состоит из криволинейной трапеции и прямоугольного треугольника.*

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{\triangle ACB}$$

$$S_{OAB} = \int_0^1 (4x - x^2) dx + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 6 \frac{1}{6}$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 4x - x^2$ , осью  $Ox$  и прямой, проходящей через точки  $(4;0)$  и  $(1;3)$ .



*Решение. Подставив в уравнение прямой  $y = kx + b$  координаты заданных точек, получим систему уравнений:*

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 4 + b, \\ 3 = k \cdot 1 + b. \end{cases}$$

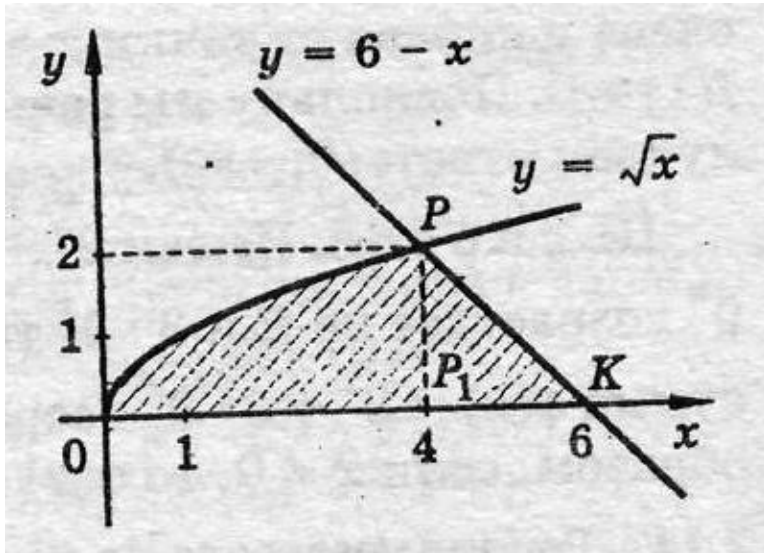
*откуда найдём  $k = -1$ ,  $b = 4$ .*

*Уравнение прямой  $AB$ :  $y = 4 - x$ .*

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{\Delta ACB}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^1 (4x - x^2) dx + \int_1^4 (4 - x) dx = 6 \frac{1}{6}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 6 - x$ ,  $y = 0$



Решение. Точки пересечения заданных линий:  $O(0;0)$ ,  $K(6;0)$ ,  $P(4;2)$

Фигура состоит из криволинейной трапеции и прямоугольного треугольника.

$$S_{\text{фигуры}} = S_{OPP_1} + S_{\Delta PP_1K}$$

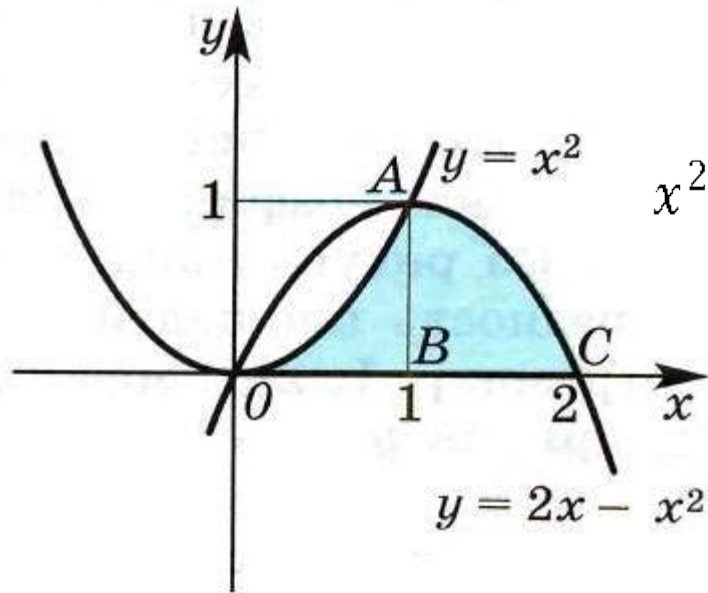
$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^4 \sqrt{x} dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 7\frac{1}{3}$$

**Задача.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2$ ,  $y = 2x - x^2$  и осью  $Ox$ .

*Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения*

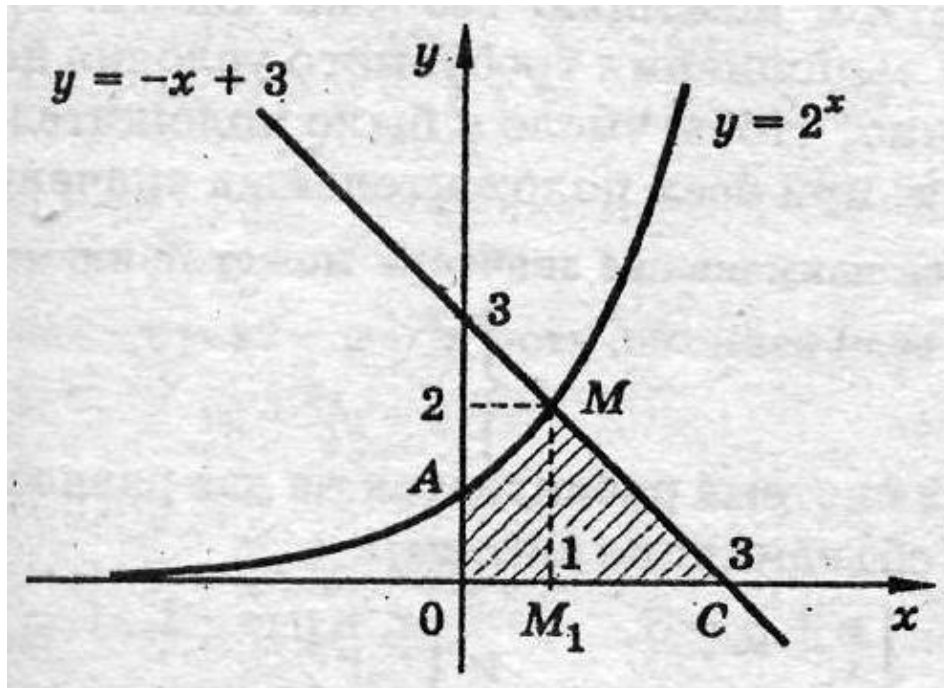
$$x^2 = 2x - x^2 \text{ корни которого } x_1 = 0, x_2 = 1$$

*Искомая площадь равна сумме площадей криволинейных трапеций*



$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = 1$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = 2^x$ ;  $y = -x + 3$  осями абсцисс и ординат.



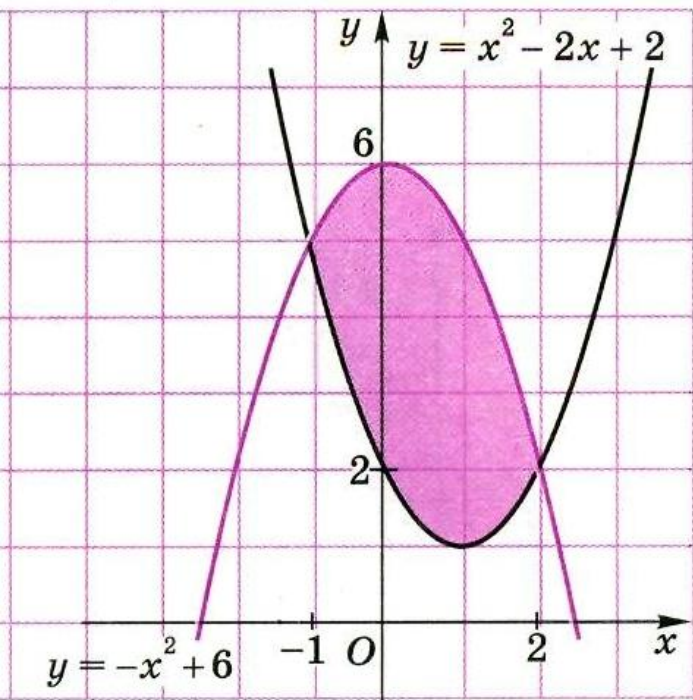
Решение. Функция  $y = 2^x$  возрастает, а  $y = -x + 3$  убывает на  $\mathbf{R}$ , поэтому их графики имеют только одну **общую** точку.

Это точка  $M(1; 2)$

$$S_{\text{фигуры}} = S_{OAMM_1} + S_{\Delta MM_1C}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^1 2^x dx + \frac{1}{2} MM_1 \cdot M_1C = \log_2 e + 2$$

**Задача.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 - 2x + 2$  и  $y = -x^2 + 6$



*Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения*

$$-x^2 + 6 = x^2 - 2x + 2$$

корни которого  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$

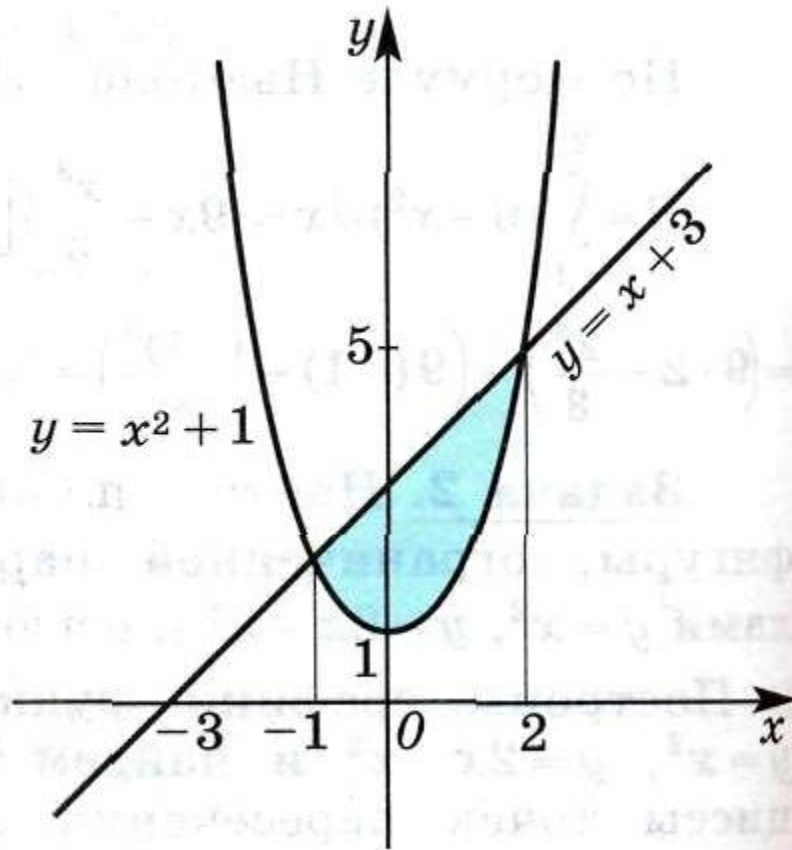
*Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций*

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 ((-x^2 + 6) - (x^2 - 2x + 2)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = 15 - 6 = 9(\text{кв. ед}).$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 + 1$  и  $y = x + 3$



Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

$$x^2 + 1 = x + 3$$

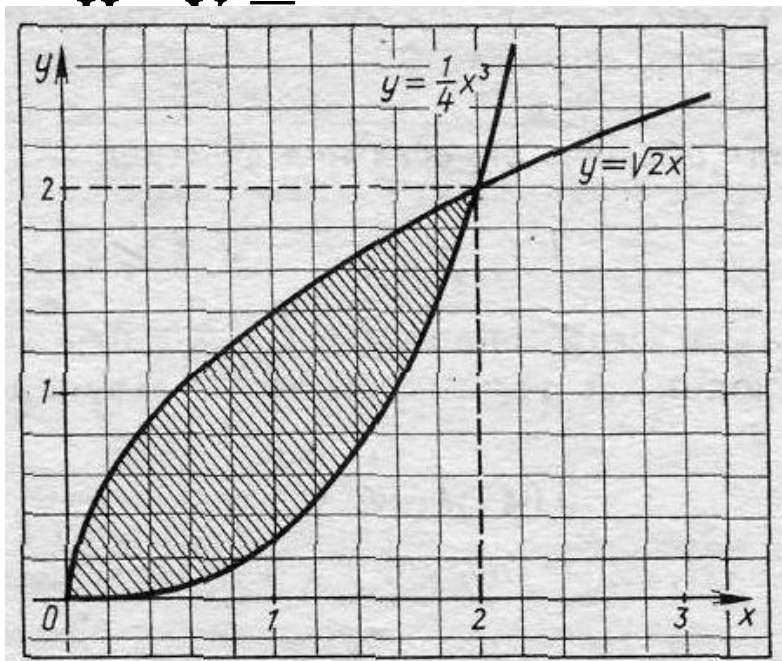
корни которого  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$

Искомая площадь равна разности площадей двух криволинейных трапеций, опирающихся на отрезок  $[-1; 2]$ .

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 ((x + 3) - (x^2 + 1)) dx = 4,5(\text{кв. ед})$$



Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = \frac{1}{4}x^3$  и  $y = \sqrt{2x}$ .



**Решение.** Найдём точки пересечения этих графиков. Их координаты удовлетворяют системе уравнений: 
$$\begin{cases} y = \sqrt{2x}, \\ \frac{1}{4}x^3 = \sqrt{2x} \end{cases}$$

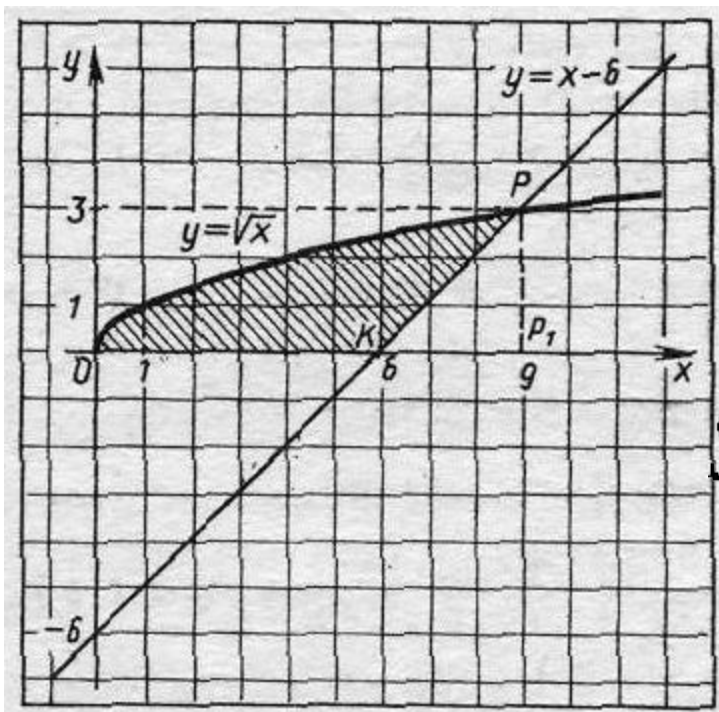
Откуда находим пределы интегрирования, а затем площадь фигуры по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^2 \left( \sqrt{2x} - \frac{x^3}{4} \right) dx = 1 \frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной, линиями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x - 6$ ,  $y = 0$ .

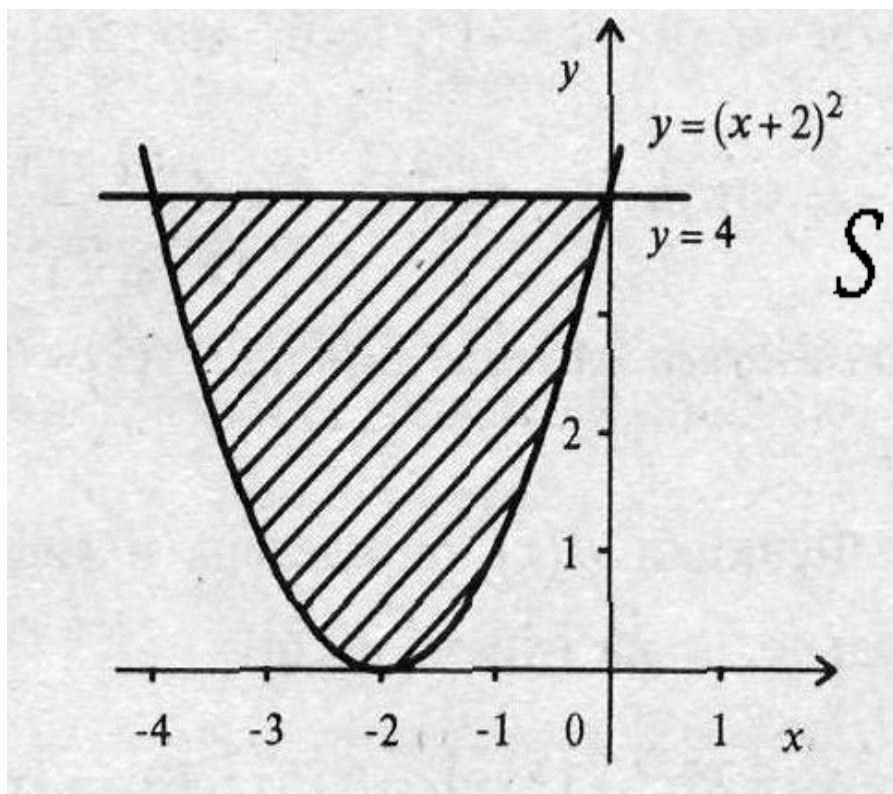
Решение.



$$S_{\text{фигуры}} = S_{OPRP_1} - S_{\Delta KPP_1}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^9 \sqrt{x} dx - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 13,5$$

Задача. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x + 2)^2$  и  $y = 4$

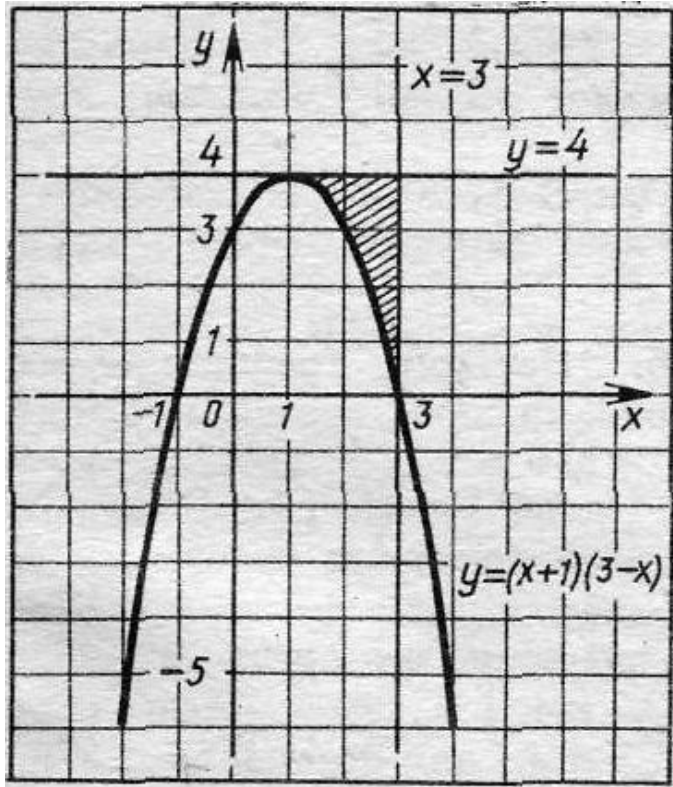


Решение.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

$$S = \int_{-4}^0 (4 - (x + 2)^2) dx = 10 \frac{2}{3}$$

**Задача.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x + 3)(3 - x)$ ,  $y = 4$  и  $x = 3$



**Решение.**

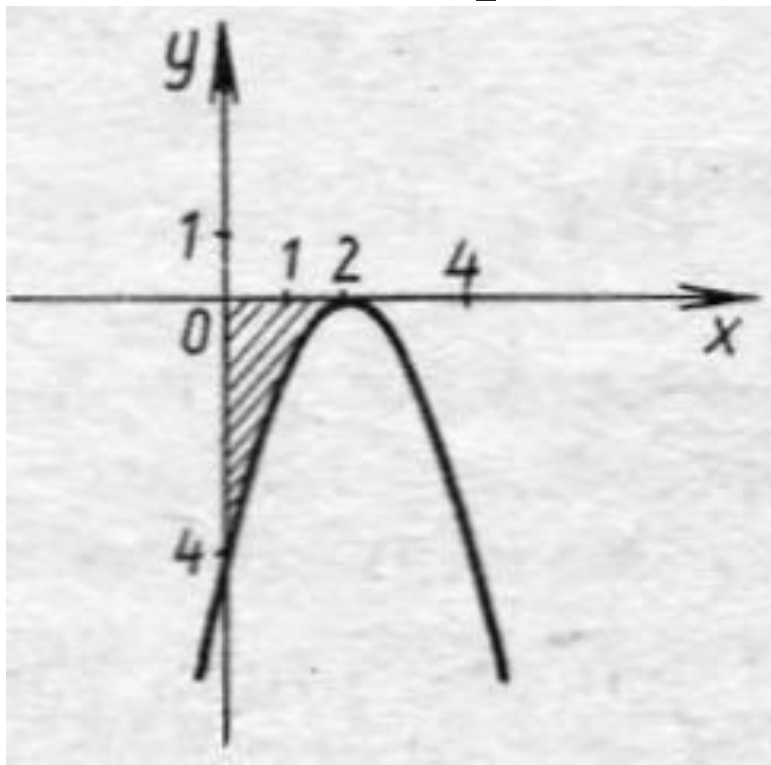
*График функции  $y = (x + 3)(3 - x)$   
или  $y = -x^2 + 2x + 3$*

*Координаты вершины параболы  
 $B(1;4)$*

*Искомая площадь равна разности  
площадей криволинейных трапеций*

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^3 (4 - (-x^2 + 2x + 3)) dx = 2 \frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = -x^2 + 4x - 4$  и осями координат



Решение.

Заданная фигура представляет собой криволинейную трапецию, лежащую «ниже» оси  $Ox$ .

$$S = \int_a^b (-f(x)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^2 (-(-x^2 + 4x - 4)) dx = 2 \frac{2}{3}$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 4x - x^2$  и прямой, проходящей через точки  $(4;0)$  и  $(0;4)$ .

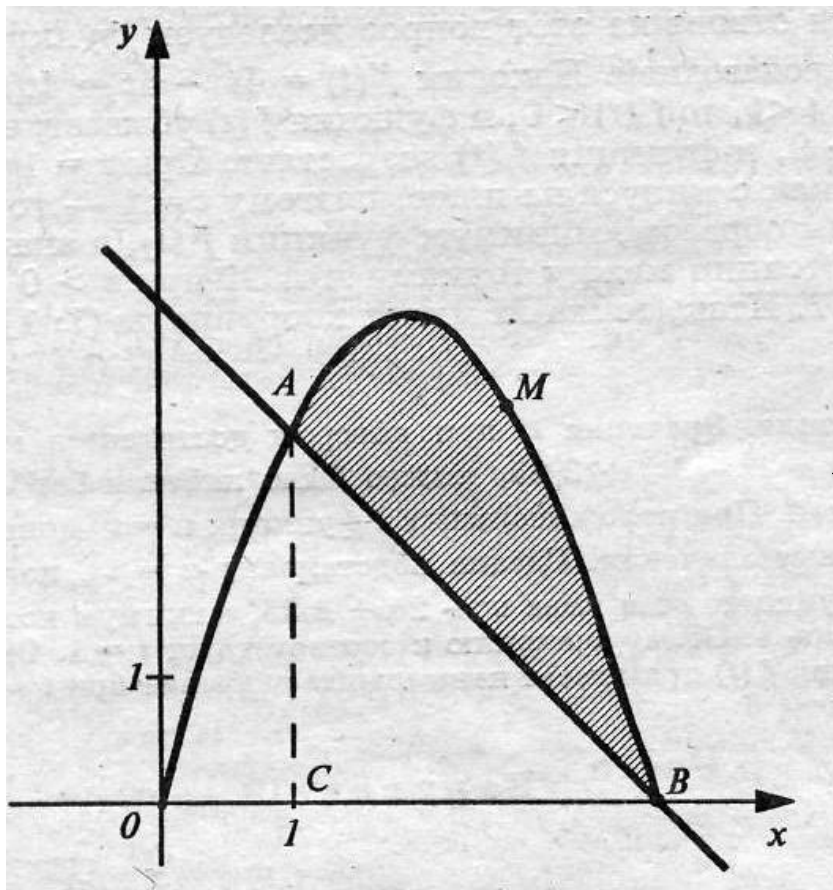
Решение. Первый способ.

$$S_{\text{фигуры}} = S_{AMBC} - S_{\Delta ABC}$$

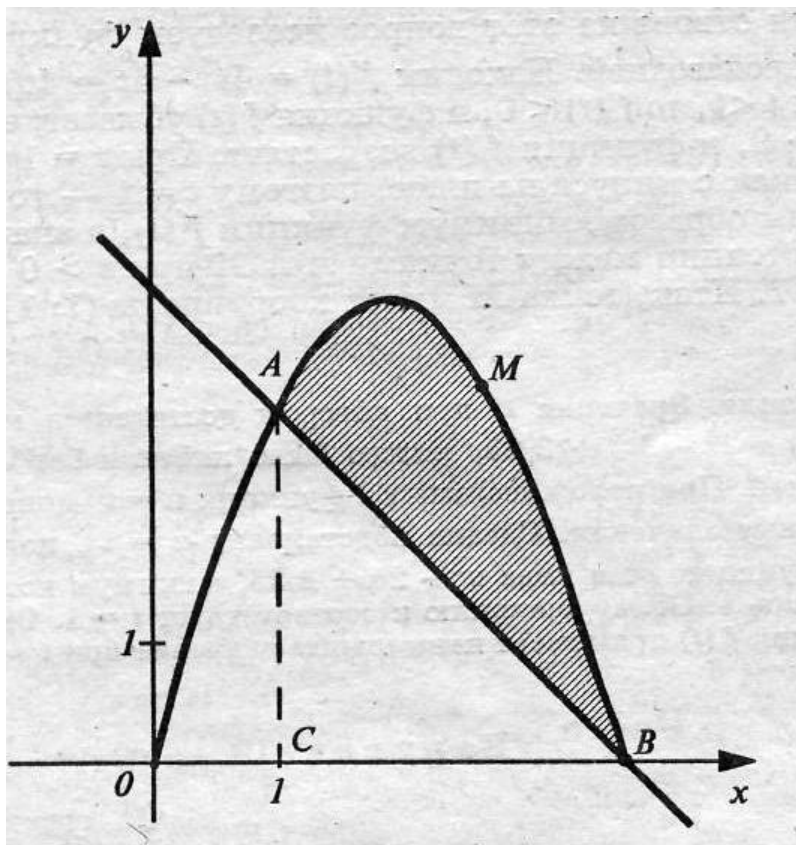
$$S_{AMBC} = \int_1^4 (4x - x^2) dx = 9$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 4,5$$

$$S_{\text{фигуры}} = 9 - 4,5 = 4,5$$



Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 4x - x^2$  и прямой, проходящей через точки  $(4;0)$  и  $(0;4)$ .



Решение. 2 способ.

Подставив в уравнение прямой  $y = kx + b$  координаты заданных точек, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 4 + b, \\ 4 = k \cdot 0 + b \end{cases}$$

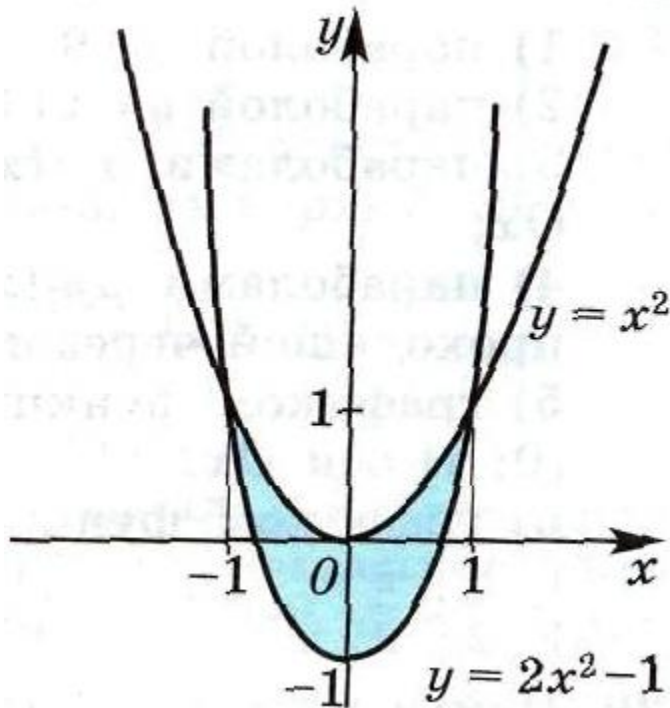
откуда найдём  $k = -1$ ,  $b = 4$ .

Уравнение прямой  $AB$ :  $y = -x + 4$ .

$$S_{\text{фигуры}} = S_{AMBC} - S_{\Delta ABC}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_1^4 ((4x - x^2) - (-x + 4)) dx = 9 - 4,5 = 4,5 \text{ (кв. ед).}$$

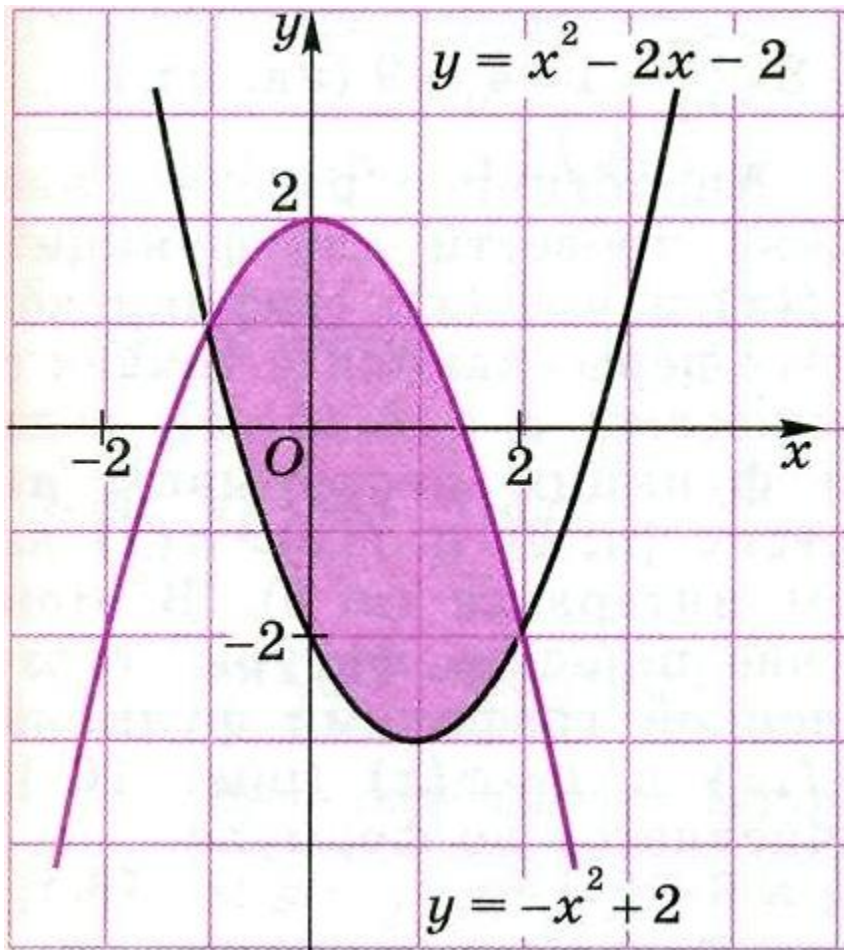
Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и  $y = 2x^2 - 1$



$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1)) dx = \frac{4}{3}$$



Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = -x^2 + 2$  и  $y = x^2 - 2x - 2$



*Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения*

$$-x^2 + 2 = x^2 - 2x - 2$$

корни которого  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$

*Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций*

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 ((x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)) dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 9 \text{ (кв. ед)}$$

По рисункам 31 – 36 назвать из каких фигур состоит фигура, площадь которой вычисляется, и указать пределы интегрирования.

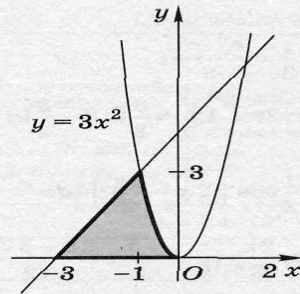


Рис. 31

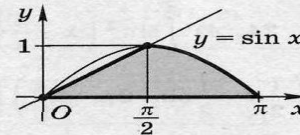


Рис. 32

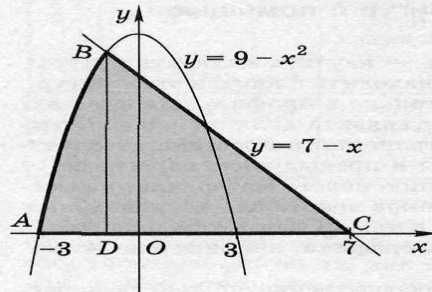


Рис. 33

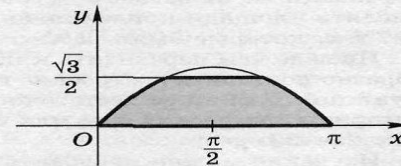


Рис. 34

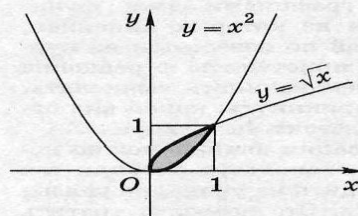


Рис. 35

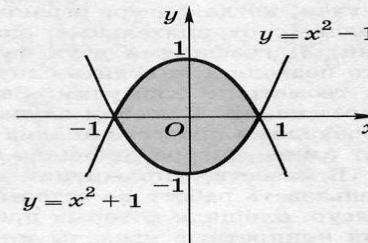


Рис. 36

# Литература

- **1. Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, и др. Под редакцией Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный уровень.**
- **2. Программы по математике для общеобразовательных учреждений 2008 год.**