Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Сходимость знакоположительных рядов***

§15. Сходимость знакоположительных рядов

ЛЕММА 1 (необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительного ряда).

Знакоположительный ряд сходится $\Leftrightarrow$ последовательность его частичных сумм ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2 (первый признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *– знакоположительные ряды, причем*

$$u_n \le v_n, \quad \forall n \ge N \ (N \in \mathbb{N}).$$

Тогда

1) *если ряд* $\sum v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum u_n$ *тоже сходится;*

2) *если ряд* $\sum u_n$ *расходится, то и ряд* $\sum v_n$ *тоже расходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 3 (второй признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *– знакоположительные ряды.*

Если при $n \to \infty$ *существует конечный и отличный от нуля предел отношения их общих членов, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то ряды $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут себя одинаково по отношению к сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ЭТАЛОННЫЕ РЯДЫ, которые используются в признаках сравнения:

а) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится;

б) обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{если} \;\; \alpha > 1, \\ \textit{расходится}, & \textit{если} \;\; \alpha \le 1. \end{cases}$$

в) ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{если} \;\; |q| < 1, \\ \textit{расходится}, & \textit{если} \;\; |q| \ge 1. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4 (признак Даламбера).

Пусть $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд и существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell .$$

Тогда

а) если $\ell < 1$, *то ряд сходится;*

б) если $\ell > 1$, *то ряд расходится;*

в) если $\ell = 1$, *то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 5 (признак Коши).

Пусть $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд и существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell .$$

Тогда

а) если $\ell < 1$, *то ряд сходится;*

б) если $\ell > 1$, *то ряд расходится;*

в) если $\ell = 1$, *то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

***Замечания*.**

1) В обеих теоремах 4 и 5 случай $\ell = \infty$ включается в $\ell > 1$.

2) В ходе доказательства теорем 4 и 5 показывается, что если $\ell > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

ТЕОРЕМА 6 (интегральный признак Коши).

Пусть $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд,*
$f(x)$ *– непрерывная, неотрицательная, монотонно убывающая на* $[c;+\infty)$ *(где* $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$*) функция такая, что*

$$f(n) = u_n \quad (\text{для любого } n = 1,2,3 \ldots).$$

Тогда несобственный интеграл $\int\limits^{+\infty} f(x)dx$ *и ряд* $\sum\limits_{n=c}^{\infty} u_n$ *ведут себя одинаково относительно сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО