

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Первый замечательный предел
раскрывает неопределенность

$$\frac{0}{0}$$

Второй замечательный предел

При вычислении пределов
тригонометрических функций часто
используется предел отношения синуса дуги к
самой дуге:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Первый замечательный предел

Следствия из первого замечательного предела

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha$$

$(\alpha x \rightarrow 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

(Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$)

Пусть $y = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x \beta x \sin \alpha x}{\alpha x \beta x \sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Первый замечательный предел

Примеры

Первый замечательный предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{14x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2 \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 5x - x^3)}{\sin(x^2 + 5x - x^3)} = 1$$

Первый замечательный предел

Решите самостоятельно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{24x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$$

Первый замечательный предел

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел
раскрывает неопределенность

$$1^{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Второй замечательный предел

ЧИСЛО

$$e = 2,71828182845904523536$$

Второй замечательный предел

Следствия из второго замечательного предела

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \left(\lim_{x/k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x/k}\right)^{x/k} \right)^k = e^k$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$y = f(x)$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Второй замечательный предел

Примеры

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{1/3x} \right)^{4x} = e^{\frac{4}{3}}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{4}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{-t}{2}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

Второй замечательный предел

Решите самостоятельно:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{7x} \right)^{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x} \right)^{9x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+0,5}$$

Второй замечательный предел