



12.7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим интегралы, у которых один или оба предела интегрирования бесконечны, или когда функция не ограничена на отрезке интегрирования.

Такие интегралы называются несобственными.





1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода)

Пусть функция $y=f(x)$ определена и интегрируема на произвольном отрезке $[a, t]$.

Т.е. для $t > a$ определена функция

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x) dx$$



Несобственным интегралом

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

от функции $y=f(x)$ на полуинтервале $[a, +\infty)$

называется предел функции $\Phi(t)$ при $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$$



*Если такой предел существует и конечен,
то несобственный интеграл называется
сходящимся к данному пределу.*

*Если конечного предела не существует,
то несобственный интеграл называется
расходящимся.*

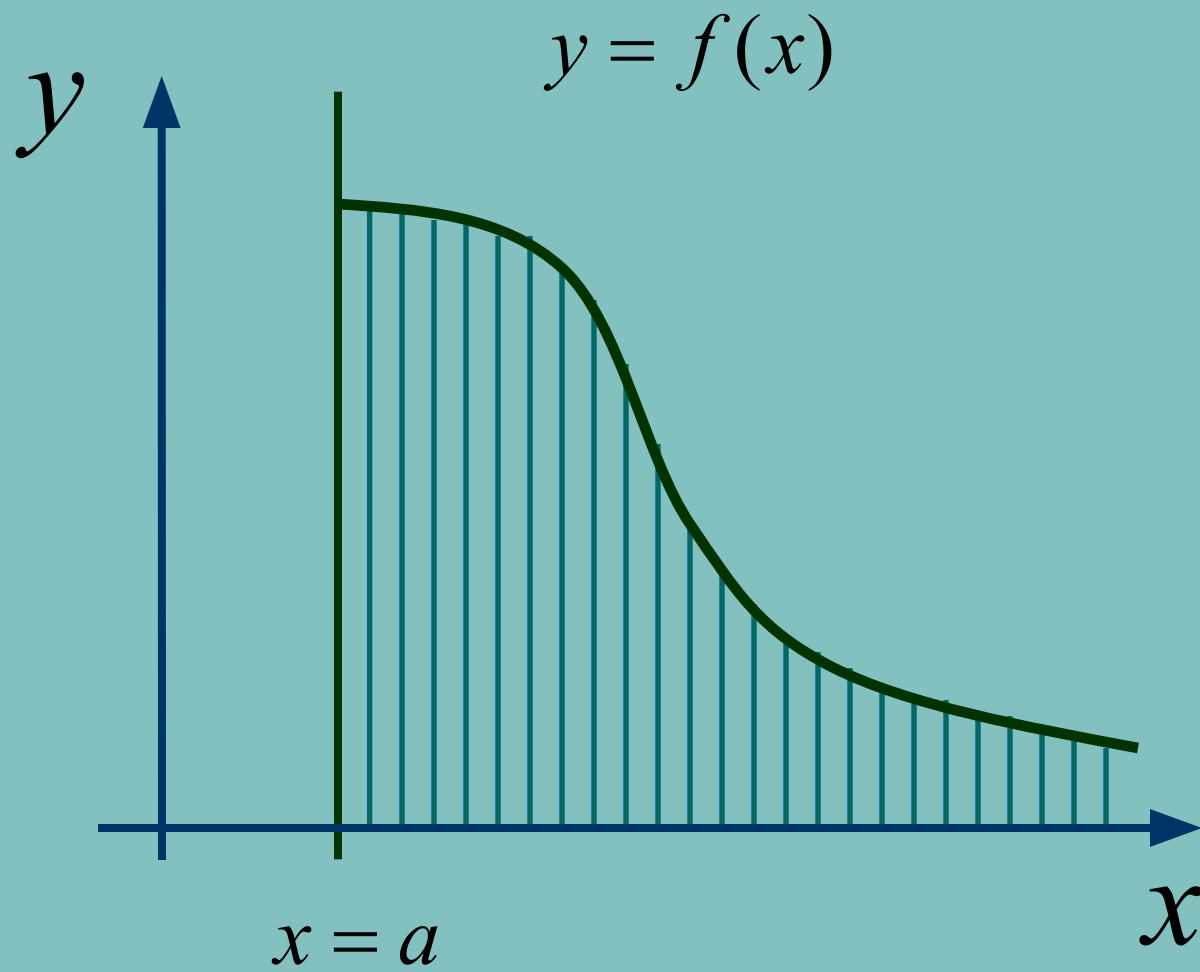




Геометрический смысл несобственного интеграла основан на геометрической интерпретации определенного интеграла на отрезке $[a, t]$.

Это площадь бесконечной области, ограниченной сверху неотрицательной функцией $f(x)$, снизу – осью x , слева – прямой $x=a$.





Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$



Решение.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^t \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1\end{aligned}$$





Аналогично можно определить несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, b]$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Рассмотрим несобственный интеграл на интервале $(-\infty, +\infty)$

Пусть для некоторого числа a несобственные интегралы





$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

- сходятся. Тогда положим

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится.

Если хотя бы один из интегралов в левой части расходится, то будет расходиться и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$


Пример.

Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$$

Решение.

Исследуем на сходимость интегралы

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} e^x dx$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 - e^t) = 1 \quad - \text{сходится.}$$

$$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^t - 1) = +\infty \quad - \text{расходится.}$$


$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx \quad - \text{расходится.}$$



В рассмотренных примерах сначала с помощью первообразной вычислялся интеграл по конечному промежутку, а затем осуществлялся переход к пределу.

Если для функции $y=f(x)$ существует первообразная $F(x)$ на всем промежутке интегрирования

$$[a, +\infty)$$

то по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a) = F(x) \Big|_a^t$$





Отсюда следует, что несобственный интеграл существует только в том случае, если существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = F(\infty)$$

И тогда можно записать:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$$




Аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty)$$


Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$



Решение.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^{\infty} = 0 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \ln \sqrt{3}$$





2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (2 рода)

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна, но неограничена на полуинтервале $[a,b)$. Для определенности положим, что она ограничена и интегрируема на любом отрезке

$$[a, b - \delta]$$

$$0 < \delta < b - a$$

но неограничена в любой окрестности точки b или на промежутке $[b - \delta, b]$



Несобственным интегралом

$$\int_a^b f(x)dx$$

от функции $y=f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$

называется предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

где $\delta > 0$



*Если такой предел существует и конечен,
то несобственный интеграл называется
сходящимся.*

*Если конечного предела не существует,
то несобственный интеграл называется
расходящимся.*

Точка b называется особой точкой.





Аналогично можно ввести понятие
несобственного интеграла от функции $y=f(x)$
непрерывной но неограниченной на
полуинтервале $(a,b]$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$





Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$


Решение.

Особая точка $x=0$.


$$\int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\delta}^1 = 2(1 - \sqrt{\delta})$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\delta}) = 2$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.

Если функция $y=f(x)$ неограничена при $x=C$, где

$$C \in (a, b)$$

то интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

тоже называется несобственным:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.

Если a и b – особые точки, т.е. функция $y=f(x)$ неограничена и интегрируема на интервале (a, b)

то несобственный интеграл определяется как

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Где C – произвольная точка на (a, b) .

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$



Решение.

Особые точки: $x=-1$, $x=1$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-1+\delta}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\delta}^0 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\delta} = \\ &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \arcsin(-1+\delta) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \arcsin(1-\delta) = \\ &= -\arcsin(-1) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$




Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на всем промежутке $[a,b]$, причем b – особая точка. Если существует первообразная $F(x)$, имеющая предел в особой точке $x=b$ или непрерывная на отрезке $[a,b]$, то для вычисления несобственного интеграла имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$



Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{3}} dx$$



Решение.

Особая точка $x=0$, однако первообразная функции

$$3x^{\frac{1}{3}}$$

непрерывна в этой точке, поэтому данный интеграл существует:

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{3}} dx = 3x^{\frac{1}{3}} \bigg|_{-1}^1 = 3(1 - (-1)) = 6$$

