Тема 3

Метод парных сравнений и его модификации

Пример из монографии «Экспертные оценки и принятие решений» Литвак Б.Г.

	Э1	*Э2*	*Э3*	*Э4*	*Э5*	*Э6*	*Э7*	*Э8*	*Э9*	*Э10*
1	**3**	**2**	**4**	**5**	**3**	**1**	**6**	**9**	**8**	**7**
2	**4**	**4**	**5**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
3	**5**	**1**	**2**	**2**	**1**	**5**	**9**	**6**	**9**	**6**
4	**2**	**5**	**1**	**1**	**5**	**2**	**7**	**8**	**7**	**8**
5	**7**	**8**	**6**	**9**	**9**	**9**	**2**	**1**	**5**	**2**
6	**8**	**7**	**9**	**6**	**6**	**6**	**1**	**5**	**2**	**1**
7	**6**	**9**	**7**	**8**	**7**	**8**	**5**	**2**	**1**	**5**
8	**9**	**6**	**8**	**7**	**8**	**7**	**8**	**7**	**6**	**9**
9	**1**	**3**	**3**	**3**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**

- Пример из книги про 10 экспертов и 9 проблем, два эксперта поставили 3 проект на 1 место, и ему дали 1 место, но остальные дали ему последнее место.

Лучший проект – но имеющий 2-е место!!! – это 4-й.

Методы экспертного оценивания вообще

Ранжирование.

Эксперт присваивает объектам ранги в порядке предпочтения

Судя по рангам ничего нельзя сказать о расстояниях между сравниваемыми объектами (характеристиками)

Ранжирование процессов П1, П2, П3:

метрика	ранги		
	П1	П2	П3
Время выполнения	2	3	1
Удобство клиента	1	2	3
Стоимость процесса	3	1	2

Непосредственная оценка.

Эксперт присваивает объектам числовые значения, отражающие оценку измеряемого свойства.

Это могут быть баллы по 5-ти, 10-ти, 100-балльной шкале, оценки от 0 до 1 или лингвистические значения: «плохо» (0.25), «удовлетворительно» (0.5), «хорошо» (0.75), «отлично» (1.0).

Пример оценки процессов П1, П2, П3:

метрика	баллы		
	П1	П2	П3
Время выполнения	0,5	0,25	0,75
Удобство клиента	0,25	0,75	0,5
Стоимость процесса	1,0	0,5	0,25

Метод парных сравнений

Эксперт сравнивает каждую пару объектов
Результаты сравнения - в виде матрицы:

a_{ij} = 1 если i -тый объект лучше j -го или эквивалентен j-му

a_{ij} = 0 если наоборот

Матрица должна быть согласована:

a_{ii} = 1 (по диагонали - 1)
если $a_{ij} = 1$, то $a_{ji} = 0$
если $a_{ij} = 1$ и $a_{jk} = 1$, то $a_{ik} = 1$.

Пример парных сравнений процессов по некоторой метрике:

	П1	П2	П3
П1	1	1	1
П2	0	1	0
П3	0	1	1
Ранг	1	3	2

Сумма элементов матрицы по столбцу дает ранг объекта в порядке убывания предпочтения (от наилучшего к худшему)

Пример: решение транспортной проблемы.
Варианты (цели Z)
z1 – метро,
z2 – двухуровневые автобусы,
z3 - расширение транспортной сети,
z4 – трамвай.

	Z1	Z2	Z3	Z4		
Z1 (метро)	-	1	1	1		
Z2 (2-х)	0	-	0	0		
Z3 (расш)	0	1	-	1		
Z4 (трамвай)	0	1	0	-		

Алгоритм и программа
для
метода попарных сравнений

1. Определим цену каждой цели (складываем по строкам):

$C1 = 3$; $C2 = 0$; $C3 = 2$; $C4 = 1$.

Эти числа уже характеризуют важность объектов.

Алгоритм и программа для метода попарных сравнений

2. Нормируем к общему весу исходов (6)

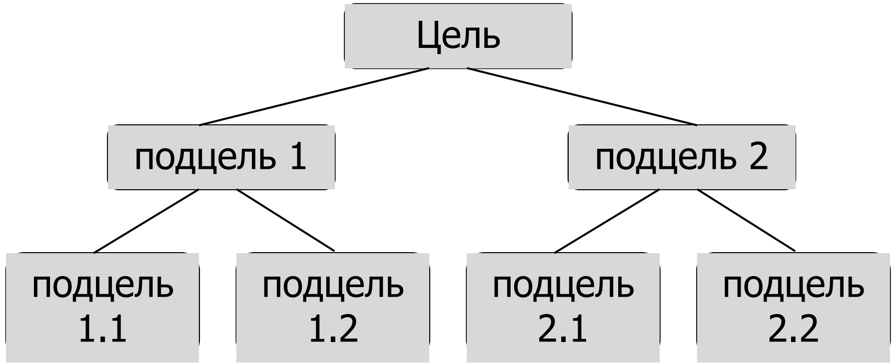
   C1 = 0.5; C2 = 0; C3 = 0.33; C4 = 0.17.

Всегда проверяем сумму (=1) !!!!

Выстраиваем по убыванию.

Алгоритм Саати

Один из методов - Метод анализа иерархий (МАИ), предложенный Т. Саати. Состоит в декомпозиции целей на подцели, являющиеся средствами достижения исходных целей, и их оценке



Верхний уровень- глобальная цель, промежуточные уровни – подцели, нижний уровень – сценарии (конкретные мероприятия)

Для подцелей (сценариев) одной цели определяется их локальный приоритет относительно этой цели методом парных сравнений

	подцель 1	подцель 2	
подцель 1	1	7	0,87
подцель 2	1/7	1	0,13

Саати пишет:
Определим шкалу приоритетов для следующего примера.
Пусть *A, B*, *C* и *D* обозначают стулья, расставленные по прямой линии, ведущей от источника света.
Создадим шкалу приоритетов относительной освещенности для стульев.
Суждения производит человек, стоящий около источника света, у которого, например, спрашивают:
«Насколько сильнее освещенность стула *B* по сравнению с *C*?»
Он отвечает одним из чисел для сравнения, записанных в таблице, и это суждение заносится в позицию (*B, C*) матрицы.
По соглашению сравнение силы всегда производится для действия или объекта, стоящего в левом столбце,
по отношению к действию или объекту, стоящему в верхней строке.
Мы имеем матрицу попарных сравнений для четырех строк и четырех столбцов (матрица 4х4).

Шкала относительной

Степень важности	Определение	Объяснение
1	Одинаковая значимость	Два действия вносят одинаковый вклад в достижение цели
3	Некоторое преобладание значимости одного действия перед другим (слабая значимость)	Опыт и суждение дают лёгкое предпочтение одному действию перед другим
5	Существенная или сильная значимость	Опыт и суждение дают сильное предпочтение одному действию перед другим
7	Очень сильная или очевидная значимость	Предпочтение одного действия перед другим очень сильно. Его превосходство практически явно.
9	Абсолютная значимость	Свидетельство в пользу предпочтения одного действия другому в высшей степени предпочтительны
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между соседними значениями шкалы	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение
Обратные величины приведённых выше чисел	Если действию i при сравнении с действием j приписывается одно из приведённых выше чисел, то действию j при сравнении с i приписывается обратное значение	Обоснованное предположение

Максимально возможное численное превосходство одного объекта над другим – 9.

Основания для установления верхнего предела шкалы

1. Качественные различия значимы на практике в том случае, когда сравниваемые объекты близки относительно критерия (свойства), использованного для сравнения;
2. Способность человека проводить качественные различия между объектами можно представить пятью качественными характеристиками: равный, слабый, сильный, очень сильный и абсолютный (для достижения большей точности, вводятся компромиссные характеристики между перечисленными выше характеристиками);
3. Известно, что оперативная память человека способна манипулировать одновременно 7±2 единицами информации, поэтому приведенная шкала включает в себя не более девяти градаций;
4. Эффективность использования приведенной шкалы подтверждена практикой.

Условимся, что это следующие числа. Пусть заданы элементы *A* и *B*; и если:

- *A* и *B* одинаково важны, заносим 1;

- *A* незначительно важнее, чем *B*, заносим 3;

- *A* значительно важнее *B*, заносим 5;

- *A* явно важнее *B*, заносим 7;

- *A* по своей значительности абсолютно превосходит *B*, заносим 9 **в позицию (*A*, *B*), где пересекаются строка *A* и столбец *B*.**

Освещенность	A	B	C	D
A	1	5	6	7
B	1/5	1	4	6
C	1/6	1/4	1	4
D	1/7	1/6	1/4	1

Для матрицы сравнений нужно вычислить **т.н. главный вектор**.

Существует 4 способа:

1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т. д.
2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.
3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т. е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.
4. Умножить *n* элементов каждой строки и извлечь корень *n*-й степени. Нормализовать полученные числа.

Первый способ вычисления гл вектора

- Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице.
- Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т. д.
- (19,00; 11,20; 5,42; 1,56) – сумма строк
- 37,18. – сумма всех элементов
- **(0,51; 0,30; 0,15; 0,04) главный** вектор-столбец приоритетов относительной освещенности стульев *A*, *B*, *C* и *D* соответственно

Второй способ

- Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

(1,51; 6,43;11,25; 18,00).

Обратными величинами этих сумм являются

(0,66; 0,16; 0,09; 0,06),

а после нормализации становятся (гл вектор)

=(0,68; 0,16; 0,09; 0,06)

- Метод 3 дает (0,590; 0,245; 0,115; 0,050).
- Метод 4 : **(0,61; 0,24; 0,10; 0,04).**

- Точное (точностью до одной сотой) решение будет

(0,61;0,24; 0,10; 0,05)

Четвертый метод – самый точный и трудоемкий.

Матрица обычно несогласована

- Пример согласованной матрицы (3 белых шара, 2 черных и один красный)

	Б	**Ч**	**К**
Б	1	3/2	3
Ч	2/3	1	2
К	1/3	1/2	1

Превосходство *i*-го объекта над *j*-тым измеряется в баллах от 1 до 9: 1 – нет превосходства, 9 – максимальная степень превосходства.

Для согласованности матрицы выполняется: $a_{ij} = 1/a_{ji}$, т.е. симметричные клетки матрицы заполняются обратными величинами.

Можно определить приоритет (вес) каждого объекта в виде числа в интервале [0, 1]:

- перемножить элементы в каждой строке и из полученных произведений извлечь корни *n*-ной степени;
- просуммировать все полученные величины и каждую из них поделить на эту сумму

Пример парных сравнений процессов по некоторой метрике :

	П1	П2	П3
П1	1	7	5
П2	1/7	1	1/2
П3	1/5	2	1

П1: $\sqrt[3]{7 \times 5} = 3{,}27 \quad /4.42 = 0{,}74$

П2: $\sqrt[3]{1/7 \times 1/2} = 0{,}42 \quad /4.42 = 0{,}1$

П3: $\sqrt[3]{1/5 \times 2} = 0{,}73 \quad /4.42 = 0{,}16$

$\sum = 4{,}42$

Xij	Значение
1	I-я и j-я альтернативы примерно равноценны
3	I-я альтернатива немного предпочтительнее j-й
5	I-я альтернатива предпочтительнее j-й
7	I-я альтернатива значительно предпочтительнее j-й
9	I-я альтернатива явно предпочтительнее j-й

Просто пример:

Ищется вид рекламы для новой продукции. Предлагаются четыре возможных вида: реклама на телевидении (обозначим ее как А1), на радио (А2), в газете (А3), на стендах (А4)

	A1	A2	A3	A4
A1	1	7	3	9
A2	1/7	1	1/5	3
A3	1/3	5	1	5
A4	1/9	1/3	1/5	1

Из примера не ясно, зачем этим пользоваться, слишком просто.

Приведу пример из сравнительно недавнего исследования (публикация 2009 года) Рассмотрено 40 альтернатив.

Табл. 1. Веса альтернатив

№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы	№	Вес альтернативы
1	0,05379181	11	0,04082171	21	0,02289497	31	0,01168550
2	0,05366083	12	0,03101045	22	0,02284181	32	0,00757647
3	0,05357093	13	0,03100458	23	0,01769093	33	0,00757482
4	0,05341230	14	0,03089293	24	0,01762088	34	0,00755086
5	0,05340997	15	0,03087690	25	0,01754262	35	0,00731306
6	0,04114577	16	0,03082695	26	0,01740996	36	0,00729837
7	0,04107208	17	0,03073138	27	0,01191967	37	0,00308611
8	0,04093711	18	0,03071119	28	0,01185761	38	0,00298422
9	0,04089968	19	0,02299770	29	0,01181520	39	0,00297701
10	0,04088685	20	0,02296137	30	0,01178852	40	0,00294893

Матрица парных сравнений

	A_1	A_2	...	A_n
A_1	1	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	1		a_{2n}
...			...	
A_n	a_{n1}	a_{n2}		1

$A_1, A_2, ..., A_n$ - основные факторы, определяющие состав объекта

$$a_{ij} = w_i / w_j \qquad a_{ij} = 1/a_{ji} \qquad a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$$

Проверим вручную соотношение aij=1/aji

Табл. 3. Эмпирическая матрица парных сравнений (столбцы 1-10

№/№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,0000	1,0055	1,0071	1,0101	1,0102	1,3364	1,3388	1,3433	1,3446	1,3450
2	0,9946	1,0000	1,0047	1,0077	1,0077	1,3331	1,3355	1,3400	1,3412	1,3417
3	0,9929	0,9953	1,0000	1,0060	1,0060	1,3309	1,3333	1,3377	1,3390	1,3394
4	0,9900	0,9924	0,9940	1,0000	1,0030	1,3125	1,3293	1,3337	1,3349	1,3354
5	0,9899	0,9923	0,9940	0,9970	1,0000	1,3124	1,3292	1,3337	1,3349	1,3353
6	0,7483	0,7501	0,7514	0,7619	0,7619	1,0000	1,0048	1,0081	1,0091	1,0094
7	0,7469	0,7488	0,7500	0,7523	0,7523	0,9952	1,0000	1,0063	1,0072	1,0076
8	0,7444	0,7463	0,7475	0,7498	0,7498	0,9919	0,9937	1,0000	1,0039	1,0042
9	0,7437	0,7456	0,7468	0,7491	0,7491	0,9910	0,9928	0,9961	1,0000	1,0033
10	0,7435	0,7453	0,7466	0,7489	0,7489	0,9907	0,9925	0,9958	0,9967	1,0000
11	0,7423	0,7441	0,7454	0,7476	0,7477	0,9891	0,9909	0,9942	0,9951	0,9954
12	0,5529	0,5543	0,5552	0,5569	0,5569	0,7371	0,7385	0,7409	0,7416	0,7419
13	0,5528	0,5541	0,5551	0,5568	0,5568	0,7370	0,7383	0,7408	0,7415	0,7417
14	0,5507	0,5521	0,5531	0,5547	0,5548	0,7343	0,7356	0,7381	0,7388	0,7390
15	0,5505	0,5518	0,5528	0,5544	0,5545	0,7339	0,7353	0,7377	0,7384	0,7386
16	0,5496	0,5509	0,5519	0,5535	0,5535	0,7327	0,7340	0,7365	0,7372	0,7374
17	0,5478	0,5492	0,5501	0,5518	0,5518	0,7304	0,7317	0,7342	0,7349	0,7351
18	0,5475	0,5488	0,5498	0,5514	0,5514	0,7299	0,7313	0,7337	0,7344	0,7346
19	0,3993	0,4003	0,4010	0,4022	0,4022	0,5358	0,5367	0,5385	0,5390	0,5392
20	0,3986	0,3996	0,4003	0,4015	0,4015	0,5349	0,5359	0,5377	0,5382	0,5384
21	0,3975	0,3985	0,3991	0,4003	0,4004	0,5333	0,5343	0,5361	0,5366	0,5368
22	0,3965	0,3975	0,3982	0,3994	0,3994	0,5321	0,5331	0,5348	0,5353	0,5355

- Вот с такими процедурами сравнения приходится иметь дело в реальной жизни.
- Мы сознательно рассматриваем гораздо более простые примеры.

Метод отыскания главного вектора w

Уравнение на собственные значения $$Aw = \lambda$$

Искомый вектор является собственным вектором уравнения на собственные значения матрицы парных сравнений, соответствующим максимальному собственному числу

Один из точных способов описан выше

отклонение от согласованности МАТРИЦЫ может быть выражено величиной ($\lambda_{max} - n$) ($n - 1$) , которую назовем *индексом согласованности* (ИС).

- Приведём метод получения грубой оценки согласованности. Умножив матрицу сравнений справа на полученную оценку вектора решения, получим новый вектор. Разделив первую компоненту этого вектора на первую компоненту оценки вектора решения, вторую компоненту нового вектора на вторую компоненту оценки вектора решения и т. д., определим еще один вектор.
- Разделив сумму компонент этого вектора на число компонент, найдем приближение к числу max λ (называемому максимальным или главным собственным значением), используемому для оценки согласованности, отражающей пропорциональность предпочтений. Чем ближе max λ к *n* (числу объектов или видов действия в матрице), тем более согласован результат.

- В ПРИМЕРЕ СО СТУЛЬЯМИ ДОЛЖНО получиться 4.

Индекс согласованности сгенерированной случайным образом по шкале от 1 до 9 обратно-симметричной матрицы с соответствующими обратными величинами элементов, назовем *случайным индексом* (СИ)

Индекс согласованности (ИС) и отношение согласованности (ОС)

$$\text{ИС} = (\lambda_{\max} - n)/(n-1)$$

Случайная согласованность

Размер матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность (СС)	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Отношение ИС к среднему СИ для матрицы того же порядка называется *отношением согласованности* (ОС). Значение ОС, меньшее или равное 0,10, будем считать приемлемым.

«используем приведенную выше матрицу и третий вектор-столбец, полученный методом 3. После умножения матрицы справа на вектор приоритетов (0,59; 0,25; 0,11; 0,05) имеем вектор-столбец (2,85; 11,11(?????); 0,47; 0,20). Разделив компоненты этого вектора на соответствующие компоненты первого вектора, получим (4,83; 4,44; 4,28; 4,00), а в результате усреднения последних – 4,39. Отсюда
ИС=(4,39—4)/3=0,13. Для определения того, насколько хорош этот результат, разделим его на соответствующий СИ=0,90. Отношение согласованности 0,13/0,90=0,14, что, пожалуй, не так уж близко к 0,10.» - цитирование Саати.